Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 20.05.09**
SG27D Gruppe A	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Falls Extremwerte zu berechnen sind, ist der rechnerische Nachweis zu erbringen.

1. Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ für $k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie f_k auf Achsenschnittpunkte und berechnen Sie diese.

b) Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von $f_k(x)$.

c) Untersuchen Sie f_k auf Extrempunkte und berechnen Sie diese.

d) Untersuchen Sie f_k auf Wendepunkte und berechnen Sie diese (Ohne Nachweis).

e) Berechnen Sie die Ortskurve $f_{ok}(x)$ für die Extrempunkte (P_{kE}).

f) Bestimmen Sie die Fläche A_k zwischen den Achsenschnittpunkten und der x- Achse.

g) Lesen Sie die Werte der markanten Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) aus der Wertetabelle ab und tragen Sie die Werte in folgendes Schema ein :

$P_{1y}(0 \mid 1{,}25)$	$P_{2y}(0 \mid 2{,}5)$	$P_{3y}(0 \mid 3{,}75)$	$P_{4y}(0 \mid 5)$
$P_{1x}(1 \mid 0)$	$P_{2x}(2 \mid 0)$	$P_{3x}(3 \mid 0)$	$P_{4x}(4 \mid 0)$
$P_{1E}(-1 \mid 1{,}52)$	$P_{2E}(0 \mid 2{,}5)$	$P_{3E}(1 \mid 4{,}12)$	$P_{4E}(2 \mid 6{,}8)$
$P_{1W}(-3 \mid 1{,}12)$	$P_{2W}(-2 \mid 1{,}84)$	$P_{3W}(-1 \mid 3{,}03)$	$P_{4W}(0 \mid 5)$

Berechnen Sie für die Ortskurve mit dem Taschenrechner die Funktionswerte auf 2 Stellen hinter dem Komma genau und tragen Sie die Werte in die Tabelle ein.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2
$f_{ok}(x)$	0,21	0,34	0,56	0,92	1,52	2,5	4,12	6,8

Zeichnen Sie die Graphen für $f_1(x)$; $f_2(x)$; $f_3(x)$; $f_4(x)$ und die Ortskurve $f_{ok}(x)$ in ein geeignetes Koordinatensystem.
Verwenden Sie dafür die berechneten Werte und folgende Wertetabelle.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	–3,4	–11,2	–27,7	–60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	–5,6	–18,5	–45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	–9,24	–30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	–15,2

h) Berechnen Sie für k = 4 die Fläche A_4 und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem.

Kontrollergebnisse:

$$f'(x) = \left[\frac{5}{8}\cdot(k-x) - \frac{5}{4}\right]e^{\frac{1}{2}x} \qquad f''(x) = \left[\frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad P_{k_E}\left(k-2 \;\middle|\; \frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$$

Aufgabe 1:

a)	Achsenschnittpunkte
	$f_k(x)=\frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ $P_y: f_k(0)=\frac{5}{4}(k-0)e^{\frac{1}{2}\cdot 0}=\frac{5}{4}\cdot k\cdot 1=\frac{5}{4}k\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\mid\frac{5}{4}k\right)}}$ $P_x: f_k(x)=0\Leftrightarrow \frac{5}{4}(k-x)\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}=0\Leftrightarrow \frac{5}{4}(k-x)=0\Leftrightarrow x=k\Leftrightarrow \underline{\underline{P_x(k\mid 0)}}$

b)	Die ersten beiden Ableitungen
	1. Ableitung: $f_k(x)=\frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k'(x)=u'v+uv'$ mit $u=\frac{5}{4}(k-x)\Rightarrow u'=-\frac{5}{4}$ und $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k'(x)=-\frac{5}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\frac{5}{4}(k-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=-\frac{5}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\frac{5}{8}\cdot(k-x)e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\left[\frac{5}{8}\cdot(k-x)-\frac{5}{4}\right]e^{\frac{1}{2}x}}}$

