Klassenarbeit	Mathematik Bearbeitungszeit 90 min.	Di 4.12.07
SG16D Gruppe A	NAME:	

1. Berechnen Sie das Integral $\int_0^4 -(x-2)^4\,dx$

Zu 1.	$\int_0^4 -(x-2)^4\,dx = -\int_0^4 (x-2)^4\,dx = \int_4^0 (x-2)^4\,dx$ Substitution: $u(x) = x-2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du$ untere Grenze : $u(4) = 4-2 = 2$ obere Grenze : $u(0) = 0-2 = -2$ $\int_4^0 (x-2)^4\,dx = \int_2^{-2} u^4\,du = \frac{1}{5}u^5\Big\|_2^{-2} = \frac{1}{5}\cdot(-2)^5 - \frac{1}{5}\cdot 2^5$ $= -\frac{1}{5}\cdot 2^5 - \frac{1}{5}\cdot 2^5 = -2\cdot\frac{1}{5}\cdot 2^5 = -\frac{1}{5}\cdot 2^6 = -\frac{64}{5}$ $\int_0^4 -(x-2)^4\,dx = -\frac{64}{5} = -12{,}8$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
http://www.mathebrinkmann-shop.de

2. Gegeben sind die Funktionen f und g mit:
   $f(x) = x^2 - 2x - 1$ und $g(x) = -x^2 + 4x - 1$
   a) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen.
   b) Wie liegen die Graphen zueinander?
   c) Skizzieren Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die Fläche.

Zu 2.

a) Fläche zwischen den Funktionsgraphen

Die x- Koordinaten der Schnittpunkte beider Graphen bilden die Integrationsgrenzen.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ mit $f(x) = x^2 - 2x - 1$ und $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 - \left(-x^2 + 4x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 + x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 2x - 4x - 1 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \mid :2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ sind die Integrationsgrenzen.

Ansatz: $\int_0^3 \left[f(x) - g(x)\right] dx$ mit $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ wird:

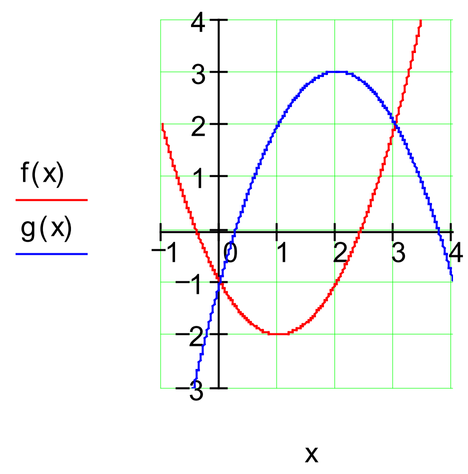
$$\int_0^3 \left(2x^2 - 6x\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

Da es sich bei einer Fläche zwischen zwei Graphen stets um eine physikalische Fläche handelt, muss das Ergebnis positiv sein. Das erreichen wir durch Betragsbildung.

$$A = \left|\int_0^3 \left(2x^2 - 6x\right) dx\right| = \left|-9\right| = 9\,FE$$

b) Das negative Ergebnis der Integration bedeutet, dass der Graph von f(x) unterhalb des Graphen von g(x) liegt.

c)

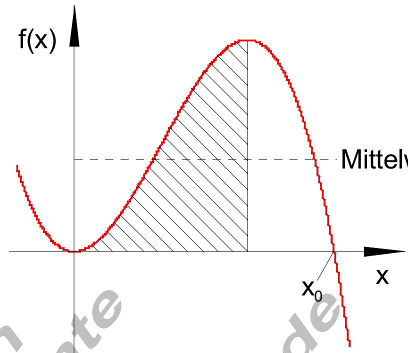


(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
http://www.mathebrinkmann-shop.de

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte
b) Berechnen Sie die Extrempunkte.
c) Berechnen Sie die gekennzeichnete Fläche.
d) Berechnen Sie den Mittelwert von f(x) im Intervall $[\,0\,;\,x_0\,]$



a)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad f(0) = 0 \Rightarrow \text{Schnittpunkt mit der y-Achse: } \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{3}{2}\,|\cdot 4 \Leftrightarrow x_3 = 6$$

$$\underline{\underline{\text{Schnittpunkte mit der x-Achse: } P_{x1/2}(0\,|\,0);P_{x3}(6\,|\,0)}}$$

b)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \qquad f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3\,|\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow x_2 = 4$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = 4$$

$$f(x_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } \underline{\underline{P_{Min}(0\,|\,0)}}$$

$$f(x_2) = f(4) = -16 + 24 = 8 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } \underline{\underline{P_{Max}(4\,|\,8)}}$$

c)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad A = \left|\int_0^4 f(x)\,dx\right|$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^4 = -16 + 32 = 16$$

