Klassenarbeit (für Nachschreiber) Mathematik Bearbeitungszeit 90 min.
SG27D Gruppe A NAME:

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Wissensfragen.

   a) Woran erkennt man Punktsymmetrie bei einer ganzrationalen Funktion? Notieren Sie dazu eine Beispielfunktion.
   b) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen?
   c) Wie lautet der Satz vom Nullprodukt?

Zu 1 a)
Punktsymmetrie liegt vor, wenn es in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten gibt.

Beispiel: $f(x) = x^3 + x$

Zu 1 b)
Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion hängt von ihrem Grad ab.
Grad gerade: f(x) hat höchstens n Nullstellen
Grad ungerade: f(x) hat mind. eine aber höchstens n Nullstellen.

Zu 1 c)
Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

2. Gegeben sind die Punkte $P_1(-3\,|\,-8)$; $P_2(-1\,|\,8)$; $P_3(3\,|\,-8)$; $P_4(5\,|\,8)$
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
   b) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
   (Finden Sie eine Nullstelle über das Horner-Schema)
   c) Bestimmen Sie zusätzlich die Funktionswerte für f(-2) , f(2) und f(4) und tragen Sie alle bekannten Wertepaare in eine Wertetabelle ein.
   d) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

Kontrollergebnis: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{11}{2}$

Zu 2 a)

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-3\,|\,-8) \Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -8$$

$$P_1(-1\,|\,8) \quad \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 8$$

$$P_1(3\,|\,-8) \quad \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -8$$

$$P_1(5\,|\,8) \quad \Rightarrow f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−3	9	−27	−8	
1	−1	1	−1	8	II − I
1	3	9	27	−8	II − I
1	5	25	125	8	II − I
1	−3	9	−27	−8	
0	2	−8	26	16	|: 2
0	6	0	54	0	|: 6
0	8	16	152	16	|: 8
1	−3	9	−27	−8	
0	1	−4	13	8	
0	1	0	9	0	III − II
0	1	2	19	2	IV − II
1	−3	9	−27	−8	
0	1	−4	13	8	
0	0	4	−4	−8	|: 4
0	0	6	6	−6	|: 6
1	−3	9	−27	−8	
0	1	−4	13	8	
0	0	1	−1	−2	
0	0	1	1	−1	IV − III
1	−3	9	−27	−8	
0	1	−4	13	8	
0	0	1	−1	−2	
0	0	0	2	1	

$$2a_3 = 1 \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$

$$a_2 - a_3 = -2$$

$$\Leftrightarrow a_2 - \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} \,\Big|+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$a_1 - 4a_2 + 13a_3 = 8$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 6 + \frac{13}{2} = 8 \,\Big|-6-\frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -\frac{9}{2}}$$

$$a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = -8$$

$$\Leftrightarrow a_0 + \frac{27}{2} - \frac{27}{2} - \frac{27}{2} = -\frac{16}{2} \,\Big|+\frac{27}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{11}{2}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{11}{2}}}$$

Zu 2 b)

Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}$

$P_y: f(0)=\frac{11}{2} \Rightarrow \boxed{P_y\left(0\,|\,\frac{11}{2}\right)}$

Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}=0$

$$\begin{array}{lccccl}
 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \\
x=1 \quad \downarrow & & \underline{\frac{1}{2}} & \underline{-\frac{2}{2}} & \underline{-\frac{11}{2}} & \Rightarrow \boxed{x_1=1} \\
 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{11}{2} & 0 & =f(1)
\end{array}$$

Restpolynom: $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{11}{2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-11=0$

$p=-2; q=-11 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+11=12 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{12}$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1=1+\sqrt{12}\approx 4{,}46 \\ x_2=1-\sqrt{12}\approx -2{,}46 \end{array}\right.$$

$$\boxed{P_{x1}(1\,|\,0); P_{x2}\left(1+\sqrt{12}\approx 4{,}46\,|\,0\right); P_{x3}\left(1-\sqrt{12}\approx -2{,}46\,|\,0\right)}$$

Zu 2 c)

