Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Mi 15.10.08
SG27D Gruppe A	NAME:		

a) Berechnen Sie die Funktionsgleichung mit dem Gauß – Algorithmus.
Die vorgegebenen Punkte:

$P_1(-1|-4) \quad P_2(3|0) \quad P_3(5|-4) \quad P_4(7|4)$

Die Funktionsgleichung:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Das Gleichungssystem:

$P_1(-1|-4) \Rightarrow f(-1) = -4 \Leftrightarrow -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -4$

$P_2(3|0) \Rightarrow f(3) = 0 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 0$

$P_3(5|-4) \Rightarrow f(5) = -4 \Leftrightarrow 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -4$

$P_4(7|4) \Rightarrow f(7) = 4 \Leftrightarrow 343a_3 + 49a_2 + 7a_1 + 1a_0 = 4$

Der Gauß- Algorithmus:

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−4	
1	3	9	27	0	II − I
1	5	25	125	−4	III − I
1	7	49	343	4	IV − I
1	−1	1	−1	−4	
0	4	8	28	4	: 4
0	6	24	126	0	: 6
0	8	48	344	8	: 8
1	−1	1	−1	−4	
0	1	2	7	1	
0	1	4	21	0	III − II
0	1	6	43	1	IV − II
1	−1	1	−1	−4	
0	1	2	7	1	
0	0	2	14	−1	
0	0	4	36	0	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−4	
0	1	2	7	1	
0	0	2	14	−1	
0	0	0	8	2	

$8a_3 = 2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{4}}$

$2a_2 + 14a_3 = -1$

$\Leftrightarrow 2a_2 + \frac{14}{4} = -1 \,|\, -\frac{14}{4}$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -\frac{4}{4} - \frac{14}{4} \Leftrightarrow 2a_2 = -\frac{18}{4} \,|:2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{9}{4}}$

$a_1 + 2a_2 + 7a_3 = 1$

$\Leftrightarrow a_1 - \frac{18}{4} + \frac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow a_1 - \frac{11}{4} = 1 \,|\, +\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow a_1 = \frac{4}{4} + \frac{11}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_1 = \frac{15}{4}}$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -4$

$\Leftrightarrow a_0 - \frac{15}{4} - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = -4 \Leftrightarrow a_0 - \frac{25}{4} = -4 \,|\, +\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow a_0 = -\frac{16}{4} + \frac{25}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{9}{4}}$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4}}}$$

b) Berechnen Sie die relativen Extrema (Hochpunkt, Tiefpunkt).

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4}\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4}=0\,|\cdot\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$$

$$p=-6\qquad q=5\qquad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-5=4\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{4}=2$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left|\ \begin{array}{l}x_1=3+2=5\\ x_2=3-2=1\end{array}\right.$$ Stellen mit waagerechter Tangente

$$f''(x_1)=f''(5)=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}=\frac{6}{2}=3>0\Rightarrow\text{rel. Min. bei } x_1=5$$

$$f''(x_2)=f''(1)=\frac{3}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{6}{2}=-3<0\Rightarrow\text{rel. Max. bei } x_2=1$$

$$f(x_1)=f(5)=-4\text{ da }P_3(5\,|-4)\qquad\Rightarrow\underline{\underline{P_{Min}(5\,|-4)}}$$

$$f(x_2)=f(1)=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}+\frac{15}{4}+\frac{9}{4}=\frac{16}{4}=4\qquad\Rightarrow\underline{\underline{P_{Max}(1\,|\,4)}}$$

c) Berechnen Sie den Wendepunkt.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0\,|+\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}x=\frac{9}{2}\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=3\text{ ist mögliche Wendestelle } x_w$$

$$f'''(x_w)=f'''(3)=\frac{3}{2}\neq 0\Rightarrow x_w=3\text{ ist Wendestelle}$$

$$f(x_w)=f(3)=0\text{ da }P_2(3\,|\,0)\Rightarrow\underline{\underline{P_w(3\,|\,0)}}$$

d) Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente.

$$t(x)=f'(x_w)(x-x_w)+f(x_w)\ \text{ mit } x_w=3$$

$$f'(x_w)=f'(3)=\frac{27}{4}-\frac{54}{4}+\frac{15}{4}=-\frac{12}{4}=-3\qquad f(x_w)=f(3)=0$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x-3)+0\Leftrightarrow\underline{\underline{t(x)=-3x+9}}$$

e) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}$$

$$f(0)=\frac{9}{4}\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,|\,\frac{9}{4}\right)}}$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}=0$$

