Klassenarbeit Mathematik Bearbeitungszeit 90 min. Di 11.12.07
SG 27D Gruppe A NAME:

1. Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen:

a) $-\frac{1}{2}x^2+3x-4=0$

b) $\frac{1}{3}x^2=\frac{3}{36}$

c) $\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{25}=0$

d) $(4x+1)(2x-7)=0$

Lösung Aufgabe A1

a)

$$-\frac{1}{2}x^2+3x-4=0\,|\cdot(-2)$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \text{ (Normalform)}$$
$$\Rightarrow p=-6\,;\,q=8$$
$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$
$$\Leftrightarrow D=(-3)^2-8$$
$$\Leftrightarrow D=9-8$$
$$\Leftrightarrow D=1$$
$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{1}$$
$$\Rightarrow \sqrt{D}=1$$
$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\Big|\; x_1=3+1=4;\; x_2=3-1=2 \Rightarrow L=\{2;4\}$$

Lösung Aufgabe A1

b)

$$\frac{1}{3}x^2=\frac{3}{36}\,|\cdot 3$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{9}{36}\,|\sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow |x|=\frac{3}{6}$$
$$\Leftrightarrow |x|=\frac{1}{2}$$

Fall I: $x>0$

$$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}$$

Fall II: $x<0$

$$\Rightarrow -x=\frac{1}{2}\,|\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow x_2=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$$

Lösung Aufgabe A1

c)

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{25}=0\,|+\frac{8}{25}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=\frac{8}{25}\,|\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{16}{25}\,|\sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow |x|=\frac{4}{5}$$

Fall I: $x>0$

$$\Rightarrow x_1=\frac{4}{5}$$

Fall II: $x<0$

$$\Rightarrow -x=\frac{4}{5}\,|\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow x_2=-\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow L=\left\{-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right\}$$

Lösung Aufgabe A1

d) $(4x+1)(2x-7)=0$ Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$4x+1=0\,|-1$$
$$\Leftrightarrow 4x=-1\,|:4$$
$$\Leftrightarrow x=x_1=-\frac{1}{4}=-0{,}25$$

$$2x-7=0\,|+7$$
$$\Leftrightarrow 2x=7\,|:2$$
$$\Leftrightarrow x=x_2=\frac{7}{2}=3{,}5$$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
b) Berechnen Sie den Scheitelpunkt und stellen Sie die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform dar.
c) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
d) Beschreiben Sie schrittweise, wie f(x) aus der Normalparabel entsteht.
e) Verschieben Sie den Graphen von f(x) so, dass der verschobene Graph g(x) die x – Achse berührt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g(x) und zeichnen Sie den Graphen in das Koordinatensystem von c).

Lösung Aufgabe A2

a) Die Achsenschnittpunkte von: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$

Schnittpunkt mit der y – Achse:

$$f(0)=-\frac{5}{2}\Rightarrow P_y\left(0\,\middle|\,-\frac{5}{2}\right)$$

Schnittpunkte mit der x – Achse (Nullstellen):

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}=0\,|\cdot 2\Leftrightarrow x^2-4x-5=0$$

$$\Rightarrow p=-4\,;\,q=-5$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=(-2)^2+5=4+5=9\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{9}=3$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left|\begin{array}{l}x_1=2+3=5\\x_2=2-3=-1\end{array}\right.\Rightarrow\begin{array}{l}P_{x1}(5\,|\,0)\\P_{x2}(-1\,|\,0)\end{array}$$

Lösung Aufgabe A2

b) Scheitelpunktbestimmung:

1. Verfahren über die Nullstellen:

$$\left.\begin{array}{l}x_s=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5+(-1)}{2}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2\\y_s=f(x_s)=f(2)=\frac{1}{2}\cdot 4-2\cdot 2-\frac{5}{2}=-\frac{9}{2}\end{array}\right.\Rightarrow S\left(2\,\middle|\,-\frac{9}{2}\right)$$

