Klassenarbeit Mathematik Bearbeitungszeit 90 min. Di 22.05.07
SG16-26D Gruppe A NAME:

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Wissensfragen.

   a) Woran erkennt man Punktsymmetrie bei einer ganzrationalen Funktion? Notieren Sie dazu eine Beispielfunktion.
   b) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen?
   c) Beschreiben Sie mit eigenen Worten, wie man von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung gelangt und fertigen Sie dazu eine Skizze an.
   d) Sie sollen die Extrempunkte einer Ganzrationalen Funktion bestimmen. Beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie Sie dabei vorgehen.

Zu 1 a)
Punktsymmetrie liegt vor, wenn es in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten gibt.

Beispiel: $f(x) = x^3 + x$

Zu 1 b)
Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion hängt von ihrem Grad ab.
Grad gerade: f(x) hat höchstens n Nullstellen
Grad ungerade: f(x) hat mind. eine aber höchstens n Nullstellen.

Zu 1 c) Text

Zu 1 d)
- Bilde die Ableitung f'(x).
- Setze f'(x) = 0 und bestimme die Stellen (x – Werte) mit waagerechten Tangenten.
- Setze die x – Werte in die Funktionsgleichung ein und berechne die Extremwerte.

2. Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{11}{2}$

   Der Graph verläuft durch die Punkte $P_1(-3\,|\,-8)$; $P_2(-1\,|\,8)$; $P_3(3\,|\,-8)$; $P_4(5\,|\,8)$

   a) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte. (Finden Sie eine Nullstelle über das Horner-Schema)
   b) Bestimmen Sie die Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente).
   c) Berechnen Sie die Funktionswerte für x = -2; 2; und 4. Tragen Sie alle bekannten Wertepaare in eine Wertetabelle ein.
   d) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

2a) Die Achsenschnittpunkte

Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}$

$P_y: f(0)=\frac{11}{2} \Rightarrow \boxed{P_y\left(0\,|\,\frac{11}{2}\right)}$

Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}=0$

$$
\begin{array}{llllll}
 & & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\
x=1 & \downarrow & & \frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{11}{2} \\
\hline
 & & \frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{11}{2} & 0 = f(1)
\end{array}
\Rightarrow \boxed{x_1=1}
$$

Restpolynom: $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{11}{2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-11=0$

$p=-2; q=-11 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+11=12 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{12}$

$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\left| \begin{array}{l} x_1=1+\sqrt{12}\approx 4,46 \\ x_2=1-\sqrt{12}\approx -2,46 \end{array}\right.$

$\boxed{P_{x1}(1\,|\,0); P_{x2}\left(1+\sqrt{12}\approx 4,46\,|\,0\right); P_{x3}\left(1-\sqrt{12}\approx -2,46\,|\,0\right)}$

2b) Punkte mit waagerechter Tangente

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}=0 \,|\, : \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$p=-2; q=-3 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+3=4 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{4}=2$

$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\left| \begin{array}{l} x_1=1+2=3 \\ x_2=1-2=-1 \end{array}\right.$

$f(x_1)=f(3)=-8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{min}(3\,|\,-8)}}$

$f(x_2)=f(-1)=8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{max}(-1\,|\,8)}}$

2c) Wertetabelle

$$f(-2) = -4 - 6 + 9 + \frac{11}{2} = 4{,}5$$

$$f(2) = 4 - 6 - 9 + \frac{11}{2} = -5{,}5$$

$$f(4) = 32 - 24 - 18 + \frac{11}{2} = -4{,}5$$

	P_1	P_{x3}		P_2 / P_{max}	P_y	P_{x1}		P_3 / P_{min}		P_{x2}	P_4
x	-3	$-2{,}46$	-2	-1	0	1	2	3	4	$4{,}46$	5
f(x)	-8	0	$4{,}5$	8	$5{,}5$	0	$-5{,}5$	-8	$-4{,}5$	0	8