$f(-2)=-4-6+9+\frac{11}{2}=4{,}5$

$f(2)=4-6-9+\frac{11}{2}=-5{,}5$

$f(4)=32-24-18+\frac{11}{2}=-4{,}5$

	P_1	P_{x3}		P_2/P_{max}	P_y	P_{x1}		P_3/P_{min}		P_{x2}	P_4
x	−3	−2,46	−2	−1	0	1	2	3	4	4,46	5
f(x)	−8	0	4,5	8	5,5	0	−5,5	−8	−4,5	0	8

Zu 2 d)

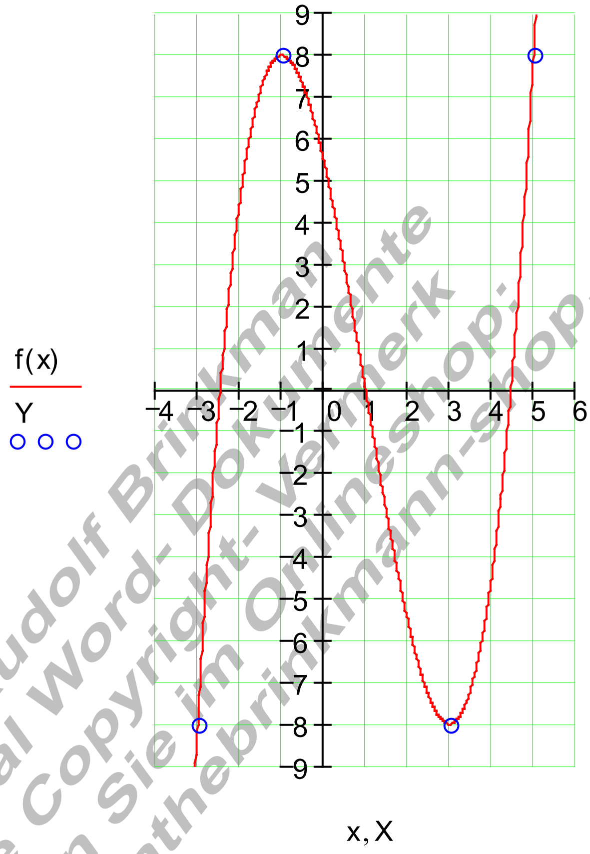
Probe:

$f(x_1) = -8$

$f(x_2) = 8$

$f(x_3) = -8$

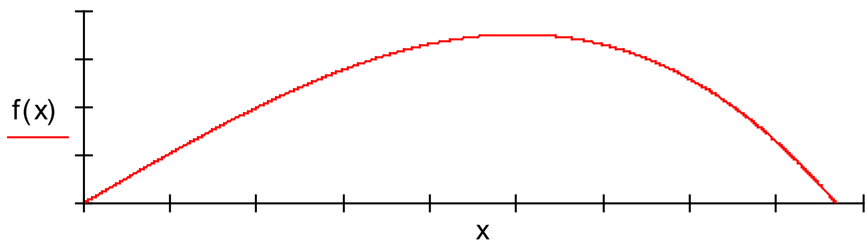
$f(x_4) = 8$



3. Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x \qquad \text{für } x > 0$$

Maßstab: Eine Einheit in x – Richtung bedeutet 10 m
Eine Einheit in y – Richtung bedeutet 1m



a) In einer Entfernung von 50 m vom Abwurfpunkt erreicht der Speer seine maximale Höhe. Wie groß ist diese? (Achten Sie auf den Maßstab!)
b) Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?

Zu 3a)

$$50\,\text{m} \hat{=} x = 5 \Rightarrow y_{Max} = f(5) = -\frac{7}{250}\cdot 5^3 + \frac{21}{10}\cdot 5 = -\frac{7}{250}\cdot 125 + \frac{21}{10}\cdot 5 = -\frac{7}{2} + \frac{21}{2} = 7$$

In einer Entfernung von 50 m vom Abwurfpunkt erreicht der Speer seine maximale Höhe von 7 m.

Zu 3 b)

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle

$$-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{75} \approx \pm 8{,}66$$

nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt

$x = 8{,}66$ bedeutet 86,6 m

Der Speer kommt 86,6 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.

Viel Erfolg !!