Funktionsgleichung:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{9}{2}$$

Scheitelpunktbestimmung: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$

2. Verfahren durch quadratische Ergänzung:

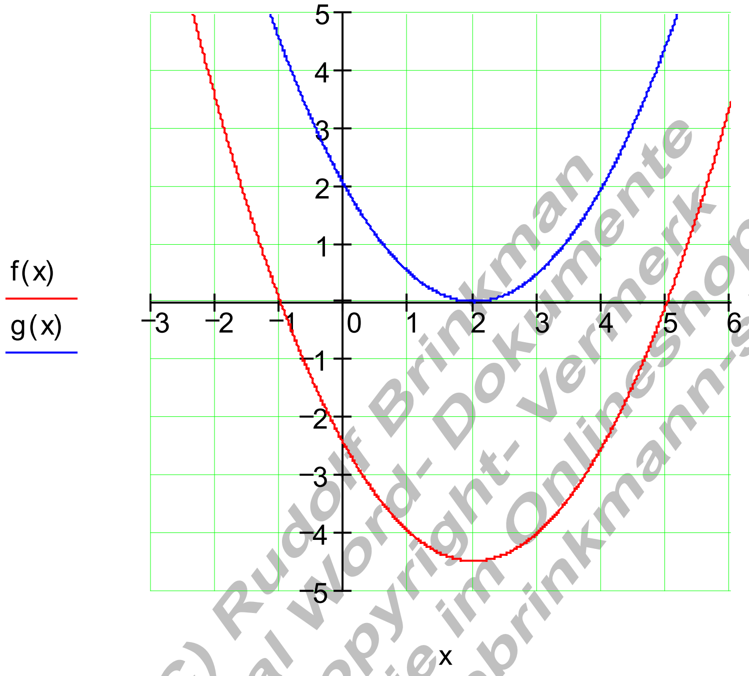
$$f(x)=\frac{1}{2}\left[x^2-4x-5\right]=\frac{1}{2}\left[\underbrace{x^2-4x+2^2}_{\text{2. binomische Formel}}-2^2-5\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-2)^2-9\right]=\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{9}{2}$$

Lösung Aufgabe A2

c)

$$f(x) := \frac{1}{2}\cdot(x-2)^2 - \frac{9}{2} \qquad g(x) := \frac{1}{2}\cdot(x-2)^2$$



Lösung Aufgabe A2

d) $f(x)$ entsteht aus der Normalparabel durch folgende Umformungen:

Stauchung mit dem Formfaktor $\frac{1}{2}$: $\quad x^2 \mapsto \frac{1}{2}x^2$

Verschiebung um $\frac{9}{2}$ LE nach unten $\frac{1}{2}x^2 \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}$

Verschiebung um 2 LE nach rechts $\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2} \mapsto \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{9}{2} = f(x)$

Lösung Aufgabe A2

e) Wird der Graph von $f(x)$ um $\frac{9}{2}$ LE nach oben verschoben,

so schieben sich beide Nullstellen zu einer doppelten Nullstelle,

dem Berührungspunkt $P_{x_{1/2}}(2\,|\,0)$ zusammen.

Die Funktionsgleichung für $g(x)$ lautet:

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

3. Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = a_2x^2 + x - 2$

Für welche Werte von a_2 hat

a) Der Graph von f(x) eine (doppelte) Nullstelle?

b) Der Graph von f(x) zwei Nullstellen?

c) Der Graph von f(x) keine Nullstelle?

Begründen Sie jedes Ergebnis durch eine entsprechende Rechnung.

Lösung Aufgabe A3

Berechnung der Diskriminante:

$$f(x) = a_2x^2 + x - 2$$
$$f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow a_2x^2 + x - 2 = 0 \mid : a_2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{a_2}x - \frac{2}{a_2} = 0$$
$$\Rightarrow p = \frac{1}{a_2}; q = -\frac{2}{a_2}$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$
$$\Leftrightarrow D = \left(\frac{1}{2a_2}\right)^2 + \frac{2}{a_2}$$
$$\Leftrightarrow D = \frac{1}{4a_2^2} + \frac{2}{a_2}$$

Lösung Aufgabe A3

a) Doppelte Nullstelle falls D = 0:

$$D = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} + \frac{2}{a_2} = 0 \mid -\frac{2}{a_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} = -\frac{2}{a_2} \mid \cdot a_2^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = -2a_2 \mid \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8} = a_2$$
$$\Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{8}$$