b)	2. Ableitung $f_k''(x)=u'v+uv'$ mit $u=\frac{5}{8}(k-x)-\frac{5}{4}\Rightarrow u'=-\frac{5}{8}$ und $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k''(x)=-\frac{5}{8}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left[\frac{5}{8}(k-x)-\frac{5}{4}\right]\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left\{-\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{5}{8}(k-x)-\frac{5}{4}\right]\right\}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $=\left[-\frac{5}{8}+\frac{5}{16}(k-x)-\frac{5}{8}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\left[\frac{5}{16}(k-x)-\frac{5}{4}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$

c) Extrempunkte

$$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{8}\cdot(k-x)-\frac{5}{4}\right]\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8}\cdot(k-x)-\frac{5}{4}=0\,|:\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow k-x-2=0\,|+x$$

$$\Leftrightarrow k-2=x \Rightarrow x_E=k-2 \text{ ist mögliche Extremstelle.}$$

Überprüfung mit der 2. Ableitung: $f_k''(x_E)\neq 0$

$$f_k''(x_E)=f_k''(k-2)=\left\{\frac{5}{16}\left[k-(k-2)\right]-\frac{5}{4}\right\}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}$$

$$=\left[\frac{5}{16}(k-k+2)-\frac{5}{4}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}=\left(\frac{5}{8}-\frac{5}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}=\left(\frac{5}{8}-\frac{10}{8}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}=-\frac{5}{8}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}}_{>0}<0$$

Bei $x=x_E=k-2$ liegt ein relatives Maximum.

$$f_k(x)=\frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_E)=f_k(k-2)=\frac{5}{4}\left[k-(k-2)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}$$

$$=\frac{5}{4}(k-k+2)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}=\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\Rightarrow \underline{\underline{P_{k_{Max}}\left(k-2\,|\,\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)}}$$

d) Der Wendepunkt

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{16}(k-x)-\frac{5}{4}\right]\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}(k-x)-\frac{5}{4}=0\,|+\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}(k-x)=\frac{5}{4}\,|:\frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow k-x=4\,|-k \Leftrightarrow -x=4-k\,|\cdot(-1)\Leftrightarrow x=k-4$$

Wendestelle bei $x=x_W=k-4$

$$f_k(x)=\frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_W)=f_k(k-4)=\frac{5}{4}\left[k-(k-4)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-4)}=\frac{5}{4}\cdot 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}=5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}$$

$$\underline{\underline{P_{k_W}\left(k-4\,|\,5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)}}$$

e) **Die Ortskurve**

$$P_{k_{Max}}\left(k-2\,\middle|\,\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)\Rightarrow \underbrace{x=k-2}_{(1)}\ \text{ und }\ \underbrace{y=\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}}_{(2)}$$

$x=k-2\Leftrightarrow k=x+2$ in (2) eingesetzt: $y=\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+2)-1}=\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x+1-1}=\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$

Funktionsgleichung der Ortskurve: $\underline{\underline{f_{OK}(x)=\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$

f) **Die Fläche A_k**

$$A_k=\left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right|$$

$$\int f_k(x)\,dx=\int\frac{5}{4}(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx=\frac{5}{4}\int\underbrace{(k-x)}_{u}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'}\,dx$$

Produktintegration $\quad\int u\cdot v'\,dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\,dx$

$u=k-x\Rightarrow u'=-1$

$v'=e^{\frac{1}{2}\cdot x}\Rightarrow v=\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx=2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$

$$\Rightarrow\int(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx=(k-x)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}-\int(-1)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

$$=(2k-2x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+2\cdot\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

$$=(2k-2x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+2\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=(-2x+2k+4)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{4}\int(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx=\left(-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}k+5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx=\left[\left(-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}k+5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$$

$$=\left(-\frac{5}{2}k+\frac{5}{2}k+5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}-\left[\left(-\frac{5}{2}\cdot 0+\frac{5}{2}k+5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right]$$

$$=5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}-\left[\left(\frac{5}{2}k+5\right)\cdot e^{0}\right]=5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}-\left(\frac{5}{2}k+5\right)=5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}-\frac{5}{2}k-5$$

$$A_k=\left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right|=\underline{\underline{\left|5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}-\frac{5}{2}k-5\right|}}$$

f) Die Fläche A_k

Variante:

$$A_k = \left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right|$$

$$\int f_k(x)\,dx = \int \frac{5}{4}(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = \int \frac{5}{4}k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx - \int \frac{5}{4}x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