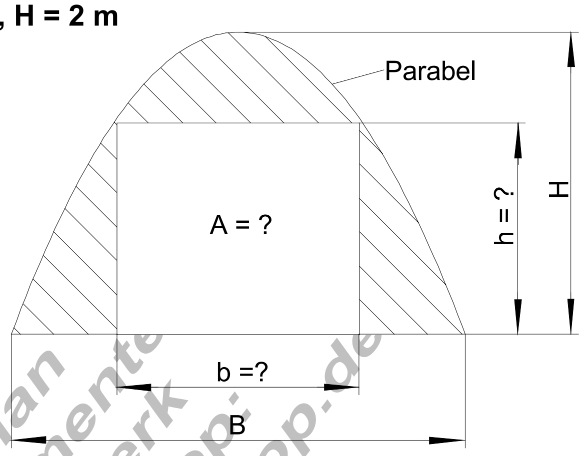
$$\underline{\underline{A = 16\,FE}}$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
http://www.mathebrinkmann-shop.de

d)	$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2 \qquad \text{Mittelwert}=\frac{1}{6}\int_0^6 f(x)\,dx$ $\text{Mittelwert}=\frac{1}{6}\int_0^6\left(-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)dx=\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}x^3\right]_0^6$ $=\frac{1}{6}[-81+108]=\frac{1}{6}\cdot 27=\frac{9}{2}=4{,}5$ $\underline{\underline{\text{Mittelwert}=4{,}5\,\text{LE}}}$

(C) Rudolf Brinkman
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
http://www.mathebrinkmann-shop.de

4. In einer parabelförmigen Giebelwand soll ein rechteckiges Fenster eingelassen werden, das bis zum Boden reicht. Giebelmaße: **B = 3 m, H = 2 m**



a) Welche Maße muss das Fenster haben (Breite und Höhe), damit die Fensterfläche maximal wird? Wie groß ist die Fensterfläche?

Zwischenwerte zur Kontrolle :

Funktionsgleichung der Parabel: $f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + 2$

Fensterfläche als Funktion von b: $A(b) = -\frac{2}{9}b^3 + 2b$

b) Die restliche Fläche der Giebelwand soll gestrichen werden. Wie groß ist diese Fläche?

a)

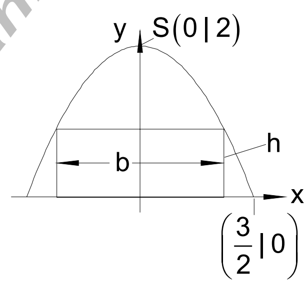
$B = 3m \qquad H = 2m$

Ansatz über die Scheitelpunktform:

$f(x) = a_2x^2 + 2$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4}a_2 + 2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{8}{9}$

Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + 2}}$



$A = b \cdot h \quad h(b) = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{8}{9} \cdot \frac{b^2}{4} + 2 = -\frac{2}{9}b^2 + 2$

$A(b) = b \cdot h(b) = b \cdot \left(-\frac{2}{9}b^2 + 2\right) = -\frac{2}{9}b^3 + 2b$

$A'(b) = -\frac{2}{3}b^2 + 2 \quad A''(b) = -\frac{4}{3}b$

$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}b^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 3 \Leftrightarrow b_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

$A''(b) = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ rel. Max bei $b = \sqrt{3}$

Fensterbreite $= \underline{\underline{\sqrt{3}\,m \approx 1{,}732\,m}}$

$h(b) = -\frac{2}{9}b^2 + 2 \Rightarrow h\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{9} \cdot 3 + 2 = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$

Fensterhöhe $= \underline{\underline{\frac{4}{3}m = 1{,}\overline{3}m}}$

Fensterfläche $= b \cdot h = \sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \approx \underline{\underline{2{,}309\,m^2}}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
http://www.mathebrinkmann-shop.de

b)	$\text{Restfläche} = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx - \text{Fensterfläche}$ $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{8}{9}x^2 + 2\right)dx = \left[-\frac{8}{27}x^3 + 2x\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$ $= -\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{8} + 2\cdot\frac{3}{2} - \left(\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{8} - 2\cdot\frac{3}{2}\right) = -1+3-1+3 = 6-2 = 4$ $\text{Restfläche} = 4\,m^2 - \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}\,m \approx \underline{\underline{1{,}691m^2}}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
http://www.mathebrinkmann-shop.de

Klassenarbeit	**Mathematik Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 4.12.07**
SG16D Gruppe B	**NAME:**	