Lösung Aufgabe A3

b) Zwei Nullstellen falls D > 0:

$$D > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} + \frac{2}{a_2} > 0 \mid -\frac{2}{a_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} > -\frac{2}{a_2} \mid \cdot a_2^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} > -2a_2 \mid \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8} < a_2$$
$$\Leftrightarrow a_2 > -\frac{1}{8}$$

Lösung Aufgabe A3

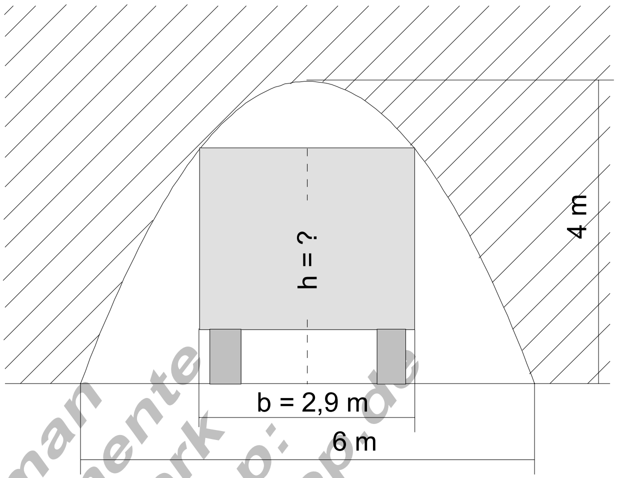
c) Keine Nullstelle falls D < 0:

$$D < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} + \frac{2}{a_2} < 0 \mid -\frac{2}{a_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} < -\frac{2}{a_2} \mid \cdot a_2^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < -2a_2 \mid \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8} > a_2$$
$$\Leftrightarrow a_2 < -\frac{1}{8}$$

4. Eine Toreinfahrt ist 6 m breit und 4 m hoch.
   Sie hat die Form einer Parabel.

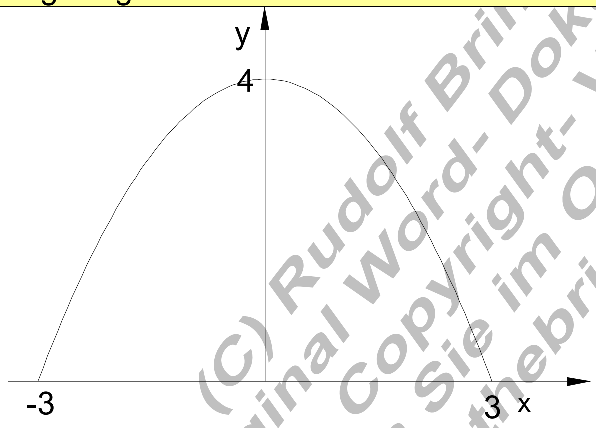
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung indem Sie die y – Achse als Symmetrieachse wählen.

   b) Ein LKW ist 2,90 m breit. Welche Höhe darf er maximal haben, damit er mittig durch die Toreinfahrt passt?



Lösung Aufgabe A4

a)



Aus nebenstehender Zeichnung wird die Funktionsgleichung bestimmt:

$f(x) = a_2x^2 + 4$ (Scheitelpunktform)

$f(3) = 0 \Leftrightarrow a_2 \cdot 9 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow a_2 = -\frac{4}{9} \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4$

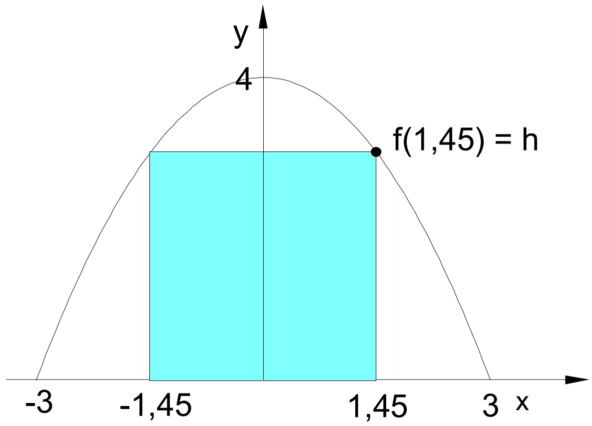
Lösung Aufgabe A4

b) Der Lkw ist 2,90 m breit.
Zu berechnen ist die Höhe für den x – Wert 1,45 (halbe Breite).