2d) Der Graph

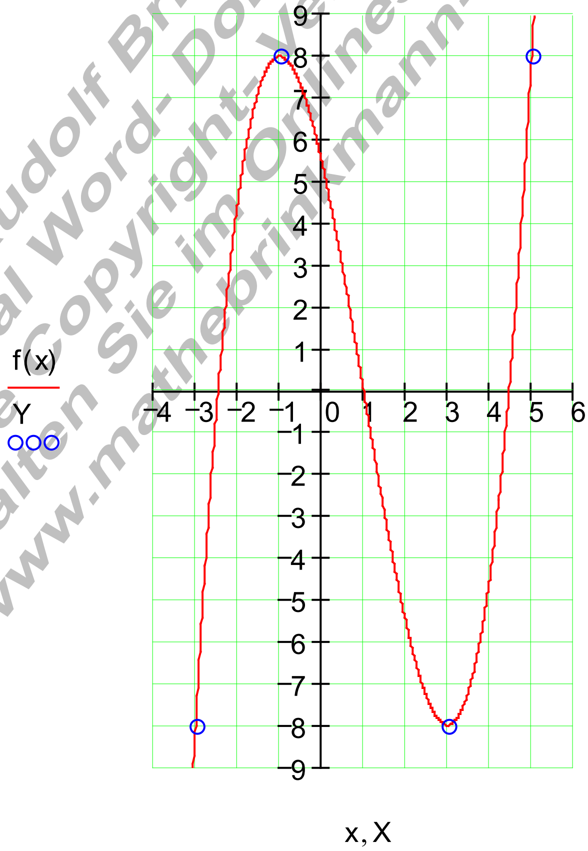
Probe:

$f(x_1) = -8$

$f(x_2) = 8$

$f(x_3) = -8$

$f(x_4) = 8$

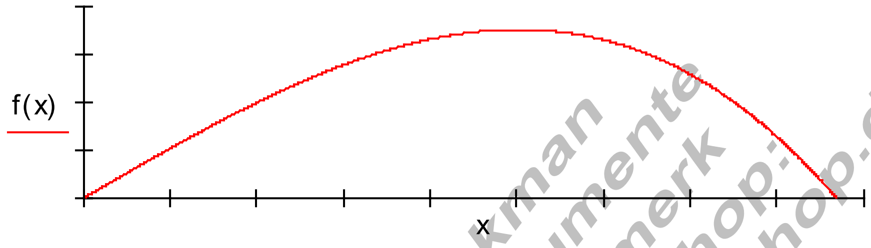


3. Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x \qquad \text{für } x > 0$$

Maßstab: Eine Einheit in x – Richtung bedeutet 10 m

Eine Einheit in y – Richtung bedeutet 1m



a) Welche maximale Höhe erreicht der Speer und wie weit ist er dann vom Abwurfpunkt entfernt?
b) Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?
c) Welche Höhe hat der Speer in 70 m Entfernung vom Abwurfpunkt?

Zu 3a)

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{21}{250}x^2 + \frac{21}{10}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{21}{250}x^2 + \frac{21}{10} = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 5$$

nur $x = 5$ zählt, da $x > 0$ sein soll

$$f(5) = 7 \Rightarrow \underline{\underline{P_{max}(5|7)}}$$

$x = 5$ bedeutet 50 m

Der Speer erreicht eine maximale Höhe von 7 m.

Er ist dann 50 m vom Abwurfpunkt entfernt.

Zu 3 b)

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle

$$-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{75} \approx \pm 8{,}66$$

nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt

$x = 8{,}66$ bedeutet 86,6 m

Der Speer kommt 86,6 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.

