Klassenarbeit Mathematik für Nachschreiber **Bearbeitungszeit 90 min.**
SG28D Gruppe A NAME:

a) Berechnen Sie die Funktionsgleichung mit dem Gauß – Algorithmus.
Die vorgegebenen Punkte:

$P_1(-1|0) \quad P_2(3|4) \quad P_3(5|0) \quad P_4(7|8)$

Die Funktionsgleichung:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Das Gleichungssystem:

$P_1(-1|0) \Rightarrow f(-1) = 0 \Leftrightarrow -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 0$

$P_2(3|4) \Rightarrow f(3) = 4 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 4$

$P_3(5|0) \Rightarrow f(5) = 0 \Leftrightarrow 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 0$

$P_4(7|8) \Rightarrow f(7) = 8 \Leftrightarrow 343a_3 + 49a_2 + 7a_1 + 1a_0 = 8$

Der Gauß- Algorithmus:

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	-1	1	-1	0	
1	3	9	27	4	$II-I$
1	5	25	125	0	$III-I$
1	7	49	343	8	$IV-I$
1	-1	1	-1	0	
0	4	8	28	4	$:4$
0	6	24	126	0	$:6$
0	8	48	344	8	$:8$
1	-1	1	-1	0	
0	1	2	7	1	
0	1	4	21	0	$III-II$
0	1	6	43	1	$IV-II$
1	-1	1	-1	0	
0	1	2	7	1	
0	0	2	14	-1	
0	0	4	36	0	$IV-2\cdot III$
1	-1	1	-1	0	
0	1	2	7	1	
0	0	2	14	-1	
0	0	0	8	2	

$8a_3 = 2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{4}}$

$2a_2 + 14a_3 = -1$

$\Leftrightarrow 2a_2 + \frac{14}{4} = -1 \,|\, -\frac{14}{4}$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -\frac{4}{4} - \frac{14}{4} \Leftrightarrow 2a_2 = -\frac{18}{4} \,|:2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{9}{4}}$

$a_1 + 2a_2 + 7a_3 = 1$

$\Leftrightarrow a_1 - \frac{18}{4} + \frac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow a_1 - \frac{11}{4} = 1 \,|\, +\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow a_1 = \frac{4}{4} + \frac{11}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_1 = \frac{15}{4}}$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$

$\Leftrightarrow a_0 - \frac{15}{4} - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow a_0 - \frac{25}{4} = 0 \,|\, +\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{25}{4}}$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{25}{4}$$

b) Berechnen Sie die relativen Extrema (Hochpunkt, Tiefpunkt).

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{25}{4}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4}\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4}=0\,|\cdot\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$$

$$p=-6 \qquad q=5 \qquad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-5=4\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{4}=2$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l}x_1=3+2=5\\ x_2=3-2=1\end{array}\right.$$ Stellen mit waagerechter Tangente

$$f''(x_1)=f''(5)=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}=\frac{6}{2}=3>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=5$$

$$f''(x_2)=f''(1)=\frac{3}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{6}{2}=-3<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=1$$

$$f(x_1)=f(5)=0 \text{ da } P_3(5\,|\,0) \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(5\,|\,0)}}$$

$$f(x_2)=f(1)=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}+\frac{15}{4}+\frac{25}{4}=\frac{32}{4}=8 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}(1\,|\,8)}}$$

c) Berechnen Sie den Wendepunkt.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{25}{4}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0\,|+\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x=\frac{9}{2}\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ist mögliche Wendestelle } x_w$$

$$f'''(x_w)=f'''(3)=\frac{3}{2}\neq 0\Rightarrow x_w=3 \text{ ist Wendestelle}$$

$$f(x_w)=f(3)=4 \text{ da } P_2(3\,|\,4)\Rightarrow \underline{\underline{P_w(3\,|\,4)}}$$

d) Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente.

$$t(x)=f'(x_w)(x-x_w)+f(x_w) \text{ mit } x_w=3$$

$$f'(x_w)=f'(3)=\frac{27}{4}-\frac{54}{4}+\frac{15}{4}=-\frac{12}{4}=-3 \qquad f(x_w)=f(3)=4$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x-3)+4\Leftrightarrow \underline{\underline{t(x)=-3x+13}}$$

e) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{25}{4}$$

$$f(0) = \frac{25}{4} \Rightarrow P_y\left(0 \mid \frac{25}{4}\right)$$

Nullstellen: $P_1(-1 \mid 0) \Rightarrow x_1 = -1 \qquad P_2(5 \mid 0) \Rightarrow x_2 = 5$

Da aber $P_{Min}(5 \mid 0)$ ist, berührt der Graph an der Stelle $x = 5$ die $x-$Achse.

