Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 16.12.09**
SG29 D Gruppe A	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

Ausführliche Lösungen:

1.	Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen:	
	a) $\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0$	b) $\left(\frac{1}{2}x-2\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0$

A1 Ausführliche Lösungen

a)

$$\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0\,\Big|:\frac{2}{3}\quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-2=0\quad\Rightarrow p=-1\quad q=-2$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}+\frac{8}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=\underline{\underline{2}}\\ x_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{2}{2}=\underline{\underline{-1}}\end{array}\right.$$

b)

$$\left(\frac{1}{2}x-2\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0$$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt.

$$\frac{1}{2}x-2=0\,|+2\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2}x=2\,|\cdot2\quad\Leftrightarrow\quad x=4\Rightarrow\underline{\underline{x_1=4}}$$

$$\frac{3}{4}x+2=0\,|-2\quad\Leftrightarrow\quad\frac{3}{4}x=-2\,\Big|:\frac{3}{4}\quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{2}{1}:\frac{3}{4}=-\frac{8}{3}\Rightarrow\underline{\underline{x_2=-\frac{8}{3}}}$$

2.	Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln und deren Nullstellen. $f_1(x)=x^2+4x+3$ Nullstellen: $x_1=-3;\ x_2=-1$ $f_2(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$ Nullstellen: $x_1=-1;\ x_2=3$	
	a)	Berechnen Sie die Scheitelpunkte S_1 und S_2 beider Parabeln.
	b)	Berechnen Sie die Scheitelpunktform der Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$.
	c)	Bestimmen Sie durch Rechnung die Funktionsgleichung g(x) der Geraden, die durch beide Scheitelpunkte verläuft.
	d)	Zeichnen Sie beide Parabeln und die Gerade in ein Koordinatensystem.

A2 Ausführliche Lösungen

a)

$f_1(x) = x^2 + 4x + 3$

Nullstellen: $x_1 = -3\,;\ x_2 = -1$

$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3-1}{2} = -2$

$y_s = f_1(x_s) = f_1(-2) = 4 - 8 + 3 = -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{S_1(-2 \mid -1)}}$

$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

Nullstellen: $x_1 = -1\,;\ x_2 = 3$

$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$

$y_s = f_2(x_s) = f_2(1) = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -2$

$\Rightarrow \underline{\underline{S_2(1 \mid -2)}}$

b)

$f_1(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s = \underline{\underline{(x+2)^2 - 1}}$

$f_2(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2}}$

c)

$g(x) = a_1x + a_0$ mit $S_1(-2 \mid -1)$ und $S_2(1 \mid -2)$ als P_1 und P_2

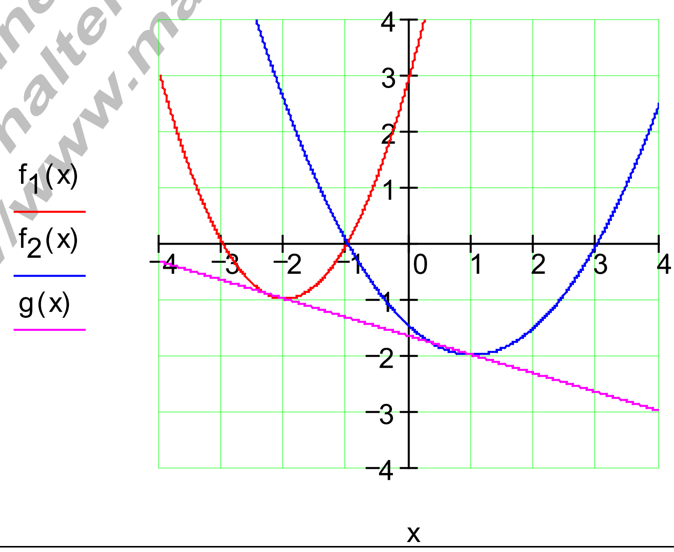
$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-(-1)}{1-(-2)} = \frac{-2+1}{1+2} = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}x + a_0$

$S_2(1 \mid -2) \Rightarrow g(1) = -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \cdot 1 + a_0 = -2 \mid +\frac{1}{3} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{5}{3}$

$\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}}}$

d)



3.	Der Benzinverbrauch eines PKW in Liter/100 km in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v in km/h lässt sich durch folgende Funktion beschreiben: $b(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 8$ für $v > 40$	
	a)	Berechnen Sie den Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 140 km/h.
	b)	Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 8 Liter auf 100 km?
	c)	Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten? Wie hoch ist er genau? Hinweis: Die Funktionsgleichung b(v) ist die Gleichung einer nach oben geöffneten Parabel. Schreiben Sie zu jedem Ergebnis einen Antwortsatz

