

<b>Klassenarbeit</b> <b>SG16/26D Gruppe A</b>	<b>Mathematik</b> <b>NAME:</b>	<b>Bearbeitungszeit 90 min.</b>	<b>Di 27.05.08</b>
--	-----------------------------------	---------------------------------	--------------------

**Hilfsmittel: Taschenrechner**

1. Nach einer Operation erhält ein Patient eine Infusion. Die Abbildung zeigt die Dosierung über einen Zeitraum von 24 Stunden.

( x in Stunden, f(x) in mg/h )



Der Verlauf der Dosierung wird mit der Funktion  $f(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$  modelliert.

- a) Beschreiben Sie grob den Verlauf der Dosierung.

Verlaufsbeschreibung:

Die Dosierung beginnt bei 0 mg/h.

Sie steigt in den ersten Stunden an, um nach etwa 5 Stunden einen Maximalwert von ca. 3,8 mg/h zu erreichen.

Danach klingt sie wieder ab.

Nach ca. 12 Stunden ist die Abnahme am stärksten.

b) Nach welcher Zeit ist die Dosierung maximal? Wie hoch ist sie dann.

$$f(x) = \underbrace{2 \cdot x}_u \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_v \Rightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2; v = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{5}x} - 2x \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} = \underbrace{\left(2 - \frac{2}{5}x\right)}_u \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_v$$

$$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = 2 - \frac{2}{5}x \Rightarrow u' = -\frac{2}{5}; v = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}x} - \left(2 - \frac{2}{5}x\right) \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} = \underbrace{\left(\frac{2}{25}x - \frac{4}{5}\right)}_u \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_v$$

$$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = \frac{2}{25}x - \frac{4}{5} \Rightarrow u' = \frac{2}{25}; v = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{25} \cdot e^{-\frac{1}{5}x} - \left(\frac{2}{25}x - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} = \left(\frac{6}{25} - \frac{2}{125}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2 - \frac{2}{5}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{5}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{2}{5}x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_e = 5}} \text{ Stelle mit waagerechter Tangente}$$

$$f''(x_e) = f''(5) = \left(\frac{2}{25} \cdot 5 - \frac{4}{5}\right) \cdot e^{-1} \approx -0,147 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_e = 5$$

$$f(x_e) = f(5) = 2 \cdot 5 \cdot e^{-1} \approx \underline{\underline{3,679}}$$

Nach 5 Stunden ist die Dosierung maximal, sie beträgt dann 3,679 mg/h

c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Abnahme der Dosierung am stärksten?

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{25}x - \frac{4}{5}\right) \cdot e^{-\frac{1}{5}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{25}x - \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_w = 10}} \text{ mögliche Wendestelle}$$

$$f'''(x_w) = f'''(10) = \left(\frac{6}{25} - \frac{2}{125} \cdot 10\right) \cdot e^{-2} \approx 0,011 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_w = 10$$

Nach 10 Stunden ist die Abnahme der Dosierung am stärksten.

d) Bestimmen Sie die Menge des verabreichten Medikamentes, wenn die Infusion 24 Stunden durchgeführt wird.

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$M = \int_0^{24} f(x) dx = \int_0^{24} \underbrace{2 \cdot x}_u \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_{v'} dx$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' v dx$$

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2; v' = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v = \int e^{-\frac{1}{5}x} dx = -5e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$\int f(x) dx = 2x \cdot \left(-5e^{-\frac{1}{5}x}\right) - \int 2 \cdot \left(-5e^{-\frac{1}{5}x}\right) dx = -10x \cdot e^{-\frac{1}{5}x} + 10 \int e^{-\frac{1}{5}x} dx = -10(x+5)e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$M = \int_0^{24} f(x) dx = \left[ -10(x+5)e^{-\frac{1}{5}x} \right]_0^{24} = -290 \cdot e^{-\frac{24}{5}} + 50 \approx \underline{\underline{47,613}}$$

Nach 24 Stunden wurde eine Menge von 47,613 mg verabreicht.