Damit ist $x_2 = 5$ eine doppelte Nullstelle.

Somit sind die Schnittpunkte mit der $x-$Achse:

$P_{x1}(-1 \mid 0) \qquad P_{x2/3}(5 \mid 0)$

f) Berechnen Sie die Funktionswerte für $x = 2\ ;4\ ;6$
und stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf.
Genauigkeit in der Wertetabelle, zwei Stellen hinter dem Komma.

$$f(2) = \frac{1}{4}\cdot 8 - \frac{9}{4}\cdot 4 + \frac{15}{4}\cdot 2 + \frac{25}{4} = \frac{8}{4} - \frac{36}{4} + \frac{30}{4} + \frac{25}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75$$

$$f(4) = \frac{1}{4}\cdot 64 - \frac{9}{4}\cdot 16 + \frac{15}{4}\cdot 4 + \frac{25}{4} = \frac{64}{4} - \frac{144}{4} + \frac{60}{4} + \frac{25}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

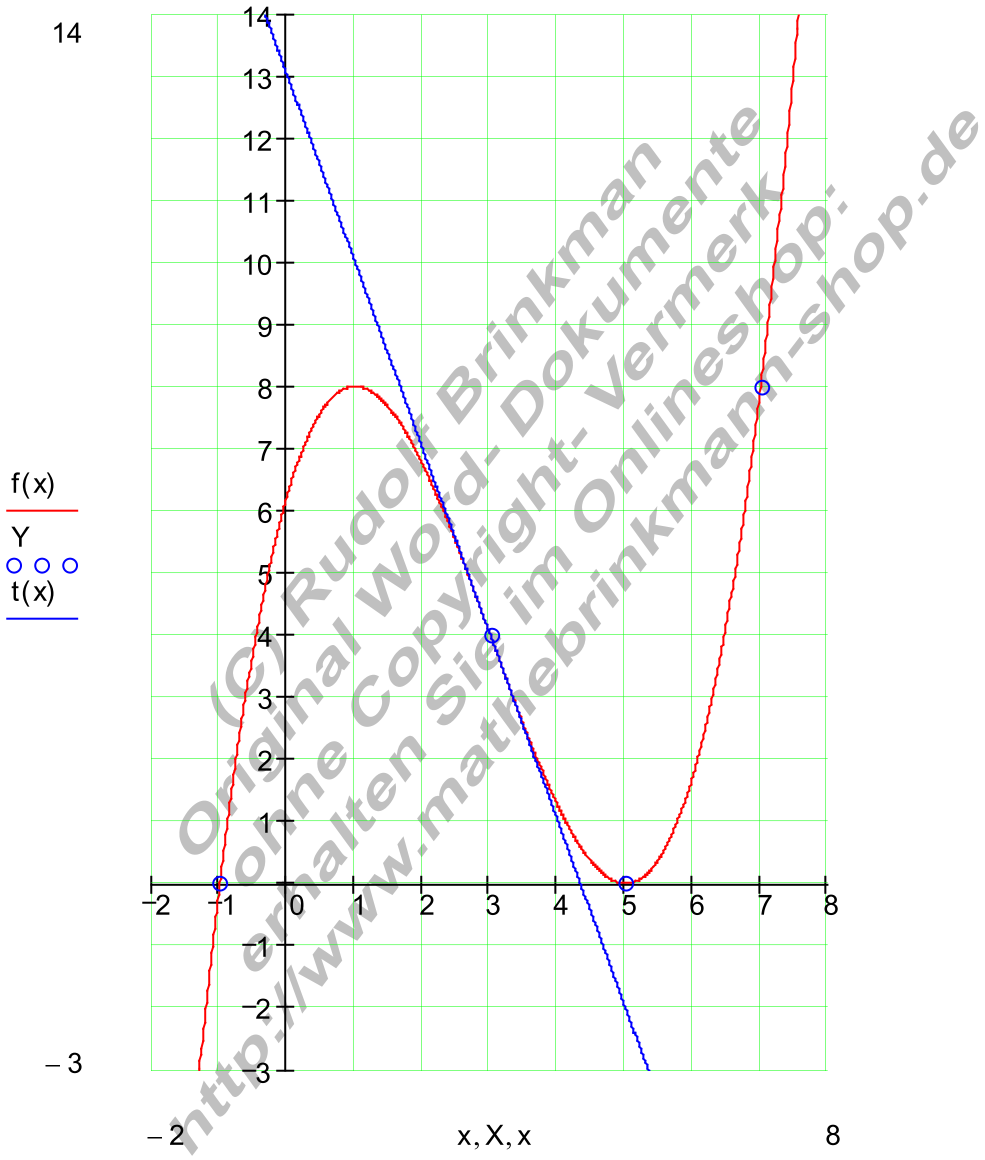
$$f(6) = \frac{1}{4}\cdot 216 - \frac{9}{4}\cdot 36 + \frac{15}{4}\cdot 6 + \frac{25}{4} = \frac{216}{4} - \frac{324}{4} + \frac{90}{4} + \frac{25}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