$$= \frac{5}{4}k\cdot \underbrace{\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{I} - \frac{5}{4}\cdot \underbrace{\int x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{II} = \frac{5}{4}k\cdot I - \frac{5}{4}\cdot II$$

$$I: \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$II: \int \underbrace{x}_{u}\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx \text{ mit } u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$\text{und } v' = e^{\frac{1}{2}\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C \text{ wird}$$

$$\int x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = x\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \int 1\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2\cdot \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

$$= 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int f_k(x)\,dx = \frac{5}{4}k\cdot I - \frac{5}{4}\cdot II = \frac{5}{4}k\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \frac{5}{4}\left(2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) + C$$

$$= \frac{5}{2}k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \frac{5}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$= \left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}x + 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C = \left(-\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}k + 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx = \left[\left(-\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}k + 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$$

$$= \left(-\frac{5}{2}k + \frac{5}{2}k + 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left[\left(-\frac{5}{2}\cdot 0 + \frac{5}{2}k + 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right]$$

$$= 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left[\left(\frac{5}{2}k + 5\right)\cdot e^{0}\right] = 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left(\frac{5}{2}k + 5\right) = 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \frac{5}{2}k - 5$$

$$A_k = \left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right| = \underline{\underline{\left|5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \frac{5}{2}k - 5\right|}}$$

g) Die Graphen

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	−3,4	−11,2	−27,7	−60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	−5,6	−18,5	−45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	−9,24	−30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	−15,2

Markante Punkte:

$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{5}{4}k\right)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

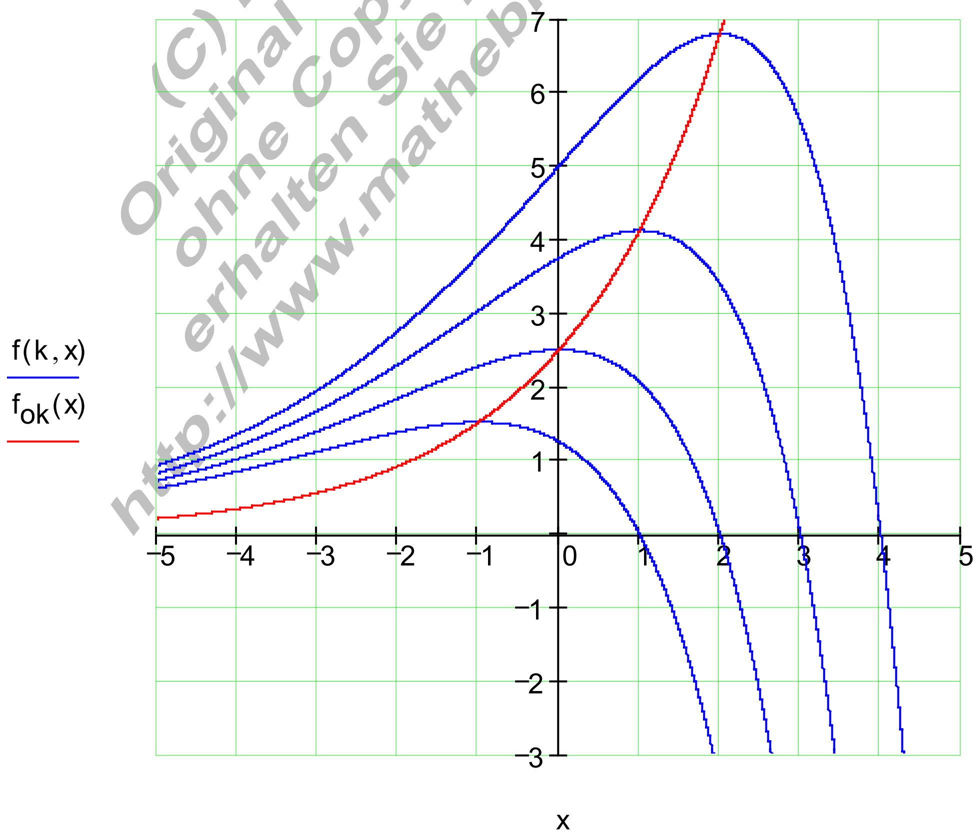
$P_{k_x}(k \mid 0)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