A3	Ausführliche Lösungen	
	a)	$b(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 8$ für $v > 40$ $b(140) = 0{,}0005 \cdot 140^2 - 0{,}05 \cdot 140 + 8 = \underline{\underline{10{,}8}}$ Bei einer Geschwindigkeit von 140 km/h beträgt der Benzinverbrauch 10,8 Liter auf 100 km.
	b)	$b(v) = 8 \Leftrightarrow 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 8 = 8 \mid -8$ $\Leftrightarrow 0{,}0005v^2 - 0{,}05v = 0 \Leftrightarrow v(0{,}0005v - 0{,}05) = 0 \Rightarrow v_1 = 0 < 40$ scheidet aus $0{,}0005v - 0{,}05 = 0 \mid +0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}0005v = 0{,}05 \mid : 0{,}0005 \Leftrightarrow \underline{\underline{v_2 = \frac{0{,}05}{0{,}0005} = 100}}$ Bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h beträgt der Benzinverbrauch 8 Liter auf 100 km.
	c)	Beim Graphen von b(v) handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt S(50 | 6,75). Der Scheitelpunkt ist der tiefste Punkt der Parabel. Das entspricht dem niedrigsten Kraftstoffverbrauch. Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten. Er beträgt 6,75 Liter auf 100 km.

4.	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = x^2 + 3x + a_0$	
	a)	Berechnen Sie die Diskriminante D.
	b)	Für welche Werte von a_0 hat f(x) eine (doppelte) Nullstelle?
	c)	Für welche Werte von a_0 hat f(x) zwei Nullstellen?
	d)	Für welche Werte von a_0 hat f(x) keine Nullstelle?
	Begründen Sie jedes Ergebnis durch eine entsprechende Rechnung.	

A4	Ausführliche Lösungen	
	a)	$f(x) = x^2 + 3x + a_0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + a_0 = 0 \Rightarrow p = 3; q = a_0$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - a_0 = \underline{\underline{\frac{9}{4} - a_0}}$
	b)	Bedingung für eine Nullstelle: $D = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} - a_0 = 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} = a_0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{9}{4}$ Für $a_0 = \frac{9}{4} = 2{,}25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ genau eine Nullstelle.
	c)	Bedingung für zwei Nullstellen: $D > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} - a_0 > 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} > a_0 \Leftrightarrow a_0 < \frac{9}{4}$ Für $a_0 < \frac{9}{4} = 2{,}25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ genau zwei Nullstellen.
	d)	Bedingung für keine Nullstelle: $D < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} - a_0 < 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} < a_0 \Leftrightarrow a_0 > \frac{9}{4}$ Für $a_0 > \frac{9}{4} = 2{,}25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ keine Nullstelle.

Viel Erfolg

Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 16.12.09**
SG29 D Gruppe B	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

Ausführliche Lösungen:

1.	Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen:	
	a) $\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0$	b) $\left(\frac{3}{4}x+1\right)\cdot\left(2x-\frac{1}{2}\right)=0$

A1 Ausführliche Lösungen

a) $\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0 \,|:\frac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-2=0 \quad\Rightarrow p=1 \quad q=-2$

$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}+\frac{8}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2}{2}=\underline{\underline{1}} \\ x_2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{2}=\underline{\underline{-2}} \end{array}\right.$

b) $\left(\frac{3}{4}x+1\right)\cdot\left(2x-\frac{1}{2}\right)=0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt.

$\frac{3}{4}x+1=0\,|-1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{4}x=-1:\frac{3}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{1}{1}:\frac{3}{4}=-\frac{4}{3}\Rightarrow \underline{\underline{x_1=-\frac{4}{3}}}$

$2x-\frac{1}{2}=0\,|+\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 2x=\frac{1}{2}\,|:2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}:\frac{2}{1}=\frac{1}{4}\Rightarrow \underline{\underline{x_2=\frac{1}{4}}}$

2. Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln und deren Nullstellen.

$f_1(x)=-x^2+4x-3$ Nullstellen: $x_1=1;\, x_2=3$

$f_2(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$ Nullstellen: $x_1=-3;\, x_2=1$

a) Berechnen Sie die Scheitelpunkte S_1 und S_2 beider Parabeln.

b) Berechnen Sie die Scheitelpunktform der Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$.

c) Bestimmen Sie durch Rechnung die Funktionsgleichung g(x) der Geraden, die durch beide Scheitelpunkte verläuft.

d) Zeichnen Sie beide Parabeln und die Gerade in ein Koordinatensystem.