1. Berechnen Sie das Integral $\int_{-4}^{0} (x+2)^4 \, dx$

Zu 1.	$\int_{-4}^{0} (x+2)^4 \, dx$ Substitution: $u(x) = x+2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du$ untere Grenze : $u(-4) = -4+2 = -2$ obere Grenze : $u(0) = 0+2 = 2$ $\int_{-4}^{0} (x-2)^4 \, dx = \int_{-2}^{2} u^4 \, du = \frac{1}{5}u^5 \Big\vert_{-2}^{2} = \frac{1}{5}\cdot 2^5 - \frac{1}{5}\cdot(-2)^5$ $= \frac{1}{5}\cdot 2^5 + \frac{1}{5}\cdot 2^5 = 2\cdot\frac{1}{5}\cdot 2^5 = \frac{1}{5}\cdot 2^6 = \frac{64}{5}$ $\int_{-4}^{0} (x+2)^4 \, dx = \frac{64}{5} = 12{,}8$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
http://www.mathebrinkmann-shop.de

2. Gegeben sind die Funktionen f und g mit:

   $f(x) = -x^2 - 4x - 1$ und $g(x) = x^2 + 2x - 1$

   a) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen.
   b) Wie liegen die Graphen zueinander?
   c) Zeichnen Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die Fläche.

Zu 2.

a) Fläche zwischen den Funktionsgraphen

Die x- Koordinaten der Schnittpunkte beider Graphen bilden die Integrationsgrenzen.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ mit $f(x) = -x^2 - 4x - 1$ und $g(x) = x^2 + 2x - 1$

$\Leftrightarrow -x^2 - 4x - 1 - \left(x^2 + 2x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 - 4x - 1 - x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 - x^2 - 4x - 2x - 1 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -2x^2 - 6x = 0 \,|:(-2)$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -3$ sind die Integrationsgrenzen.

Ansatz: $\int_{-3}^{0} \left[f(x) - g(x)\right] dx$ mit $f(x) - g(x) = -2x^2 - 6x$ wird:

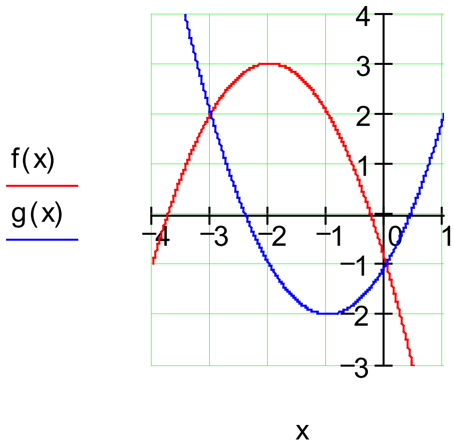
$$\int_{-3}^{0} \left(-2x^2 - 6x\right) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-3}^{0} = -\frac{2}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - \left[-\frac{2}{3}(-3)^3 - 3(-3)^2\right]$$

$$= 0 - \left[-\frac{2}{3} \cdot (-27) - 3 \cdot 9\right] = -(18 - 27) = -(-9) = 9$$

$$A = \int_{-3}^{0} \left(-2x^2 - 6x\right) dx = 9\,FE$$

b) Das positive Ergebnis der Integration bedeutet, dass der Graph von f(x) oberhalb des Graphen von g(x) liegt.

c)

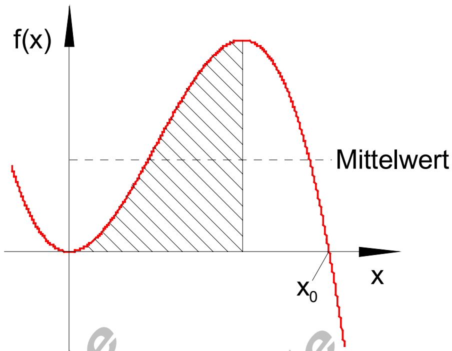


(c) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie im Onlineshop: http://www.mathebrinkmann-shop.de

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte
b) Berechnen Sie die Extrempunkte.
c) Berechnen Sie die gekennzeichnete Fläche.
d) Berechnen Sie den Mittelwert von f(x) im Intervall [0 ; x_0]



(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
http://www.mathebrinkmann-shop.de

a)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \qquad f(0) = 0 \Rightarrow \text{Schnittpunkt mit der y-Achse}: P_y(0|0)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{12}x + \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{12}x + \frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12}x = \frac{3}{4} \,|\cdot 12 \Leftrightarrow x_3 = 9$$

Schnittpunkte mit der x – Achse: $P_{x1/2}(0|0); P_{x3}(9|0)$

b)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \qquad f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \qquad f''(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{3}{2} \,|\cdot 4 \Leftrightarrow x_2 = 6$$

$$f''(x_1) = f''(0) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(6) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = 6$$

$$f(x_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } P_{Min}(0|0)$$

$$f(x_2) = f(6) = -18 + 27 = 9 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } P_{Max}(6|9)$$

c)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \qquad A = \left|\int_0^6 f(x)\,dx\right|$$

