Klassenarbeit	**Mathematik Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 3.12.08**
SG27D Gruppe A	**NAME: Lösungen**	

1.	Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 \left(-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16\right) dx$

A1 Ausführliche Lösung

$$\int_0^2 \left(-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16\right) dx = -\frac{1}{5}x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 16x \Big|_0^2$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot 32 + 2 \cdot 16 - 8 \cdot 8 + 16 \cdot 4 - 16 \cdot 2 = -\frac{32}{5} + \cancel{32} - \cancel{64} + \cancel{64} - \cancel{32} = \underline{\underline{-\frac{32}{5} = -6,4}}$$

2.	Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$
	Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse, wobei die Nullstellen die Integrationsgrenzen bilden. Wie liegt der Graph in Bezug auf die x- Achse?

A2 Ausführliche Lösung

Nullstellenberechnung

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8 = 0 \text{ Substitution mit } x^2 = z$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2 - 3z - 8 = 0 \,|\cdot\frac{4}{5} \Leftrightarrow z^2 - \frac{12}{5}z - \frac{32}{5} = 0 \Rightarrow p = -\frac{12}{5}; q = -\frac{32}{5}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{32}{5} = \frac{36}{25} + \frac{160}{25} = \frac{196}{25} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{196}{25}} = \frac{14}{5}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{6}{5} + \frac{14}{5} = \frac{20}{5} = 4 \\ z_2 = \frac{6}{5} - \frac{14}{5} = -\frac{8}{5} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow z_1 = 4 \text{ bzw. } z_2 = -\frac{8}{5} \quad (\text{keine Lösung})$$

$z_1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ bzw. $x_2 = 2$ sind die Integrationsgrenzen

A2 Ausführliche Lösung

Flächenberechnung

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8\right)dx = \left.\frac{x^5}{4} - x^3 - 8x\right|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{2^5}{4} - 2^3 - 8\cdot 2 - \left[\frac{(-2)^5}{4} - (-2)^3 - 8\cdot(-2)\right] = \frac{32}{4} - 8 - 16 - \left[-\frac{32}{4} - (-8) + 16\right]$$

$$= 8 - 8 - 16 - (-8 + 8 + 16) = -16 - (16) = -32$$

Die Fläche: $A = \left|\int_{-2}^{2}\left(\frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8\right)dx\right| = |-32| = 32\ \text{FE}$

Da das Ergebnis der Integration negativ ist, liegt der Graph von f unterhalb der x- Achse.

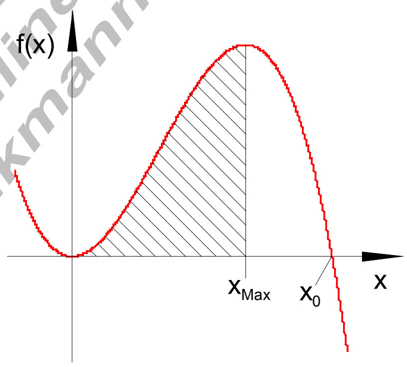
3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

b) Berechnen Sie die Extrempunkte.

c) Berechnen Sie die gekennzeichnete Fläche.



A3 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad f(0) = 0 \Rightarrow$ Schnittpunkt mit der y – Achse : $P_y(0\,|\,0)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{3}{2} \mid \cdot 4 \Leftrightarrow x_3 = 6$$

Schnittpunkte mit der x – Achse : $P_{x1/2}(0\,|\,0); P_{x3}(6\,|\,0)$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2 \qquad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x \qquad f''(x)=-\frac{3}{2}x+3$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2+3x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{4}x+3\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\left(-\frac{3}{4}x+3\right)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=3\left|\cdot\frac{4}{3}\right. \Leftrightarrow x_2=4$$

$$f''(x_1)=f''(0)=3>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=0$$

$$f''(x_2)=f''(4)=-3<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=4$$

$$f(x_1)=f(0)=0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } \underline{\underline{P_{Min}(0\,|\,0)}}$$

$$f(x_2)=f(4)=-16+24=8 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } \underline{\underline{P_{Max}(4\,|\,8)}}$$

A3 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2 \qquad A=\left|\int_0^4 f(x)\,dx\right|$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^4\left(-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)dx=\left[-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}x^3\right]_0^4=-16+32=16$$

$$\underline{\underline{A=16\,FE}}$$

4. In einer parabelförmigen Giebelwand soll ein rechteckiges Fenster eingelassen werden, das bis zum Boden reicht. Giebelmaße: **B = 3 m, H = 2 m**

a) Welche Maße muss das Fenster haben (Breite und Höhe), damit die Fensterfläche maximal wird?
Wie groß ist die Fensterfläche?