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei die Funktion  $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$  für  $k > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$

- Untersuchen Sie  $f_k$  auf Achsenschnittpunkte und berechnen Sie diese.
- Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von  $f_k(x)$ .
- Untersuchen Sie  $f_k$  auf Extrempunkte und berechnen Sie diese.
- Untersuchen Sie  $f_k$  auf Wendepunkte und berechnen Sie diese. (Ohne Nachweis).
- Berechnen Sie die Ortskurve  $f_{ok}(x)$  für die Extrempunkte.  $P_E \left( k-2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$
- Bestimmen Sie die Fläche  $A_k$  zwischen den Achsenschnittpunkten und der x-Achse.
- Verwenden Sie folgende Wertetabelle und zeichnen Sie die Graphen für  $f_1(x)$ ;  $f_2(x)$ ;  $f_3(x)$ ;  $f_4(x)$  und die Ortskurve  $f_{ok}(x)$  in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie die Werte der markanten Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) mit dem Taschenrechner.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	-3,4	-11,2	-27,7	-60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	-5,6	-18,5	-45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	-9,24	-30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	-15,2

- Berechnen Sie für  $k = 4$  die Fläche  $A_4$  und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem.

- Achsenschnittpunkte

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$P_y : f_k(0) = \frac{5}{4}(k-0)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = \frac{5}{4} \cdot k \cdot 1 = \frac{5}{4}k \Rightarrow P_y \left( 0 \mid \frac{5}{4}k \right)$$

$$P_x : f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(k-x)\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(k-x) = 0 \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow P_x(k \mid 0)$$

- Die ersten beiden Ableitungen

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{4}(k-x) \Rightarrow u' = -\frac{5}{4}$$

$$\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = -\frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{4}(k-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = -\frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{8} \cdot (k-x)e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left[ \frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} \right] e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \Rightarrow u' = -\frac{5}{8}$$

$$\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= -\frac{5}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left[ \frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left\{ -\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \\ &= \left[ -\frac{5}{8} + \frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{8} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left[ \frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x}}} \end{aligned}$$

## c) Extrempunkte

$$\begin{aligned} f_k'(x) = 0 &\Leftrightarrow \left[ \frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} \right] \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} = 0 \quad | : \frac{5}{8} \\ &\Leftrightarrow k-x-2 = 0 \quad | +x \\ &\Leftrightarrow k-2 = x \Rightarrow x_E = k-2 \text{ ist mögliche Extremstelle.} \end{aligned}$$

Überprüfung mit der 2. Ableitung:  $f_k''(x_E) \neq 0$

$$\begin{aligned} f_k''(x_E) &= f_k''(k-2) = \left\{ \frac{5}{16} [k - (k-2)] - \frac{5}{4} \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} \\ &= \left[ \frac{5}{16}(k-k+2) - \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \left( \frac{5}{8} - \frac{5}{4} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \left( \frac{5}{8} - \frac{10}{8} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = -\frac{5}{8} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}(k-2)}}_{>0} < 0 \end{aligned}$$

Bei  $x = x_E = k-2$  liegt ein relatives Maximum.

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\begin{aligned} f_k(x_E) &= f_k(k-2) = \frac{5}{4} [k - (k-2)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} \\ &= \frac{5}{4}(k-k+2) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \Rightarrow \underline{\underline{P_{kMax} \left( k-2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)}}} \end{aligned}$$

## d) Der Wendepunkt

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[ \frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4} = 0 \quad | + \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}(k-x) = \frac{5}{4} \quad | : \frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow k-x = 4 \quad | -k \Leftrightarrow -x = 4-k \quad | \cdot (-1) \Leftrightarrow x = k-4$$

Wendestelle bei  $x = x_W = k-4$

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_W) = f_k(k-4) = \frac{5}{4}[k-(k-4)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = \frac{5}{4} \cdot 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2}$$

$$\underline{\underline{P_{k_W} \left( k-4 \mid 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)}}$$

## e) Die Ortskurve

$$P_{k_{\text{Max}}} \left( k-2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right) \Rightarrow \underbrace{x = k-2}_{(1)} \text{ und } \underbrace{y = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}}_{(2)}$$

$$x = k-2 \Leftrightarrow k = x+2 \text{ in (2) eingesetzt: } y = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x+2)-1} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x+1-1} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\underline{\underline{\text{Funktionsgleichung der Ortskurve: } f_{\text{OK}}(x) = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

f) Die Fläche  $A_k$ 

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned} \int f_k(x) dx &= \int \frac{5}{4}(k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \int \frac{5}{4}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx - \int \frac{5}{4}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx \\ &= \frac{5}{4}k \cdot \underbrace{\int e^{\frac{1}{2}x} dx}_I - \frac{5}{4} \cdot \underbrace{\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx}_{II} = \frac{5}{4}k \cdot I - \frac{5}{4} \cdot II \end{aligned}$$

$$I: \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$II: \int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \text{ mit } u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$\text{und } v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \text{ wird}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx &= x \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int 1 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx \\ &= 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int f_k(x) dx &= \frac{5}{4}k \cdot I - \frac{5}{4} \cdot II = \frac{5}{4}k \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{4} \left( 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) + C \\ &= \frac{5}{2}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 5 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \\ &= \left( \frac{5}{2}k - \frac{5}{2}x + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^k f_k(x) dx &= \left[ \left( \frac{5}{2}k - \frac{5}{2}x + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k \\ &= \left( \frac{5}{2}k - \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( \frac{5}{2}k - \frac{5}{2} \cdot 0 + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right] \\ &= 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^0 \right] = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left( \frac{5}{2}k + 5 \right) = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5 \end{aligned}$$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right| = \left| \underline{\underline{5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5}} \right|$$