$P_w(3\,|\,0)\Rightarrow x_1=3$ ist bereits als Nullstelle bekannt $\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3\,|\,0)}}$

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{15}{4} & \frac{9}{4} & \\ x=3 & \downarrow & +\frac{3}{4} & -\frac{18}{4} & -\frac{9}{4} & \Rightarrow \text{Restpolynom } \frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}=0\,|\cdot 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & -\frac{6}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-3=0$$

$$p=-6 \qquad q=-3 \qquad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9+3=12\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{12}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l} x_2=3+\sqrt{12}\approx 6{,}46\Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(3+\sqrt{12}\approx 6{,}46\,|\,0\right)}} \\ x_3=3-\sqrt{12}\approx -0{,}46\Rightarrow \underline{\underline{P_{x3}\left(3-\sqrt{12}\approx -0{,}46\,|\,0\right)}} \end{array}\right.$$

f) Berechnen Sie die Funktionswerte für $x=2\,;\,4\,;\,6$
und stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf.
Genauigkeit in der Wertetabelle, zwei Stellen hinter dem Komma.

$$f(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-\frac{9}{4}\cdot 4+\frac{15}{4}\cdot 2+\frac{9}{4}=\frac{8}{4}-\frac{36}{4}+\frac{30}{4}+\frac{9}{4}=\frac{11}{4}=2{,}75$$

$$f(4)=\frac{1}{4}\cdot 64-\frac{9}{4}\cdot 16+\frac{15}{4}\cdot 4+\frac{9}{4}=\frac{64}{4}-\frac{144}{4}+\frac{60}{4}+\frac{9}{4}=-\frac{11}{4}=-2{,}75$$

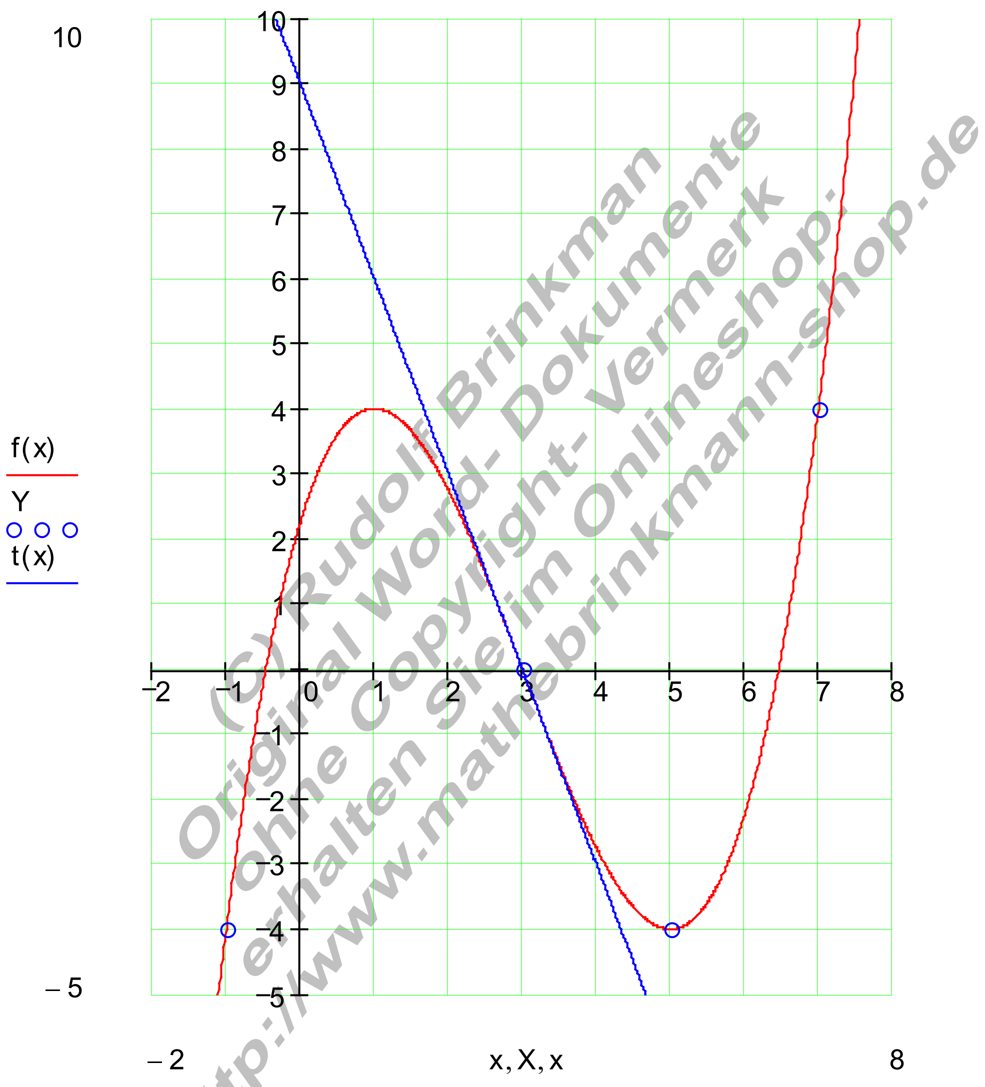
$$f(6)=\frac{1}{4}\cdot 216-\frac{9}{4}\cdot 36+\frac{15}{4}\cdot 6+\frac{9}{4}=\frac{216}{4}-\frac{324}{4}+\frac{90}{4}+\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}=-2{,}25$$