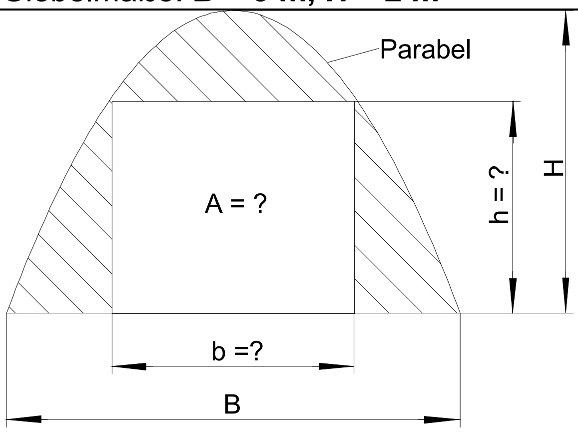
Zwischenwerte zur Kontrolle :
Funktionsgleichung der Parabel:

$$f(x)=-\frac{8}{9}x^2+2$$

Fensterfläche als Funktion von b:

$$A(b)=-\frac{2}{9}b^3+2b$$

b) Die restliche Fläche der Giebelwand soll gestrichen werden.
Wie groß ist diese Fläche?



A4 Ausführliche Lösung

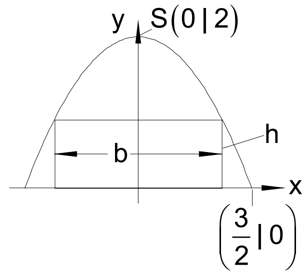
a) $B = 3\,m \qquad H = 2\,m$

Ansatz über die Scheitelpunktform:

$$f(x) = a_2 x^2 + 2$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} a_2 + 2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{8}{9}$$

Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + 2}}$



A4 Ausführliche Lösung

a)

$$A = b \cdot h \quad h(b) = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{8}{9} \cdot \frac{b^2}{4} + 2 = -\frac{2}{9}b^2 + 2$$

$$A(b) = b \cdot h(b) = b \cdot \left(-\frac{2}{9}b^2 + 2\right) = -\frac{2}{9}b^3 + 2b$$

$$A'(b) = -\frac{2}{3}b^2 + 2 \qquad A''(b) = -\frac{4}{3}b$$

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}b^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 3 \Leftrightarrow b_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$A''(b) = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } b = \sqrt{3}$$

Fensterbreite $= \underline{\underline{\sqrt{3}\,m \approx 1{,}732\,m}}$

$$h(b) = -\frac{2}{9}b^2 + 2 \Rightarrow h\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{9} \cdot 3 + 2 = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$$

Fensterhöhe $= \underline{\underline{\frac{4}{3}\,m = 1{,}\overline{3}\,m}}$

Fensterfläche $= b \cdot h = \sqrt{3}\,m \cdot \frac{4}{3}\,m = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}\,m^2 \approx \underline{\underline{2{,}309\,m^2}}$

A4 Ausführliche Lösung

b)

$$\text{Restfläche} = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx - \text{Fensterfläche}$$

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{8}{9}x^2 + 2\right)dx = \left[-\frac{8}{27}x^3 + 2x\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{8}{27} \cdot \frac{27}{8} + 2 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{8}{27} \cdot \frac{27}{8} - 2 \cdot \frac{3}{2}\right) = -1 + 3 - 1 + 3 = 6 - 2 = 4$$

Restfläche $= 4\,m^2 - \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}\,m^2 \approx \underline{\underline{1{,}691\,m^2}}$

Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 3.12.08**
SG27D Gruppe B	**NAME: Lösungen**		

1.	Berechnen Sie das Integral $\int_1^2 \left(x^4+8x^3+24x^2+32x+16\right)dx$

A1 Ausführliche Lösung

$$\int_1^2 \left(x^4+8x^3+24x^2+32x+16\right)dx = \frac{1}{5}x^5+2x^4+8x^3+16x^2+16x\,\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 32+2\cdot 16+8\cdot 8+16\cdot 4+16\cdot 2-\left(\frac{1}{5}+2+8+16+16\right)$$

$$=\frac{32}{5}+32+64+64+32-\left(42+\frac{1}{5}\right)=\frac{31}{5}+150=\frac{781}{5}=\underline{\underline{156{,}2}}$$

2.	Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x)=-\frac{5}{4}x^4+3x^2+8$
	Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse, wobei die Nullstellen die Integrationsgrenzen bilden. Wie liegt der Graph in Bezug auf die x- Achse?

A2 Ausführliche Lösung

Nullstellenberechnung

$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}x^4+3x^2+8=0$ Substitution mit $x^2=z$

$$\Rightarrow -\frac{5}{4}z^2+3z+8=0\;\Big|\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow z^2-\frac{12}{5}z-\frac{32}{5}=0 \Rightarrow p=-\frac{12}{5};\; q=-\frac{32}{5}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{32}{5}=\frac{36}{25}+\frac{160}{25}=\frac{196}{25} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{196}{25}}=\frac{14}{5}$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l} z_1=\frac{6}{5}+\frac{14}{5}=\frac{20}{5}=4 \\ z_2=\frac{6}{5}-\frac{14}{5}=-\frac{8}{5}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow z_1=4$ bzw. $z_2=-\frac{8}{5}$ (keine Lösung)

$z_1=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2$ bzw. $x_2=2$ sind die Integrationsgrenzen

A2 Ausführliche Lösung

Flächenberechnung

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{5}{4}x^4+3x^2+8\right)dx = -\frac{x^5}{4}+x^3+8x\,\Big|_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{2^5}{4}+2^3+8\cdot 2-\left[-\frac{(-2)^5}{4}+(-2)^3+8\cdot(-2)\right] = -\frac{32}{4}+8+16-\left[\frac{32}{4}+(-8)-16\right]$$

$$= -8+8+16-(8-8-16) = 16-(-16) = 32$$

Die Fläche: $A = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{5}{4}x^4+3x^2+8\right)dx = 32\,FE$

Da das Ergebnis der Integration positiv ist, liegt der Graph von f oberhalb der x- Achse.

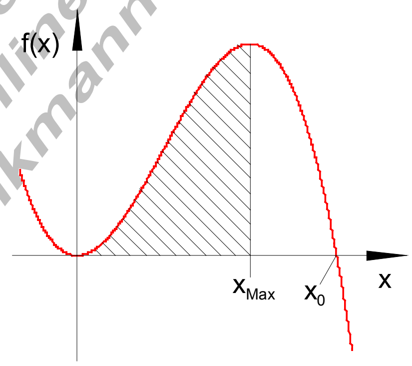
3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2$$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

b) Berechnen Sie die Extrempunkte.

c) Berechnen Sie die gekennzeichnete Fläche.



A3 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2 \qquad f(0)=0 \Rightarrow \text{Schnittpunkt mit der y – Achse}: P_y(0\,|\,0)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{12}x+\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$$

$$\left(-\frac{1}{12}x+\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{12}x=\frac{3}{2}\,|\cdot 12 \Leftrightarrow x_3=18$$

Schnittpunkte mit der x – Achse: $P_{x1/2}(0\,|\,0); P_{x3}(18\,|\,0)$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x \qquad f''(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{4}x + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = 3 | \cdot 4 \Leftrightarrow x_2 = 12$$

$f''(x_1) = f''(0) = 3 > 0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_1 = 0$

$f''(x_2) = f''(12) = -3 < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_2 = 12$

$f(x_1) = f(0) = 0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $\underline{\underline{P_{Min}(0|0)}}$