$P_{k_{Max}}\left(k-2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

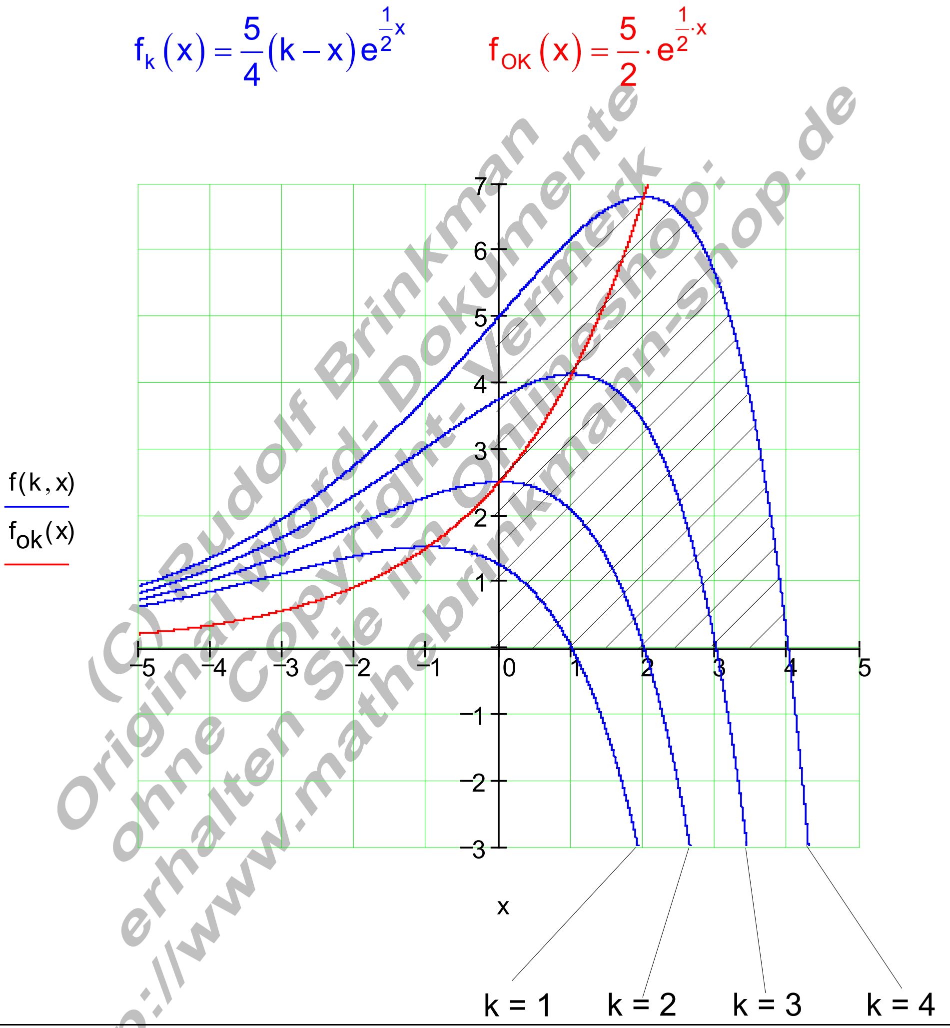
$P_{1_{Max}}(-1 \mid 1{,}52); P_{2_{Max}}(0 \mid 2{,}5); P_{3_{Max}}(1 \mid 4{,}12); P_{4_{Max}}(2 \mid 6{,}8)$

$P_{k_W}\left(k-4 \mid 5 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_W}(-3 \mid 1{,}12); P_{2_W}(-2 \mid 1{,}84); P_{3_W}(-1 \mid 3{,}03); P_{4_W}(0 \mid 5)$



h)	Flächenberechnung für k = 4
	$A_k = \left\| \int_0^k f_k(x)\,dx \right\| = \left\| 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \frac{5}{2}k - 5 \right\|$ $A_4 = \left\| \int_0^4 f_4(x)\,dx \right\| = \left\| 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 4} - \frac{5}{2}\cdot 4 - 5 \right\| = \left\| 5\cdot e^2 - 10 - 5 \right\| = \left\| 5\cdot e^2 - 15 \right\| \approx \underline{\underline{21{,}95\,FE}}$



Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Mi 20.05.09
SG27D Gruppe B	NAME:		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Falls Extremwerte zu berechnen sind, ist der rechnerische Nachweis zu erbringen.

1. Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ für $k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie f_k auf Achsenschnittpunkte und berechnen Sie diese.

b) Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von $f_k(x)$.

c) Untersuchen Sie f_k auf Extrempunkte und berechnen Sie diese.

d) Untersuchen Sie f_k auf Wendepunkte und berechnen Sie diese (Ohne Nachweis).

e) Berechnen Sie die Ortskurve $f_{ok}(x)$ für die Extrempunkte (P_{kE}).

f) Bestimmen Sie die Fläche A_k zwischen den Achsenschnittpunkten und der x- Achse.

g) Lesen Sie die Werte der markanten Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) aus der Wertetabelle ab und tragen Sie die Werte in folgendes Schema ein :

$P_{1y}(0 \mid -1{,}25)$	$P_{2y}(0 \mid -2{,}5)$	$P_{3y}(0 \mid -3{,}75)$	$P_{4y}(0 \mid -5)$
$P_{1x}(1 \mid 0)$	$P_{2x}(2 \mid 0)$	$P_{3x}(3 \mid 0)$	$P_{4x}(4 \mid 0)$
$P_{1E}(-1 \mid -1{,}52)$	$P_{2E}(0 \mid -2{,}5)$	$P_{3E}(1 \mid -4{,}12)$	$P_{4E}(2 \mid -6{,}8)$
$P_{1W}(-3 \mid -1{,}12)$	$P_{2W}(-2 \mid -1{,}84)$	$P_{3W}(-1 \mid -3{,}03)$	$P_{4W}(0 \mid -5)$

Berechnen Sie für die Ortskurve mit dem Taschenrechner die Funktionswerte auf 2 Stellen hinter dem Komma genau und tragen Sie die Werte in die Tabelle ein.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2
$f_{ok}(x)$	–0,21	–0,34	–0,56	–0,92	–1,52	–2,5	–4,12	–6,8

Zeichnen Sie die Graphen für $f_1(x)$; $f_2(x)$; $f_3(x)$; $f_4(x)$ und die Ortskurve $f_{ok}(x)$ in ein geeignetes Koordinatensystem.
Verwenden Sie dafür die berechneten Werte und folgende Wertetabelle.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	–3,4	–11,2	–27,7	–60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	–5,6	–18,5	–45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	–9,24	–30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	–15,2

h) Berechnen Sie für k = 4 die Fläche A_4 und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem.

a) Achsenschnittpunkte

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$P_y : f_k(0) = \frac{5}{4}(0-k)e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = -\frac{5}{4}\cdot k\cdot 1 = -\frac{5}{4}k \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid -\frac{5}{4}k\right)}}$$

$$P_x : f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x-k)\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x-k) = 0 \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow \underline{\underline{P_x(k \mid 0)}}$$

b) Die ersten beiden Ableitungen

1. Ableiting

$$f_k(x)=\frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=u'v+uv' \text{ mit } u=\frac{5}{4}(x-k)\Rightarrow u'=\frac{5}{4}$$

$$\text{und } v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=\frac{5}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\frac{5}{4}(x-k)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\frac{5}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\frac{5}{8}\cdot(x-k)e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\left[\frac{5}{8}\cdot(x-k)+\frac{5}{4}\right]e^{\frac{1}{2}x}}}$$

b) 2. Ableitung

$$f_k''(x)=u'v+uv' \text{ mit } u=\frac{5}{8}(x-k)+\frac{5}{4}\Rightarrow u'=\frac{5}{8}$$

$$\text{und } v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x)=\frac{5}{8}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left[\frac{5}{8}(x-k)+\frac{5}{4}\right]\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left\{\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{5}{8}(x-k)+\frac{5}{4}\right]\right\}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$=\left[\frac{5}{8}+\frac{5}{16}(x-k)+\frac{5}{8}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\left[\frac{5}{16}(x-k)+\frac{5}{4}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