$P_1(-1 \mid 0) = P_{x1} \qquad P_2(3 \mid 4) = P_w \qquad P_3(5 \mid 0) = P_{Min} = P_{x2/3} \qquad P_4(7 \mid 8)$

$P_{Max}(1 \mid 8) \qquad P_y(0 \mid 6{,}25)$

x	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	0	6,25	8	6,75	4	1,25	0	1,75	8

g) Zeichnen Sie möglichst genau den Graphen und die Wendetangente in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. (Extrempunkte, Wendepunkt und Achsenschnittpunkte).
Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.



h) Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für Rechts- bzw. Linkskrümmung an.

Rechtskrümmung: $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 3\}_{\mathbb{R}}$

Linkskrümmung: $I_2 = \{x \mid 3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

i) Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Berechnen Sie die Fläche dieses Dreiecks.

$t(x) = -3x + 13 \Rightarrow y - \text{Abschnitt } 13 \text{ Einheiten}$

$t(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3} \Rightarrow x - \text{Abschnitt } \frac{13}{3} \text{ Einheiten}$

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\frac{13}{3} \cdot 13}{2} = \frac{13 \cdot 13}{6} = \frac{169}{6} \approx 28{,}16 \Leftrightarrow \underline{\underline{A = \frac{169}{6} \approx 28{,}16 \text{ FE}}}$$

Klassenarbeit Mathematik für Nachschreiber **Bearbeitungszeit 90 min.**
SG28D Gruppe B NAME:

a) Berechnen Sie die Funktionsgleichung mit dem Gauß – Algorithmus.
Die vorgegebenen Punkte:

$P_1(1|0) \quad P_2(-3|4) \quad P_3(-5|0) \quad P_4(-7|8)$

Die Funktionsgleichung:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Das Gleichungssystem:

$P_1(1|0) \Rightarrow f(1) = 0 \quad \Leftrightarrow 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 0$

$P_2(-3|4) \Rightarrow f(-3) = 4 \quad \Leftrightarrow -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 4$

$P_3(-5|0) \Rightarrow f(-5) = 0 \quad \Leftrightarrow -125a_3 + 25a_2 - 5a_1 + 1a_0 = 0$

$P_4(-7|8) \Rightarrow f(-7) = 8 \quad \Leftrightarrow -343a_3 + 49a_2 - 7a_1 + 1a_0 = 8$

Der Gauß- Algorithmus:

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	−3	9	−27	4	II − I
1	−5	25	−125	0	III − I
1	−7	49	−343	8	IV − I
1	1	1	1	0	
0	−4	8	−28	4	:(−4)
0	−6	24	−126	0	:6
0	−8	48	−344	8	:8
1	1	1	1	0	
0	1	−2	7	−1	
0	−1	4	−21	0	III + II
0	−1	6	−43	1	IV + II
1	1	1	1	0	
0	1	−2	7	−1	
0	0	2	−14	−1	
0	0	4	−36	0	IV − 2·III
1	1	1	1	0	
0	1	−2	7	−1	
0	0	2	−14	−1	
0	0	0	−8	2	

$-8a_3 = 2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$

$2a_2 - 14a_3 = -1$

$\Leftrightarrow 2a_2 + \frac{14}{4} = -1 \,|\, -\frac{14}{4}$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -\frac{4}{4} - \frac{14}{4} \Leftrightarrow 2a_2 = -\frac{18}{4} \,|:2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{9}{4}}$

$a_1 - 2a_2 + 7a_3 = -1$

$\Leftrightarrow a_1 + \frac{18}{4} - \frac{7}{4} = -1 \Leftrightarrow a_1 + \frac{11}{4} = -1 \,|\, -\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow a_1 = -\frac{4}{4} - \frac{11}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -\frac{15}{4}}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$\Leftrightarrow a_0 - \frac{15}{4} - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow a_0 - \frac{25}{4} = 0 \,|\, +\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{25}{4}}$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{25}{4}$$

b) Berechnen Sie die relativen Extrema (Hochpunkt, Tiefpunkt).