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 \left(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{48}x^4 + \frac{3}{12}x^3\right]_0^6 = -\frac{1296}{48} + \frac{648}{12} = \frac{1296}{48} = 27$$

$A = 27\,FE$

d)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \qquad \text{Mittelwert} = \frac{1}{9}\int_0^9 f(x)\,dx$$

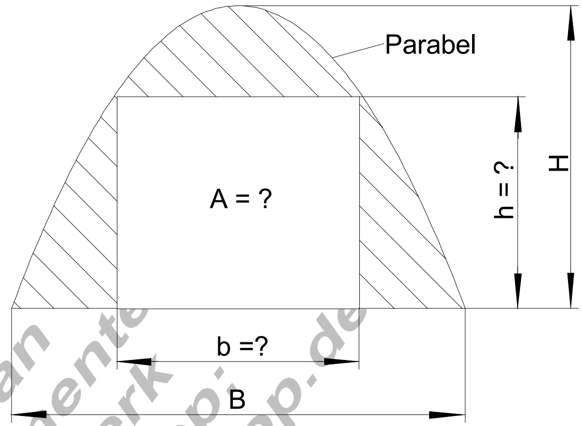
$$\text{Mittelwert} = \frac{1}{9}\int_0^9 \left(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right)dx = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{4}x^3\right]_0^9$$

$$= \frac{1}{9}\left[-\frac{6561}{48} + \frac{2187}{12}\right] + \frac{1}{9}\cdot\frac{2187}{48} = \frac{243}{48} = \frac{81}{16} \approx 5{,}06$$

$$\text{Mittelwert} = \frac{81}{16} \approx 5{,}06\,\text{LE}$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
http://www.mathebrinkmann-shop.de

4. In einer parabelförmigen Giebelwand soll ein rechteckiges Fenster eingelassen werden, das bis zum Boden reicht. Giebelmaße: **B = 4 m, H = 3 m**



a) Welche Maße muss das Fenster haben (Breite und Höhe), damit die Fensterfläche maximal wird? Wie groß ist die Fensterfläche?

Zwischenwerte zur Kontrolle:

Funktionsgleichung der Parabel: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$

Fensterfläche als Funktion von b: $A(b) = -\frac{3}{16}b^3 + 3b$

b) Die restliche Fläche der Giebelwand soll gestrichen werden. Wie groß ist diese Fläche?

a)

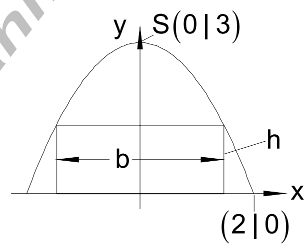
$B = 4\,m \qquad H = 3\,m$

Ansatz über die Scheitelpunktform:

$f(x) = a_2x^2 + 3$

$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 3 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{4}$

Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3}}$



$A = b \cdot h \quad h(b) = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{b^2}{4} + 3 = -\frac{3}{16}b^2 + 3$

$A(b) = b \cdot h(b) = b \cdot \left(-\frac{3}{16}b^2 + 2\right) = -\frac{3}{16}b^3 + 3b$

$A'(b) = -\frac{9}{16}b^2 + 3 \qquad A''(b) = -\frac{9}{8}b$

$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{16}b^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{16}b^2 = 3 \Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow b_{1/2} = \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}$

$A''(b) = -\frac{9}{8} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ rel. Max bei $b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Fensterbreite $= \underline{\underline{\frac{4}{3}\sqrt{3}\,m \approx 2{,}309\,m}}$

$h(b) = -\frac{3}{16}b^2 + 3 \Rightarrow h\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{16} \cdot \frac{16}{9} \cdot 3 + 3 = 2$

Fensterhöhe $= \underline{\underline{2\,m}}$

Fensterfläche $= b \cdot h = \frac{4}{3}\sqrt{3} \cdot 2 = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{3} \approx \underline{\underline{4{,}619\,m^2}}$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie im Onlineshop: http://www.mathebrinkmann-shop.de

b)	$\text{Restfläche} = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \text{Fensterfläche}$ $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{3}{4}x^2+3\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^3+3x\right]_{-2}^{2}$ $= -\frac{1}{4}\cdot 8+3\cdot 2-\left(\frac{1}{4}\cdot 8-3\cdot 2\right) = -2+6-2+6 = 12-4 = 8$ $\text{Restfläche} = 8\,m^2 - \frac{8}{3}\cdot\sqrt{3}\,m \approx \underline{\underline{3{,}381m^2}}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
http://www.mathebrinkmann-shop.de