## g) Die Graphen

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	-3,4	-11,2	-27,7	-60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	-5,6	-18,5	-45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	-9,24	-30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	-15,2

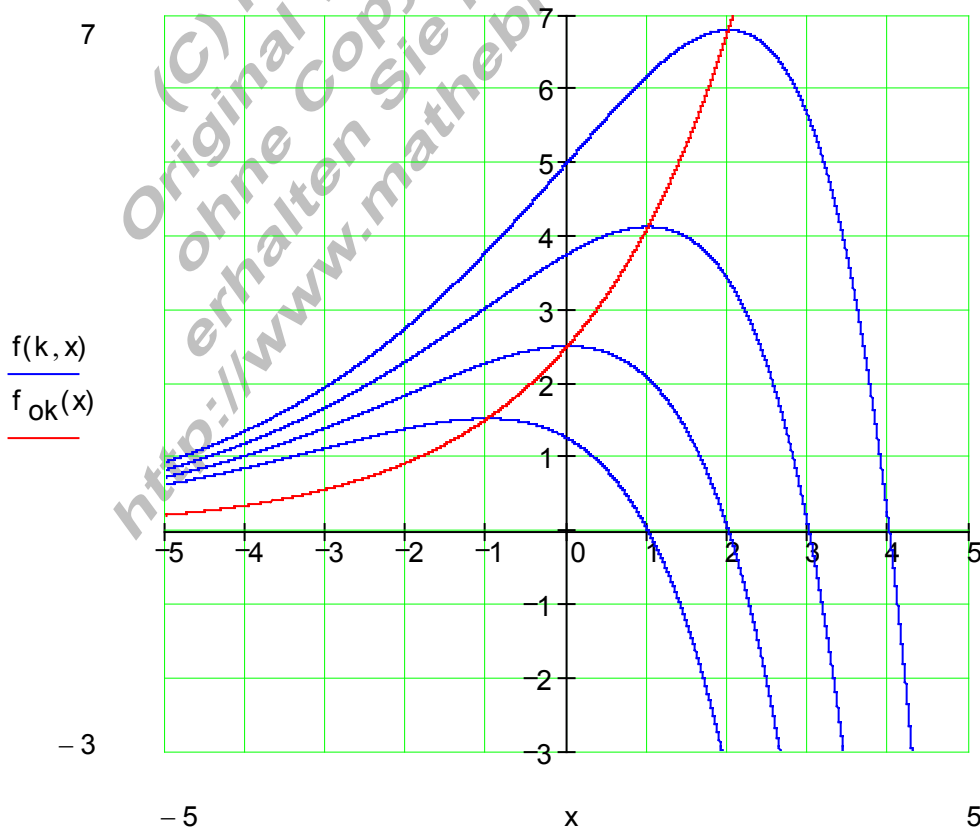
Markante Punkte:

 $P_{k_y} \left( 0 \mid \frac{5}{4}k \right)$  Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

 $P_{k_x} (k \mid 0)$  Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

 $P_{k_{\text{Max}}} \left( k - 2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$  Aus der Wertetabelle ablesbar:

 $P_{1_{\text{Max}}} (-1 \mid 1,52); P_{2_{\text{Max}}} (0 \mid 2,5); P_{3_{\text{Max}}} (1 \mid 4,12); P_{4_{\text{Max}}} (2 \mid 6,8)$ 
 $P_{k_w} \left( k - 4 \mid 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)$  Aus der Wertetabelle ablesbar:

 $P_{1_w} (-3 \mid 1,12); P_{2_w} (-2 \mid 1,84); P_{3_w} (-1 \mid 3,03); P_{4_w} (0 \mid 5)$ 




h) Flächenberechnung für  $k = 4$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right| = \left| 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5 \right|$$

$$A_4 = \left| \int_0^4 f_4(x) dx \right| = \left| 5 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} - \frac{5}{2} \cdot 4 - 5 \right| = \left| 5 \cdot e^2 - 10 - 5 \right| = \left| 5 \cdot e^2 - 15 \right| \approx \underline{\underline{21,95FE}}$$