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2-\frac{15}{4}x+\frac{25}{4}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x-\frac{15}{4}\Rightarrow f''(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x-\frac{15}{4}=0\,|\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+5=0$$

$$p=6\qquad q=5\qquad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-5=4\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{4}=2$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l}x_1=-3+2=-1\\ x_2=-3-2=-5\end{array}\right.\quad \text{Stellen mit waagerechter Tangente}$$

$$f''(x_1)=f''(-1)=\frac{3}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{6}{2}=-3<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=-1$$

$$f''(x_2)=f''(-5)=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}=\frac{6}{2}=3>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=-5$$

$$f(x_1)=f(-1)=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}+\frac{15}{4}+\frac{25}{4}=\frac{32}{4}=8\Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}(-1\,|\,8)}}$$

$$f(x_2)=f(-5)=0 \text{ da } P_3(-5\,|\,0)\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(-5\,|\,0)}}$$

c) Berechnen Sie den Wendepunkt.

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2-\frac{15}{4}x+\frac{25}{4}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x-\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\Rightarrow f'''(x)=-\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0\,|+\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x=\frac{9}{2}\,|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \text{ ist mögliche Wendestelle } x_w$$

$$f'''(x_w)=f'''(-3)=-\frac{3}{2}\neq 0\Rightarrow x_w=-3 \text{ ist Wendestelle}$$

$$f(x_w)=f(-3)=4 \text{ da } P_2(-3\,|\,4)\Rightarrow \underline{\underline{P_w(-3\,|\,4)}}$$

d) Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente.

$$t(x)=f'(x_w)(x-x_w)+f(x_w) \text{ mit } x_w=-3$$

$$f'(x_w)=f'(-3)=-\frac{27}{4}+\frac{54}{4}-\frac{15}{4}=\frac{12}{4}=3\qquad f(x_w)=f(-3)=4$$

$$\Rightarrow t(x)=3(x+3)+4\Leftrightarrow \underline{\underline{t(x)=3x+13}}$$

e) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{25}{4}$$

$$f(0) = \frac{25}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{25}{4}\right)}}$$

Nullstellen: $P_1(1|0) \Rightarrow x_1 = 1 \qquad P_2(-5|0) \Rightarrow x_2 = -5$

Da aber $P_{Min}(-5|0)$ ist, berührt der Graph an der Stelle $x = -5$ die x – Achse.

Damit ist $x_2 = -5$ eine doppelte Nullstelle.

Somit sind die Schnittpunkte mit der x – Achse:

$$\underline{\underline{P_{x1}(1|0) \qquad P_{x2/3}(-5|0)}}$$

f) Berechnen Sie die Funktionswerte für $x = -6\,;\ -4\,;\ -2$
und stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf.
Genauigkeit in der Wertetabelle, zwei Stellen hinter dem Komma.

$$f(-6) = \frac{1}{4}\cdot 216 - \frac{9}{4}\cdot 36 + \frac{15}{4}\cdot 6 + \frac{25}{4} = \frac{216}{4} - \frac{324}{4} + \frac{90}{4} + \frac{25}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

$$f(-4) = \frac{1}{4}\cdot 64 - \frac{9}{4}\cdot 16 + \frac{15}{4}\cdot 4 + \frac{25}{4} = \frac{64}{4} - \frac{144}{4} + \frac{60}{4} + \frac{25}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