Klassenarbeit (für Nachschreiber) Mathematik Bearbeitungszeit 90 min.
SG27D Gruppe B NAME:

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Wissensfragen.

   a) Woran erkennt man Achsensymmetrie bei einer ganzrationalen Funktion? Notieren Sie dazu eine Beispielfunktion.
   b) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen?
   c) Wie lautet der Satz vom Nullprodukt?

Zu 1 a)
Achsensymmetrie liegt vor, wenn es in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten gibt.

Beispiel: $f(x) = x^4 + x^2 + 2$

Zu 1 b)
Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion hängt von ihrem Grad ab.
Grad gerade: f(x) hat höchstens n Nullstellen
Grad ungerade: f(x) hat mind. eine aber höchstens n Nullstellen.

Zu 1 c)
Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

2. Gegeben sind die Punkte $P_1(-3 \mid 8)$; $P_2(-1 \mid -8)$; $P_3(3 \mid 8)$; $P_4(5 \mid -8)$
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
   b) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
   (Finden Sie eine Nullstelle über das Horner-Schema)
   c) Bestimmen Sie zusätzlich die Funktionswerte für f(-2) , f(2) und f(4) und tragen Sie alle bekannten Wertepaare in eine Wertetabelle ein.
   d) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

   Kontrollergebnis: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2}$

Zu 2 a)

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-3\,|\,8) \Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 8$$

$$P_1(-1\,|\,-8) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -8$$

$$P_1(3\,|\,8) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 8$$

$$P_1(5\,|\,-8) \Rightarrow f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−3	9	−27	8	
1	−1	1	−1	−8	II − I
1	3	9	27	8	II − I
1	5	25	125	−8	II − I
1	−3	9	−27	8	
0	2	−8	26	−16	$\vert :2$
0	6	0	54	0	$\vert :6$
0	8	16	152	−16	$\vert :8$
1	−3	9	−27	8	
0	1	−4	13	−8	
0	1	0	9	0	III − II
0	1	2	19	−2	IV − II
1	−3	9	−27	8	
0	1	−4	13	−8	
0	0	4	−4	8	$\vert :4$
0	0	6	6	6	$\vert :6$
1	−3	9	−27	8	
0	1	−4	13	−8	
0	0	1	−1	2	
0	0	1	1	1	IV − III
1	−3	9	−27	8	
0	1	−4	13	−8	
0	0	1	−1	2	
0	0	0	2	−1	

$$2a_3 = -1 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{2}}$$

$$a_2 - a_3 = 2$$

$$\Leftrightarrow a_2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} \,\Big|\, -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$a_1 - 4a_2 + 13a_3 = -8$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 6 - \frac{13}{2} = -8 \,\Big|\, +6 + \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = \frac{9}{2}}$$

$$a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = 8$$

$$\Leftrightarrow a_0 - \frac{27}{2} + \frac{27}{2} + \frac{27}{2} = \frac{16}{2} \,\Big|\, -\frac{27}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = -\frac{11}{2}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2}}}$$

Zu 2 b)

Achsenschnittpunkte von $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{11}{2}$

$P_y: f(0)=-\frac{11}{2} \Rightarrow \boxed{P_y\left(0\,|-\frac{11}{2}\right)}$

Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{11}{2}=0$

$$\begin{array}{lccccl}
 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{11}{2} & \\
x=1 \quad \downarrow & & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{11}{2} & \Rightarrow \boxed{x_1=1} \\
\hline
 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{11}{2} & 0 & =f(1)
\end{array}$$

Restpolynom: $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-11=0$

$p=-2; q=-11 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+11=12 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{12}$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=1+\sqrt{12}\approx 4{,}46 \\ x_2=1-\sqrt{12}\approx -2{,}46 \end{array} \right.$$

$$\boxed{P_{x1}(1\,|\,0); P_{x2}\left(1+\sqrt{12}\approx 4{,}46\,|\,0\right); P_{x3}\left(1-\sqrt{12}\approx -2{,}46\,|\,0\right)}$$

Zu 2 c)