Zu 3 c)

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x$$

70m bedeutet $x = 7$

$f(7) = 5{,}096$

Der Speer hat in einer Entfernung von 70m von der Abwurfstelle eine Höhe von 5,096m

Klassenarbeit Mathematik Bearbeitungszeit 90 min. Di 22.05.07
SG16-26D Gruppe B NAME:

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Wissensfragen.

a) Woran erkennt man Achsensymmetrie bei einer ganzrationalen Funktion? Notieren Sie dazu eine Beispielfunktion.
b) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen?
c) Beschreiben Sie mit eigenen Worten, wie man von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung gelangt und fertigen Sie dazu eine Skizze an.
d) Sie sollen die Extrempunkte einer Ganzrationalen Funktion bestimmen. Beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie Sie dabei vorgehen.

Zu 1 a)
Achsensymmetrie liegt vor, wenn es in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten gibt.

Beispiel: $f(x) = x^4 + x^2 + 2$

Zu 1 b)
Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion hängt von ihrem Grad ab.
Grad gerade: f(x) hat höchstens n Nullstellen
Grad ungerade: f(x) hat mind. eine aber höchstens n Nullstellen.

Zu 1 c) Text

Zu 1 d)
- Bilde die Ableitungen f'(x).
- Setze f'(x) = 0 und bestimme die Stellen (x – Werte) mit waagerechten Tangenten.
- Setze die x – Werte in die Funktionsgleichung ein und berechne die Extremwerte.

2. Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2}$

Der Graph verläuft durch die Punkte $P_1(-3\,|\,8)$; $P_2(-1\,|\,-8)$; $P_3(3\,|\,8)$; $P_4(5\,|\,-8)$

a) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
(Finden Sie eine Nullstelle über das Horner-Schema)
b) Bestimmen Sie die Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente).
c) Berechnen Sie die Funktionswerte für x = -2; 2; und 4.
Tragen Sie alle bekannten Wertepaare in eine Wertetabelle ein.
d) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

2a) Die Achsenschnittpunkte

Achsenschnittpunkte von $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2}$

$$P_y : f(0) = -\frac{11}{2} \Rightarrow \boxed{P_y\left(0 \mid -\frac{11}{2}\right)}$$

$$\text{Nullstellen}: f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2} = 0$$

$$\begin{array}{lccccl} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{11}{2} & \\ x = 1 & \downarrow & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{11}{2} & \Rightarrow \boxed{x_1 = 1} \\ \hline & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{11}{2} & 0 & = f(1) \end{array}$$

$$\text{Restpolynom}: -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 11 = 0$$

$$p = -2; q = -11 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 11 = 12 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{12}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 1 + \sqrt{12} \approx 4,46 \\ x_2 = 1 - \sqrt{12} \approx -2,46 \end{array} \right.$$

$$\boxed{P_{x1}(1 \mid 0); P_{x2}\left(1 + \sqrt{12} \approx 4,46 \mid 0\right); P_{x3}\left(1 - \sqrt{12} \approx -2,46 \mid 0\right)}$$

2b) Punkte mit waagerechter Tangente

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} = 0 \,\Big|:\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$p = -2; q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 1 + 2 = 3 \\ x_2 = 1 - 2 = -1 \end{array} \right.$$

$$f(x_1) = f(3) = 8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{max}(3 \mid 8)}}$$

$$f(x_2) = f(-1) = -8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{min}(-1 \mid -8)}}$$

2c) Wertetabelle

$$f(-2) = 4 + 6 - 9 - \frac{11}{2} = -4{,}5$$

$$f(2) = -4 + 6 + 9 - \frac{11}{2} = 5{,}5$$

$$f(4) = -32 + 24 + 18 - \frac{11}{2} = 4{,}5$$

	P_1	P_{x3}		P_2 / P_{min}	P_y	P_{x1}		P_3 / P_{max}		P_{x2}	P_4
x	–3	–2,46	–2	–1	0	1	2	3	4	4,46	5
f(x)	8	0	–4,5	–8	–5,5	0	5,5	8	4,5	0	–8