$P_1(-1\,|-4)$ $\quad P_2(3\,|\,0)=P_{x1}=P_w$ $\quad P_3(5\,|-4)=P_{Min}$ $\quad P_4(7\,|\,4)$ $\quad P_{Max}(1\,|\,4)$

$P_y(0\,|\,2{,}25)$ $\quad P_{x2}(6{,}46\,|\,0)$ $\quad P_{x3}(-0{,}46\,|\,0)$

x	–1	–0,46	0	1	2	3	4	5	6	6,46	7
f(x)	–4	0	2,25	4	2,75	0	–2,75	–4	–2,25	0	4

g) Zeichnen Sie möglichst genau den Graphen und die Wendetangente in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. (Extrempunkte, Wendepunkt und Achsenschnittpunkte).
Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.



h) Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für Rechts- bzw. Linkskrümmung an.

Rechtskrümmung: $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 3\}_{\mathbb{R}}$

Linkskrümmung: $I_2 = \{x \mid 3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

i) Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie die Fläche dieses Dreiecks.

$t(x) = -3x + 9 \Rightarrow y-$Abschnitt 9 Einheiten

$t(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x-$Abschnitt 3 Einheiten

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 9}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5 \Leftrightarrow \underline{\underline{A = 13{,}5\ \text{FE}}}$$

Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Mi 15.10.08
SG27D Gruppe B	NAME:		

a) Berechnen Sie die Funktionsgleichung mit dem Gauß – Algorithmus.

Die vorgegebenen Punkte:

$P_1(-1|4) \quad P_2(3|0) \quad P_3(5|4) \quad P_4(7|-4)$

Die Funktionsgleichung:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Das Gleichungssystem:

$P_1(-1|4) \Rightarrow f(-1) = 4 \Leftrightarrow -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 4$

$P_2(3|0) \Rightarrow f(3) = 0 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 0$

$P_3(5|4) \Rightarrow f(5) = 4 \Leftrightarrow 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 4$

$P_4(7|-4) \Rightarrow f(7) = -4 \Leftrightarrow 343a_3 + 49a_2 + 7a_1 + 1a_0 = -4$

Der Gauß- Algorithmus:

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	4	
1	3	9	27	0	II − I
1	5	25	125	4	III − I
1	7	49	343	−4	IV − I
1	−1	1	−1	4	
0	4	8	28	−4	: 4
0	6	24	126	0	: 6
0	8	48	344	−8	: 8
1	−1	1	−1	4	
0	1	2	7	−1	
0	1	4	21	0	III − II
0	1	6	43	−1	IV − II
1	−1	1	−1	4	
0	1	2	7	−1	
0	0	2	14	1	
0	0	4	36	0	IV − 2·III
1	−1	1	−1	4	
0	1	2	7	−1	
0	0	2	14	1	
0	0	0	8	−2	

$8a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$

$2a_2 + 14a_3 = 1$

$\Leftrightarrow 2a_2 - \frac{14}{4} = 1 \,|+\frac{14}{4}$

$\Leftrightarrow 2a_2 = \frac{4}{4} + \frac{14}{4} \Leftrightarrow 2a_2 = \frac{18}{4} \,|:2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{9}{4}}$

$a_1 + 2a_2 + 7a_3 = -1$

$\Leftrightarrow a_1 + \frac{18}{4} - \frac{7}{4} = -1 \Leftrightarrow a_1 + \frac{11}{4} = -1 \,|-\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow a_1 = -\frac{4}{4} - \frac{11}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -\frac{15}{4}}$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 4$

$\Leftrightarrow a_0 + \frac{15}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = 4 \Leftrightarrow a_0 + \frac{25}{4} = 4 \,|-\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow a_0 = \frac{16}{4} - \frac{25}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -\frac{9}{4}}$

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{9}{4}}}$$

b) Berechnen Sie die relativen Extrema (Hochpunkt, Tiefpunkt).