A2 Ausführliche Lösungen

a)

$f_1(x) = -x^2 + 4x - 3$

Nullstellen: $x_1 = 1;\ x_2 = 3$

$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

$y_s = f_1(x_s) = f_1(2) = -4 + 8 - 3 = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{S_1(2 \mid 1)}}$

$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$

Nullstellen: $x_1 = -3;\ x_2 = 1$

$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$

$y_s = f_2(x_s) = f_2(-1) = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -2$

$\Rightarrow \underline{\underline{S_2(-1 \mid -2)}}$

b)

$f_1(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s = \underline{\underline{-(x-2)^2 + 1}}$

$f_2(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2}}$

c)

$g(x) = a_1 x + a_0$ mit $S_1(2 \mid 1)$ und $S_2(-1 \mid -2)$ als P_1 und P_2

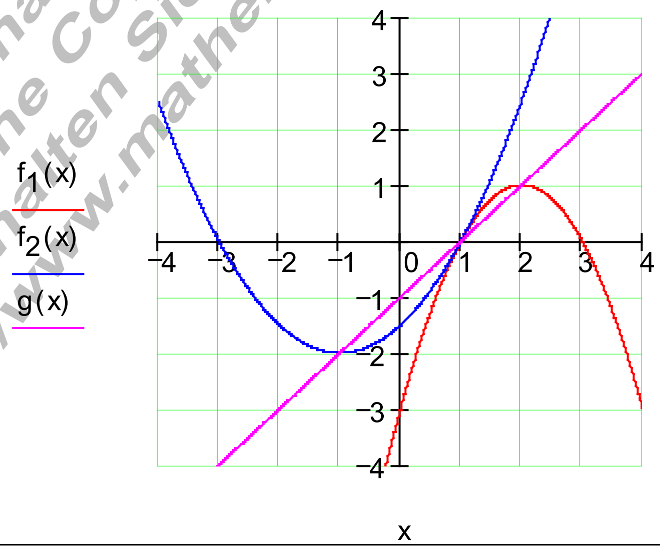
$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-1}{-1-2} = \frac{-3}{-3} = 1$

$\Rightarrow g(x) = x + a_0$

$S_1(2 \mid 1) \Rightarrow g(2) = 1 \Leftrightarrow 2 + a_0 = 1 \mid -2 \Leftrightarrow a_0 = -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = x - 1}}$

d)



3.	Der Benzinverbrauch eines PKW in Liter/100 km in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v in km/h lässt sich durch folgende Funktion beschreiben: $b(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 6$ für $v > 40$	
	a)	Berechnen Sie den Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h.
	b)	Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 6 Liter auf 100 km?
	c)	Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten? Wie hoch ist er genau? Hinweis: Die Funktionsgleichung b(v) ist die Gleichung einer nach oben geöffneten Parabel. Schreiben Sie zu jedem Ergebnis einen Antwortsatz

A3	Ausführliche Lösungen	
	a)	$b(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 6$ für $v > 40$ $b(120) = 0{,}0005 \cdot 120^2 - 0{,}05 \cdot 120 + 6 = \underline{\underline{7{,}2}}$ Bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h beträgt der Benzinverbrauch 7,2 Liter auf 100 km.
	b)	$b(v) = 6 \Leftrightarrow 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 6 = 6 \mid -6$ $\Leftrightarrow 0{,}0005v^2 - 0{,}05v = 0 \Leftrightarrow v(0{,}0005v - 0{,}05) = 0 \Rightarrow v_1 = 0 < 40$ scheidet aus $0{,}0005v - 0{,}05 = 0 \mid +0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}0005v = 0{,}05 \mid : 0{,}0005 \Leftrightarrow \underline{\underline{v_2 = \frac{0{,}05}{0{,}0005} = 100}}$ Bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h beträgt der Benzinverbrauch 6 Liter auf 100 km.
	c)	Beim Graphen von b(v) handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt S(50 | 4,75). Der Scheitelpunkt ist der tiefste Punkt der Parabel. Das entspricht dem niedrigsten Kraftstoffverbrauch. Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten. Er beträgt 4,75 Liter auf 100 km.

4.	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = x^2 + 5x + a_0$	
	a)	Berechnen Sie die Diskriminante D.
	b)	Für welche Werte von a_0 hat f(x) eine (doppelte) Nullstelle?
	c)	Für welche Werte von a_0 hat f(x) zwei Nullstellen?
	d)	Für welche Werte von a_0 hat f(x) keine Nullstelle?
	Begründen Sie jedes Ergebnis durch eine entsprechende Rechnung.	

A4	Ausführliche Lösungen	
	a)	$f(x) = x^2 + 5x + a_0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + a_0 = 0 \Rightarrow p = 5; q = a_0$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - a_0 = \underline{\underline{\frac{25}{4} - a_0}}$
	b)	Bedingung für eine Nullstelle: $D = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} - a_0 = 0 \mid + a_0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} = a_0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{25}{4}$ Für $a_0 = \frac{25}{4} = 6,25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ genau eine Nullstelle.
	c)	Bedingung für zwei Nullstellen: $D > 0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} - a_0 > 0 \mid + a_0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} > a_0 \Leftrightarrow a_0 < \frac{25}{4}$ Für $a_0 < \frac{25}{4} = 6,25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ genau zwei Nullstellen.
	d)	Bedingung für keine Nullstelle: $D < 0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} - a_0 < 0 \mid + a_0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} < a_0 \Leftrightarrow a_0 > \frac{25}{4}$ Für $a_0 > \frac{25}{4} = 6,25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ keine Nullstelle.

Viel Erfolg