2d) Der Graph

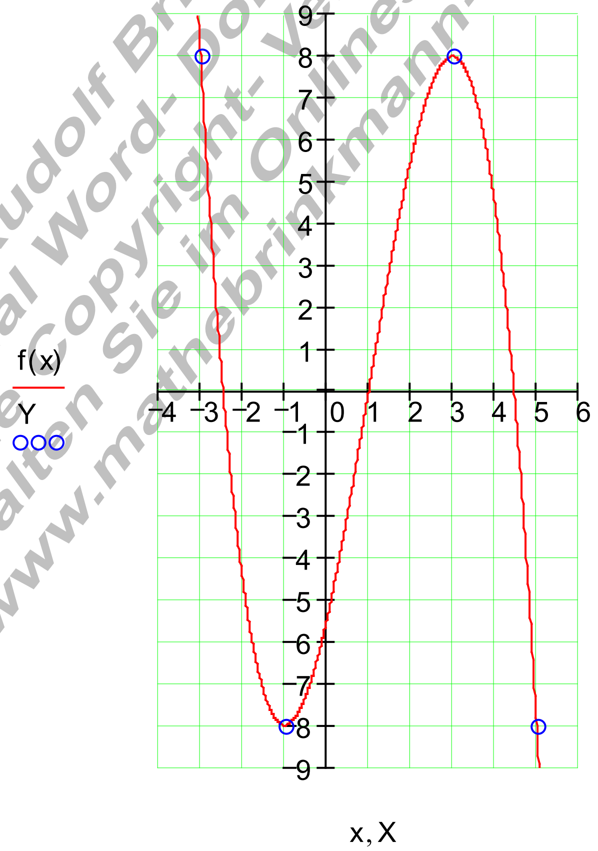
Probe:

$f(x_1) = 8$

$f(x_2) = -8$

$f(x_3) = 8$

$f(x_4) = -8$

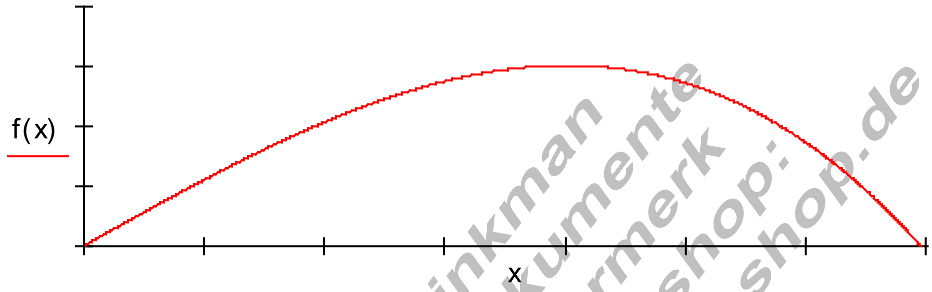


3. Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x \qquad \text{für } x > 0$$

Maßstab: Eine Einheit in x – Richtung bedeutet 10 m

Eine Einheit in y – Richtung bedeutet 1m



a) Welche maximale Höhe erreicht der Speer und wie weit ist er dann vom Abwurfpunkt entfernt?
b) Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?
c) Welche Höhe hat der Speer in 60 m Entfernung vom Abwurfpunkt?

Zu 3a)

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{9}{64}x^2 + \frac{9}{4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{64}x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$$

nur $x = 4$ zählt, da $x > 0$ sein soll

$$f(4) = 6 \Rightarrow \underline{\underline{P_{max}(4\,|\,6)}}$$

$x = 4$ bedeutet 40 m

Der Speer erreicht eine maximale Höhe von 6 m.

Er ist dann 40 m vom Abwurfpunkt entfernt.

Zu 3 b)

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle

$$-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{48} \approx \pm 6{,}93$$

nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt

$x = 6{,}93$ bedeutet 69,3 m

Der Speer kommt 69,3 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.

Zu 3 c)

$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x$

60m bedeutet $x = 6$

$f(6) = 3{,}275$

Der Speer hat in einer Entfernung von 60m von der Abwurfstelle eine Höhe von 3,375m