$f(-2)=4+6-9-\frac{11}{2}=-4{,}5$

$f(2)=-4+6+9-\frac{11}{2}=5{,}5$

$f(4)=-32+24+18-\frac{11}{2}=4{,}5$

	P_1	P_{x3}			P_y	P_{x1}		P_3		P_{x2}	P_4
x	-3	$-2{,}46$	-2	-1	0	1	2	3	4	$4{,}46$	5
$f(x)$	8	0	$-4{,}5$	-8	$-5{,}5$	0	$5{,}5$	8	$4{,}5$	0	-8

Zu 2 d)

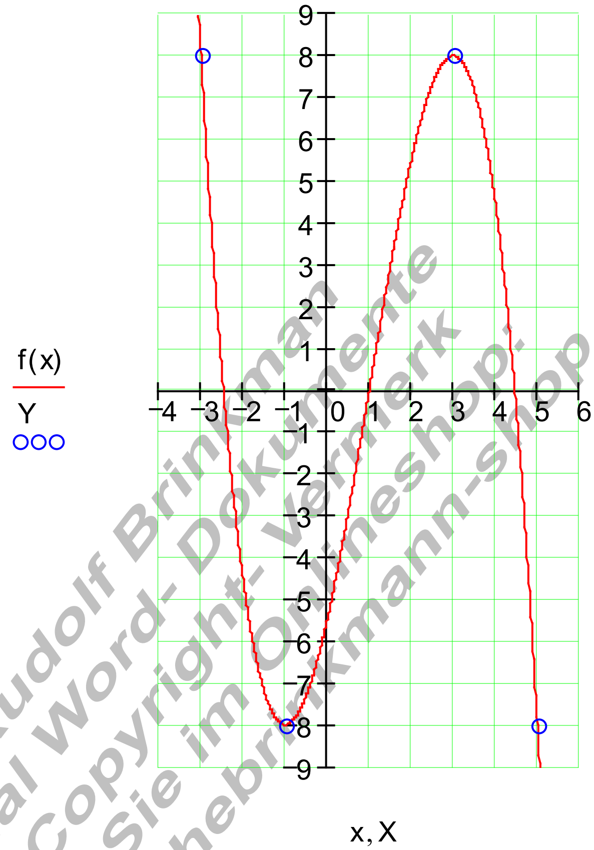
Probe:

$f(x_1) = 8$

$f(x_2) = -8$

$f(x_3) = 8$

$f(x_4) = -8$

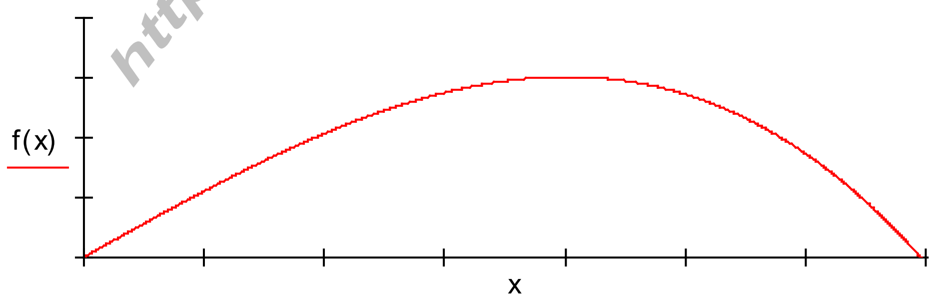


3. Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf

$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x$ für $x > 0$

Maßstab: Eine Einheit in x – Richtung bedeutet 10 m

Eine Einheit in y – Richtung bedeutet 1m



a) In einer Entfernung von 40 m vom Abwurfpunkt erreicht der Speer seine maximale Höhe. Wie groß ist diese? (Achten Sie auf den Maßstab!)

b) Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?

Zu 3a)

$$40\,\text{m} \mathrel{\hat{=}} x = 4 \Rightarrow y_{Max} = f(4) = -\frac{3}{64}\cdot 4^3 + \frac{9}{4}\cdot 4 = -\frac{3}{64}\cdot 64 + \frac{9}{4}\cdot 4 = -3 + 9 = 6$$

In einer Entfernung von 40 m vom Abwurfpunkt erreicht der Speer seine maximale Höhe von 6 m.

Zu 3 b)

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle

$$-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{48} \approx \pm 6,93$$

nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt

$x = 6,93$ bedeutet 69,3 m

Der Speer kommt 69,3 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.

Viel Erfolg !!