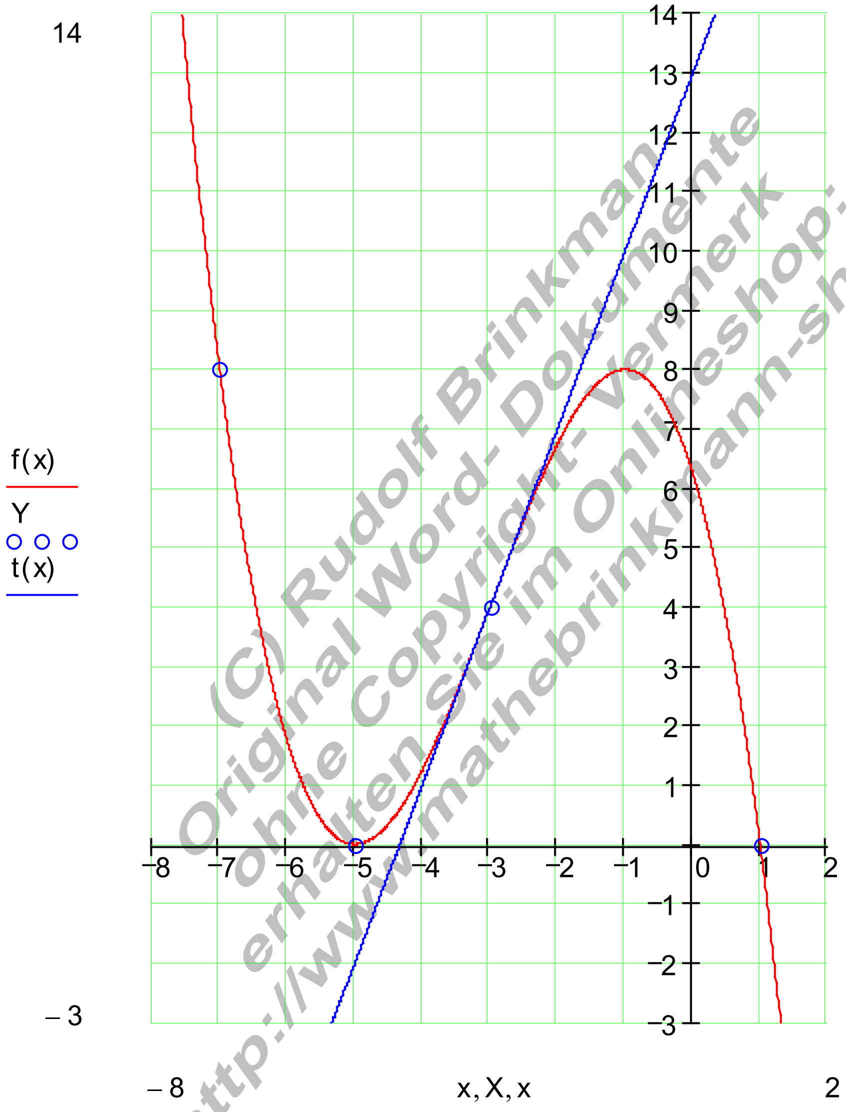
$$f(-2) = \frac{1}{4}\cdot 8 - \frac{9}{4}\cdot 4 + \frac{15}{4}\cdot 2 + \frac{25}{4} = \frac{8}{4} - \frac{36}{4} + \frac{30}{4} + \frac{25}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75$$

$P_1(1|0) = P_{x1} \qquad P_2(-3|4) = P_w \qquad P_3(-5|0) = P_{Min} = P_{x2/3} \qquad P_4(-7|8)$

$P_{Max}(-1|8) \qquad P_y(0|6{,}25)$

x	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
f(x)	8	1,75	0	1,25	4	6,75	8	6,25	0

g) Zeichnen Sie möglichst genau den Graphen und die Wendetangente in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. (Extrempunkte, Wendepunkt und Achsenschnittpunkte). Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.)



h) Machen Sie eine Aussage über das Monotonieverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für monoton steigend, bzw. monoton fallend an.

monoton fallend: $I_1 = \{x \mid -\infty < x < -5\}_{\mathbb{R}}$

monoton steigend: $I_2 = \{x \mid -5 < x < -1\}_{\mathbb{R}}$

monoton fallend: $I_3 = \{x \mid -1 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

i) Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Berechnen Sie die Fläche dieses Dreiecks.

$t(x) = 3x + 13 \Rightarrow y - \text{Abschnitt } 13 \text{ Einheiten}$

$t(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{13}{3} \Rightarrow x - \text{Abschnitt } \frac{13}{3} \text{ Einheiten}$

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\frac{13}{3} \cdot 13}{2} = \frac{13 \cdot 13}{6} = \frac{169}{6} \approx 28{,}16 \Leftrightarrow \underline{\underline{A = \frac{169}{6} \approx 28{,}16 \text{ FE}}}$$