$f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4$

$f(1{,}45) = -\frac{4}{9}(1{,}45)^2 + 4 \approx \underline{\underline{3{,}066}}$

Der Lkw darf eine maximale Höhe von 3,066 m haben, damit er gerade noch durch die Toreinfahrt passt.



Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Di 11.12.07
SG 27D Gruppe B	NAME:		

1. Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen:

a) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$

b) $\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{9}$

c) $2x^2 - \frac{18}{16} = 0$

d) $(2x+7)(4x-1) = 0$

Lösung Aufgabe B1

a)
$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \text{ (Normalform)}$$
$$\Rightarrow p = -6\,;\, q = 8$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$
$$\Leftrightarrow D = (-3)^2 - 8$$
$$\Leftrightarrow D = 9 - 8$$
$$\Leftrightarrow D = 1$$
$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1}$$
$$\Rightarrow \sqrt{D} = 1$$
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{array}{|l} x_1 = 3 + 1 = 4 \\ x_2 = 3 - 1 = 2 \end{array} \Rightarrow L = \{2\,;\,4\}$$

Lösung Aufgabe B1

b)
$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{9} \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{9} \mid \sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |x| = \frac{2}{3}$$

Fall I: $x > 0$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$$
Fall II: $x < 0$
$$\Rightarrow -x = \frac{2}{3} \mid \cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow L = \left\{-\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right\}$$

Lösung Aufgabe B1

c)
$$2x^2 - \frac{18}{16} = 0 \mid + \frac{18}{16}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = \frac{18}{16} \mid : 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{16} \mid \sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |x| = \frac{3}{4}$$

Fall I: $x > 0$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{4}$$
Fall II: $x < 0$
$$\Rightarrow -x = \frac{3}{4} \mid \cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{4}\,;\,\frac{3}{4}\right\}$$

Lösung Aufgabe B1

d) $(2x+7)(4x-1) = 0$ Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$2x + 7 = 0 \mid -7$$
$$\Leftrightarrow 2x = -7 \mid : 2$$
$$\Leftrightarrow x = x_2 = -\frac{7}{2} = -3{,}5$$

$$4x - 1 = 0 \mid +1$$
$$\Leftrightarrow 4x = 1 \mid : 4$$
$$\Leftrightarrow x = x_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
b) Berechnen Sie den Scheitelpunkt und stellen Sie die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform dar.
c) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
d) Beschreiben Sie schrittweise, wie f(x) aus der Normalparabel entsteht.
e) Verschieben Sie den Graphen von f(x) so, dass der verschobene Graph g(x) die x – Achse berührt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g(x) und zeichnen Sie den Graphen in das Koordinatensystem von c).

Lösung Aufgabe B2

a) Die Achsenschnittpunkte von: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

Schnittpunkt mit der y – Achse:

$$f(0) = \frac{5}{2} \Rightarrow P_y\left(0 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right)$$

Schnittpunkte mit der x – Achse (Nullstellen):

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0 \,|\cdot(-2) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow p = -4\,;\, q = -5$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-2)^2 + 5 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 + 3 = 5 \\ x_2 = 2 - 3 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} P_{x1}(5\,|\,0) \\ P_{x2}(-1\,|\,0) \end{array}$$

Lösung Aufgabe B2

b) Scheitelpunktbestimmung:

1. Verfahren über die Nullstellen:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_s = f(x_s) = f(2) = -\frac{1}{2}\cdot 4 + 2\cdot 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow S\left(2 \,\middle|\, \frac{9}{2}\right)$$

Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2}$$

Scheitelpunktbestimmung: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

2. Verfahren durch quadratische Ergänzung:

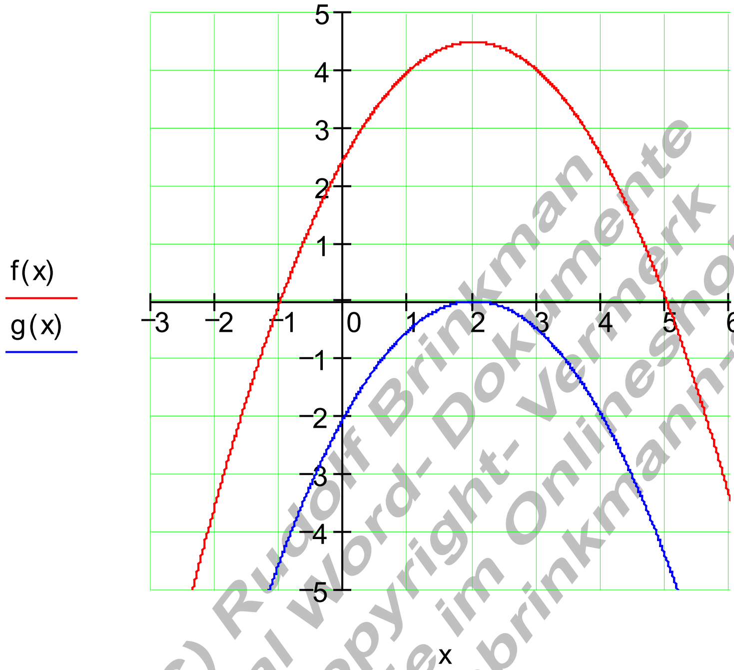
$$f(x) = -\frac{1}{2}\left[x^2 - 4x - 5\right] = -\frac{1}{2}\left[\underbrace{x^2 - 4x + 2^2}_{\text{2. binomische Formel}} - 2^2 - 5\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x-2)^2 - 9\right] = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2}$$

Lösung Aufgabe B2

c)

$$f(x) := \frac{-1}{2}\cdot(x-2)^2 + \frac{9}{2} \qquad g(x) := \frac{-1}{2}\cdot(x-2)^2$$



Lösung Aufgabe B2

d) $f(x)$ entsteht aus der Normalparabel durch folgende Umformungen:

Spiegelung an der x – Achse : $x^2 \mapsto -x^2$

Stauchung mit dem Formfaktor $\frac{1}{2}$: $-x^2 \mapsto -\frac{1}{2}x^2$

Verschiebung um $\frac{9}{2}$ LE nach oben $-\frac{1}{2}x^2 \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$

Verschiebung um 2 LE nach rechts $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2} \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2} = f(x)$

Lösung Aufgabe B2

e) Wird der Graph von $f(x)$ um $\frac{9}{2}$ LE nach unten verschoben,

so schieben sich beide Nullstellen zu einer doppelten Nullstelle,

dem Berührungspunkt $P_{x_{1/2}}(2\,|\,0)$ zusammen.

Die Funktionsgleichung für $g(x)$ lautet:

$$g(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

3. Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = a_2x^2 - x + 2$

Für welche Werte von a_2 hat

a) Der Graph von f(x) eine (doppelte) Nullstelle?

b) Der Graph von f(x) zwei Nullstellen?

c) Der Graph von f(x) keine Nullstelle?

Begründen Sie jedes Ergebnis durch eine entsprechende Rechnung.

Lösung Aufgabe B3

Berechnung der Diskriminante:

$$f(x) = a_2x^2 - x + 2$$
$$f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow a_2x^2 - x + 2 = 0 \mid : a_2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{a_2}x + \frac{2}{a_2} = 0$$
$$\Rightarrow p = -\frac{1}{a_2};\; q = \frac{2}{a_2}$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$
$$\Leftrightarrow D = \left(-\frac{1}{2a_2}\right)^2 - \frac{2}{a_2}$$
$$\Leftrightarrow D = \frac{1}{4a_2^2} - \frac{2}{a_2}$$

Lösung Aufgabe B3

a) Doppelte Nullstelle falls D = 0:

$$D = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} - \frac{2}{a_2} = 0 \mid + \frac{2}{a_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} = \frac{2}{a_2} \mid \cdot a_2^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2a_2 \mid \cdot \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = a_2$$
$$\Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{8}$$

Lösung Aufgabe B3

b) Zwei Nullstellen falls D > 0:

$$D > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} - \frac{2}{a_2} > 0 \mid + \frac{2}{a_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} > \frac{2}{a_2} \mid \cdot a_2^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} > 2a_2 \mid \cdot \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} > a_2$$
$$\Leftrightarrow a_2 < \frac{1}{8}$$