c) Extrempunkte

$$f_k'(x)=0\Leftrightarrow\left[\frac{5}{8}\cdot(x-k)+\frac{5}{4}\right]\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{5}{8}\cdot(x-k)+\frac{5}{4}=0\,\Big|:\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow x-k+2=0\,|+k-2$$

$$\Leftrightarrow x\Rightarrow x_E=k-2 \text{ ist mögliche Extremstelle.}$$

Überprüfung mit der 2. Ableitung: $f_k''(x_E)\neq 0$

$$f_k''(x_E)=f_k''(k-2)=\left\{\frac{5}{16}\left[(k-2)-k\right]+\frac{5}{4}\right\}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}$$

$$=\left[\frac{5}{16}(k-2-k)+\frac{5}{4}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}=\left(-\frac{5}{8}+\frac{5}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}=\left(-\frac{5}{8}+\frac{10}{8}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}=\frac{5}{8}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}}_{>0}>0$$

Bei $x=x_E=k-2$ liegt ein relatives Minimum.

$$f_k(x)=\frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_E)=f_k(k-2)=\frac{5}{4}\left[(k-2)-k\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}$$

$$=\frac{5}{4}(k-2-k)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\Rightarrow\underline{\underline{P_{k_{Min}}\left(k-2\,\Big|\,-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)}}$$

d)	Der Wendepunkt
	$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{16}(x-k)+\frac{5}{4}\right]\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}=0$ $\Leftrightarrow \frac{5}{16}(x-k)+\frac{5}{4}=0 \mid -\frac{5}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{5}{16}(x-k)=-\frac{5}{4} \mid :\frac{5}{16}$ $\Leftrightarrow x-k=-4 \mid +k \Leftrightarrow x=k-4$ Wendestelle bei $x=x_W=k-4$ $f_k(x)=\frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k(x_W)=f_k(k-4)=\frac{5}{4}\left[(k-4)-k\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-4)}=\frac{5}{4}\cdot(-4)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}=-5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}$ $\underline{\underline{P_{k_W}\left(k-4 \mid -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)}}$

e)	Die Ortskurve
	$P_{k_{Min}}\left(k-2 \mid -\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)\Rightarrow \underbrace{x=k-2}_{(1)}$ und $\underbrace{y=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}}_{(2)}$ $x=k-2 \Leftrightarrow k=x+2$ in (2) eingesetzt: $y=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+2)-1}=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x+1-1}=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ Funktionsgleichung der Ortskurve: $\underline{\underline{f_{OK}(x)=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$

f)	Die Fläche A_k
	$A_k = \left\|\int_0^k f_k(x)\,dx\right\|$ $\int f_k(x)\,dx = \int \frac{5}{4}(x-k)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \frac{5}{4}\int \underbrace{(x-k)}_{u}\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'}\,dx$ Produktintegration $\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$ $u = x-k \Rightarrow u' = 1$ $v' = e^{\frac{1}{2}\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $\Rightarrow \int (x-k)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = (x-k)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \int 1\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$ $= (2x-2k)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2\cdot\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$ $= (2x-2k)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = (2x-2k-4)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $\Rightarrow \frac{5}{4}\int (x-k)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$ $\int_0^k f_k(x)\,dx = \left[\left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$ $= \left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left[\left(\frac{5}{2}\cdot 0 - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right]$ $= -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left[\left(-\frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{0}\right] = -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + \frac{5}{2}k + 5 = -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + \frac{5}{2}k + 5$ $A_k = \left\|\int_0^k f_k(x)\,dx\right\| = \underline{\underline{\left\|-5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + \frac{5}{2}k + 5\right\|}}$

f) Die Fläche A_k

Variante:

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x)\,dx \right|$$

$$\int f_k(x)\,dx = \int \frac{5}{4}(x-k)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \int \frac{5}{4}x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx - \int \frac{5}{4}k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

$$= \frac{5}{4}\underbrace{\int x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{I} - \frac{5}{4}k\cdot \underbrace{\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{II} = \frac{5}{4}\cdot I - \frac{5}{4}k\cdot II$$

$$II: \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$I: \int \underbrace{x}_{u}\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx \text{ mit } u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$\text{und } v' = e^{\frac{1}{2}\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C \text{ wird}$$

$$\int x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = x\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \int 1\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2\cdot \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

$$= 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int f_k(x)\,dx = \frac{5}{4}\cdot I - \frac{5}{4}k\cdot II = \frac{5}{4}\left(2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) - \frac{5}{4}k\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$= \frac{5}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \frac{5}{2}k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$= \left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx = \left[\left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$$

$$= \left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left[\left(\frac{5}{2}\cdot 0 - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right]$$

$$= -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left[\left(-\frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{0}\right] = -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + \frac{5}{2}k + 5$$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x)\,dx \right| = \underline{\underline{\left| -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + \frac{5}{2}k + 5 \right|}}$$

g) Die Graphen

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	–0,62	–0,85	–1,12	–1,38	–1,52	–1,25	0	3,4	11,2	27,7	60,9
$f_2(x)$	–0,72	–1,02	–1,39	–1,84	–2,27	–2,5	–2,06	0	5,6	18,4	45,7
$f_3(x)$	–0,82	–1,18	–1,67	–2,3	–3,03	–3,75	–4,12	–3,4	0	9,24	30,5
$f_4(x)$	–0,92	–1,35	–1,95	–2,76	–3,79	–5	–6,18	–6,8	–5,6	0	15,2

Markante Punkte:

$P_{k_y}\left(0 \,|\, -\frac{5}{4}k\right)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

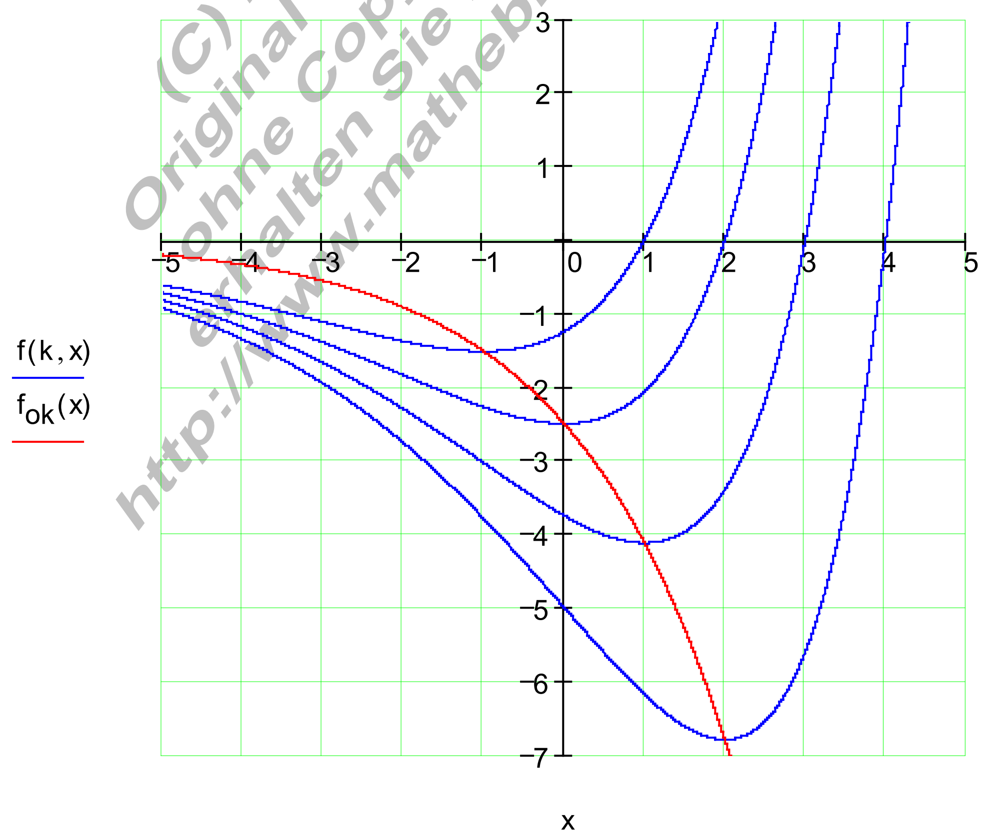
$P_{k_x}(k \,|\, 0)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