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{15}{4}x-\frac{9}{4}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{15}{4}\Rightarrow f''(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{15}{4}=0\,|\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$$

$$p=-6\qquad q=5\qquad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-5=4\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{4}=2$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l}x_1=3+2=5\\ x_2=3-2=1\end{array}\right.$$ Stellen mit waagerechter Tangente

$$f''(x_1)=f''(5)=-\frac{15}{2}+\frac{9}{2}=-\frac{6}{2}=-3<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=5$$

$$f''(x_2)=f''(1)=-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=\frac{6}{2}=3>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=1$$

$$f(x_1)=f(5)=4 \text{ da } P_3(5\,|\,4)\qquad\Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}(5\,|\,4)}}$$

$$f(x_2)=f(1)=-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}-\frac{15}{4}-\frac{9}{4}=-\frac{16}{4}=-4\qquad\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(1\,|\,-4)}}$$

c) Berechnen Sie den Wendepunkt.

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{15}{4}x-\frac{9}{4}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\Rightarrow f'''(x)=-\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=0\,|-\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x=-\frac{9}{2}\,|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ist mögliche Wendestelle } x_w$$

$$f'''(x_w)=f'''(3)=-\frac{3}{2}\neq 0\Rightarrow x_w=3 \text{ ist Wendestelle}$$

$$f(x_w)=f(3)=0 \text{ da } P_2(3\,|\,0)\Rightarrow \underline{\underline{P_w(3\,|\,0)}}$$

d) Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente.

$$t(x)=f'(x_w)(x-x_w)+f(x_w)\ \text{ mit } x_w=3$$

$$f'(x_w)=f'(3)=-\frac{27}{4}+\frac{54}{4}-\frac{15}{4}=\frac{12}{4}=3\qquad f(x_w)=f(3)=0$$

$$\Rightarrow t(x)=3(x-3)+0\Leftrightarrow \underline{\underline{t(x)=3x-9}}$$

e) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{9}{4}$$

$$f(0) = -\frac{9}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid -\frac{9}{4}\right)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{9}{4} = 0$$

$P_w(3 \mid 0) \Rightarrow x_1 = 3$ ist bereits als Nullstelle bekannt $\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3 \mid 0)}}$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{15}{4} & -\frac{9}{4} \\
x = 3 & \downarrow & -\frac{3}{4} & +\frac{18}{4} & +\frac{9}{4} \\
\hline
 & -\frac{1}{4} & \frac{6}{4} & \frac{3}{4} & 0
\end{array} \Rightarrow \text{Restpolynom } -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \mid \cdot(-4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$p = -6 \qquad q = -3 \qquad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 + 3 = 12 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{12}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 + \sqrt{12} \approx 6{,}46 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(3 + \sqrt{12} \approx 6{,}46 \mid 0\right)}} \\ x_3 = 3 - \sqrt{12} \approx -0{,}46 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x3}\left(3 - \sqrt{12} \approx -0{,}46 \mid 0\right)}} \end{array} \right.$$

f) Berechnen Sie die Funktionswerte für $x = 2 ; 4 ; 6$
und stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf.
Genauigkeit in der Wertetabelle, zwei Stellen hinter dem Komma.

$$f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{9}{4} \cdot 4 - \frac{15}{4} \cdot 2 - \frac{9}{4} = -\frac{8}{4} + \frac{36}{4} - \frac{30}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{11}{4} = -2{,}75$$

$$f(4) = -\frac{1}{4} \cdot 64 + \frac{9}{4} \cdot 16 - \frac{15}{4} \cdot 4 - \frac{9}{4} = -\frac{64}{4} + \frac{144}{4} - \frac{60}{4} - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} = 2{,}75$$