Lösung Aufgabe B3

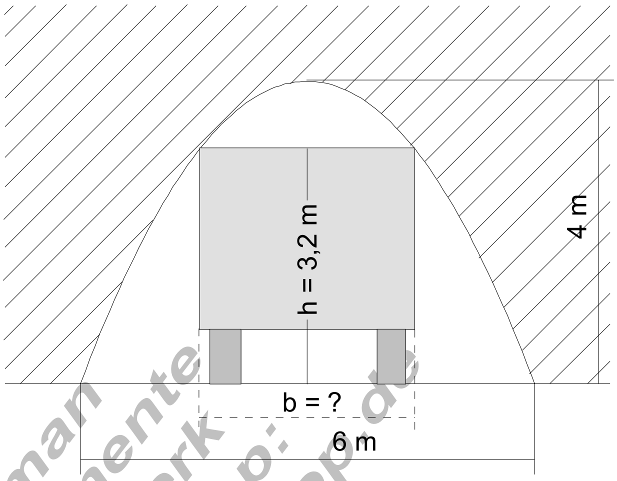
c) Keine Nullstelle falls D < 0:

$$D < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} - \frac{2}{a_2} < 0 \mid + \frac{2}{a_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} < \frac{2}{a_2} \mid \cdot a_2^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < 2a_2 \mid \cdot \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} < a_2$$
$$\Leftrightarrow a_2 > \frac{1}{8}$$

4. Eine Toreinfahrt ist 6 m breit und 4 m hoch.
Sie hat die Form einer Parabel.

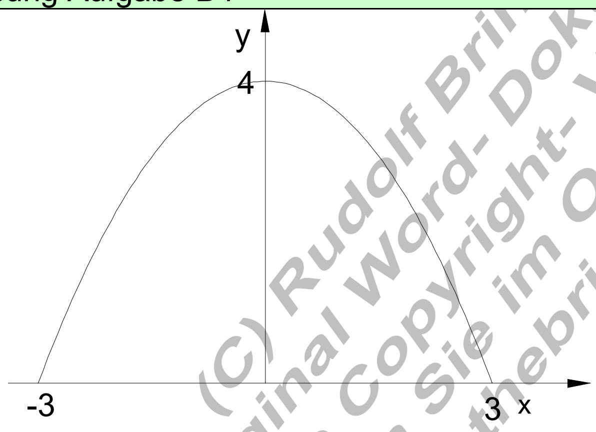
a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung indem Sie die y – Achse als Symmetrieachse wählen.

b) Ein LKW ist 3,2 m hoch. Wie breit darf er maximal sein, damit er mittig durch die Toreinfahrt passt?



Lösung Aufgabe B4

a)



Aus nebenstehender Zeichnung wird die Funktionsgleichung bestimmt:

$f(x) = a_2x^2 + 4$ (Scheitelpunktform)

$f(3) = 0 \Leftrightarrow a_2 \cdot 9 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow a_2 = -\frac{4}{9} \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4$

Lösung Aufgabe B4

b) Der Lkw ist 3,20 m hoch.
Zu berechnen sind die x- Werte, deren Funktionswert 3,2 ist.

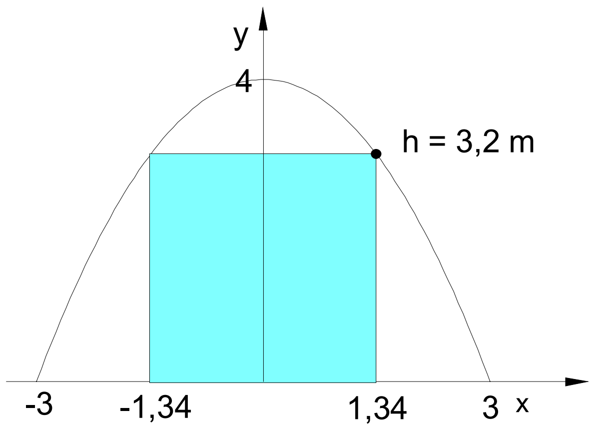
$$f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4$$

$$f(x) = 3{,}2 \Leftrightarrow -\frac{4}{9}x^2 + 4 = 3{,}2 \mid -4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{9}x^2 = -0{,}8 = -\frac{4}{5} \mid : \left(-\frac{4}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{5} \mid \sqrt{} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{9}{5}}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \approx \pm 1{,}34$$



Der Lkw darf eine maximale Breite von 2,68 m haben, damit er gerade noch durch die Toreinfahrt passt.