$P_{k_{Min}}\left(k-2 \,|\, -\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_{Min}}(-1 \,|\, -1{,}52); P_{2_{Min}}(0 \,|\, -2{,}5); P_{3_{Min}}(1 \,|\, -4{,}12); P_{4_{Min}}(2 \,|\, -6{,}8)$

$P_{k_W}\left(k-4 \,|\, -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

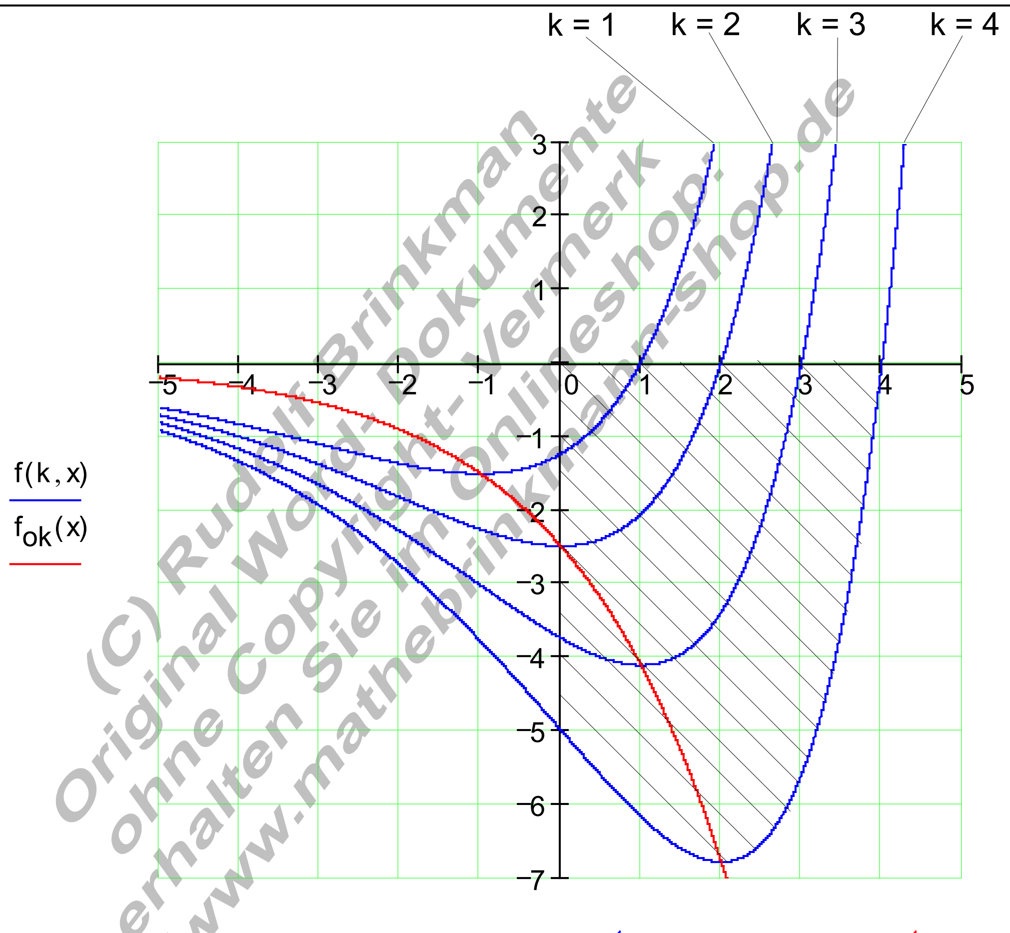
$P_{1_W}(-3 \,|\, -1{,}12); P_{2_W}(-2 \,|\, -1{,}84); P_{3_W}(-1 \,|\, -3{,}03); P_{4_W}(0 \,|\, -5)$



h) Flächenberechnung für k = 4

$$A_k = \left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right| = \underline{\underline{\left|-5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + \frac{5}{2}k + 5\right|}}$$

$$A_4 = \left|\int_0^4 f_4(x)\,dx\right| = \left|-5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 4} + \frac{5}{2}\cdot 4 + 5\right| = \left|-5\cdot e^2 + 10 + 5\right| = \left|-5\cdot e^2 + 15\right| \approx \underline{\underline{21{,}95\,FE}}$$



$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ $f_{OK}(x) = \frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$