$f(x_2) = f(12) = -144 + 216 = 72 \Rightarrow$ rel. Max. bei $\underline{\underline{P_{Max}(12|72)}}$

A3 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{42}x^2 \qquad A = \left|\int_0^{12} f(x)\,dx\right|$$

$$\int_0^{12} f(x)\,dx = \int_0^{12}\left(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^{12} = -432 + 864 = 432$$

$\underline{\underline{A = 432\,FE}}$

4. In einer parabelförmigen Giebelwand soll ein rechteckiges Fenster eingelassen werden, das bis zum Boden reicht. Giebelmaße: **B = 4 m, H = 3 m**

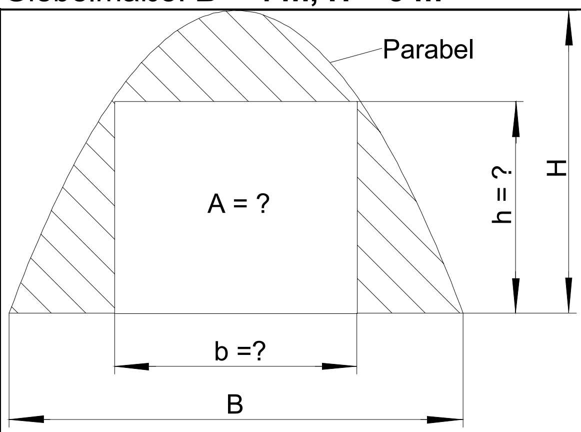
a) Welche Maße muss das Fenster haben (Breite und Höhe), damit die Fensterfläche maximal wird?
Wie groß ist die Fensterfläche?

Zwischenwerte zur Kontrolle :
Funktionsgleichung der Parabel:

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$$

Fensterfläche als Funktion von b:

$$A(b) = -\frac{3}{16}b^3 + 3b$$



b) Die restliche Fläche der Giebelwand soll gestrichen werden.
Wie groß ist diese Fläche?

A4 Ausführliche Lösung

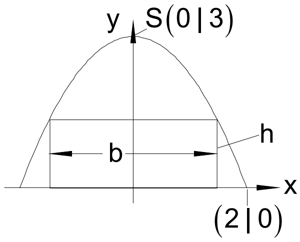
a) $B = 4\,m \qquad H = 3\,m$

Ansatz über die Scheitelpunktform:

$f(x) = a_2 x^2 + 3$

$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 3 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{4}$

Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3}}$



A4 Ausführliche Lösung

a)

$A = b \cdot h \quad h(b) = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{b^2}{4} + 3 = -\frac{3}{16}b^2 + 3$

$A(b) = b \cdot h(b) = b \cdot \left(-\frac{3}{16}b^2 + 2\right) = -\frac{3}{16}b^3 + 3b$

$A'(b) = -\frac{9}{16}b^2 + 3 \qquad A''(b) = -\frac{9}{8}b$

$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{16}b^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{16}b^2 = 3 \Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow b_{1/2} = \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}$

$A''(b) = -\frac{9}{8} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ rel. Max bei $b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Fensterbreite $\underline{\underline{= \frac{4}{3}\sqrt{3}\,m \approx 2{,}309\,m}}$

$h(b) = -\frac{3}{16}b^2 + 3 \Rightarrow h\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{16} \cdot \frac{16}{9} \cdot 3 + 3 = 2$

Fensterhöhe = $\underline{\underline{2\,m}}$

Fensterfläche $= b \cdot h = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,m \cdot 2\,m = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{3}\,m^2 \approx \underline{\underline{4{,}619\,m^2}}$

A4 Ausführliche Lösung

b)

$\text{Restfläche} = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \text{Fensterfläche}$

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{3}{4}x^2 + 3\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^3 + 3x\right]_{-2}^{2}$

$= -\frac{1}{4} \cdot 8 + 3 \cdot 2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 8 - 3 \cdot 2\right) = -2 + 6 - 2 + 6 = 12 - 4 = 8$

$\text{Restfläche} = 8\,m^2 - \frac{8}{3} \cdot \sqrt{3}\,m^2 \approx \underline{\underline{3{,}381\,m^2}}$