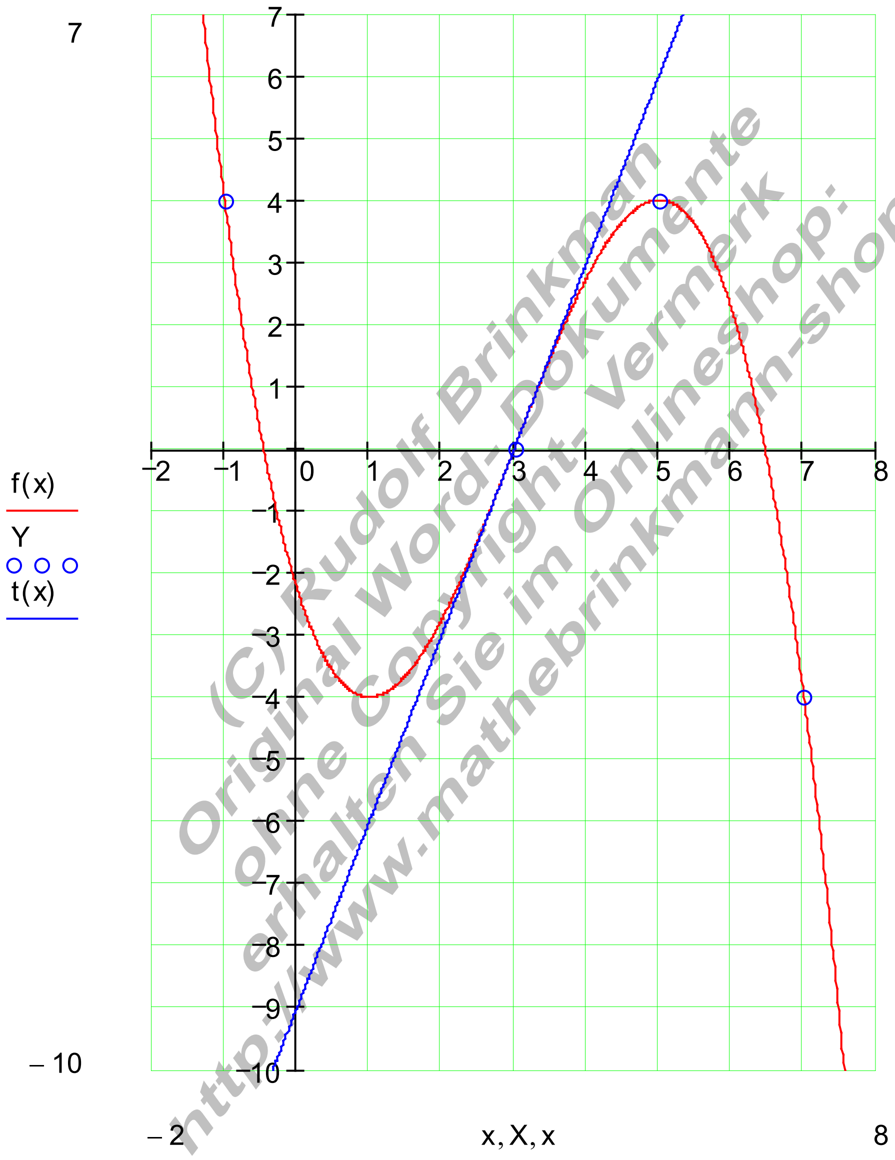
$$f(6) = -\frac{1}{4} \cdot 216 + \frac{9}{4} \cdot 36 - \frac{15}{4} \cdot 6 - \frac{9}{4} = -\frac{216}{4} + \frac{324}{4} - \frac{90}{4} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$P_1(-1 \mid 4) \qquad P_2(3 \mid 0) = P_{x1} = P_w \qquad P_3(5 \mid 4) = P_{Max} \qquad P_4(7 \mid -4) \qquad P_{Min}(1 \mid -4)$

$P_y(0 \mid -2{,}25) \qquad P_{x2}(6{,}46 \mid 0) \qquad P_{x3}(-0{,}46 \mid 0)$

x	–1	–0,46	0	1	2	3	4	5	6	6,46	7
f(x)	4	0	–2,25	–4	–2,75	0	2,75	4	2,25	0	–4

g) Zeichnen Sie möglichst genau den Graphen und die Wendetangente in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. (Extrempunkte, Wendepunkt und Achsenschnittpunkte). Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.)



h) Bestimmen Sie die Randpunkte des Definitionsbereiches.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{9}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{-\frac{1}{4}x^3}_{\to\infty}\left(1 - 9\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + 15\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + 9\cdot\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}\right)\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\underbrace{-\frac{1}{4}x^3}_{\to-\infty}\left(1 - 9\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + 15\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + 9\cdot\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}\right)\right] = -\infty$$

i) Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Berechnen Sie die Fläche dieses Dreiecks.

$t(x) = 3x - 9 \Rightarrow y - \text{Abschnitt } 9 \text{ Einheiten}$

$t(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x - \text{Abschnitt } 3 \text{ Einheiten}$

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 9}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5 \Leftrightarrow \underline{\underline{A = 13{,}5 \text{ FE}}}$$