(C) Rudolf Brinkman  
Original Word-Dokumente  
ohne Copyright-Vermerk  
erhalten Sie im Onlineshop:  
<http://www.mathebrinkmann-shop.de>

<b>Klassenarbeit</b> <b>SG16/26D Gruppe B</b>	<b>Mathematik</b> <b>NAME:</b>	<b>Bearbeitungszeit 90 min.</b>	<b>Di 27.05.08</b>
--	-----------------------------------	---------------------------------	--------------------

**Hilfsmittel: Taschenrechner**

1. Nach einer Operation erhält ein Patient eine Infusion. Die Abbildung zeigt die Dosierung über einen Zeitraum von 24 Stunden.  
( x in Stunden, f(x) in mg/h )



Der Verlauf der Dosierung wird mit der Funktion  $f(x) = 3 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$  modelliert.

- a) Beschreiben Sie grob den Verlauf der Dosierung.

Verlaufsbeschreibung:

Die Dosierung beginnt bei 0 mg/h.

Sie steigt in den ersten Stunden an, um nach etwa 4 Stunden einen Maximalwert von ca. 4,3 mg/h zu erreichen.

Danach klingt sie wieder ab.

Nach ca. 8 Stunden ist die Abnahme am stärksten.

b) Nach welcher Zeit ist die Dosierung maximal? Wie hoch ist sie dann.

$$f(x) = \underbrace{3 \cdot x}_u \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_v \Rightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = 3x \Rightarrow u' = 3; v = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'(x) = 3 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - 3x \cdot \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} = \underbrace{\left(3 - \frac{3}{4}x\right)}_u \underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_v$$

$$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = 3 - \frac{3}{4}x \Rightarrow u' = -\frac{3}{4}; v = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \left(3 - \frac{3}{4}x\right) \cdot \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} = \underbrace{\left(\frac{3}{16}x - \frac{3}{2}\right)}_u \underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_v$$

$$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = \frac{3}{16}x - \frac{3}{2} \Rightarrow u' = \frac{3}{16}; v = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{16} \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \left(\frac{3}{16}x - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} = \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{64}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(3 - \frac{3}{4}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_e = 4}} \text{ Stelle mit waagerechter Tangente}$$

$$f''(x_e) = f''(4) = \left(\frac{3}{16} \cdot 4 - \frac{3}{2}\right) \cdot e^{-1} \approx -0,276 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_e = 4$$

$$f(x_e) = f(4) = 3 \cdot 4 \cdot e^{-1} \approx \underline{\underline{4,415}}$$

Nach 4 Stunden ist die Dosierung maximal, sie beträgt dann 4,415 mg/h

c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Abnahme der Dosierung am stärksten?

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{3}{16}x - \frac{3}{2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{16}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_w = 8}} \text{ mögliche Wendestelle}$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \left( \frac{9}{16} - \frac{3}{64} \cdot 8 \right) \cdot e^{-2} \approx 0,025 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_w = 8$$

Nach 8 Stunden ist die Abnahme der Dosierung am stärksten.

d) Bestimmen Sie die Menge des verabreichten Medikamentes, wenn die Infusion 20 Stunden durchgeführt wird.

$$f(x) = 3 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$M = \int_0^{20} f(x) dx = \int_0^{20} \underbrace{3 \cdot x}_u \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{v'} dx$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u'v dx$$

$$u = 3x \Rightarrow u' = 3; v' = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v = \int e^{-\frac{1}{4}x} dx = -4e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$\int f(x) dx = 3x \cdot \left( -4e^{-\frac{1}{4}x} \right) - \int 3 \cdot \left( -4e^{-\frac{1}{4}x} \right) dx = -12x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 12 \int \underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{-4e^{-\frac{1}{4}x}} dx = -12(x+4)e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$M = \int_0^{20} f(x) dx = \left[ -12(x+4)e^{-\frac{1}{4}x} \right]_0^{20} = -288 \cdot e^{-5} + 48 \approx \underline{\underline{46,059}}$$

Nach 20 Stunden wurde eine Menge von 46,059 mg verabreicht.

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei die Funktion  $f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$  für  $k > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$

- a) Untersuchen Sie  $f_k$  auf Achsenschnittpunkte und berechnen Sie diese.  
 b) Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von  $f_k(x)$ .  
 c) Untersuchen Sie  $f_k$  auf Extrempunkte und berechnen Sie diese.  
 d) Untersuchen Sie  $f_k$  auf Wendepunkte und berechnen Sie diese. (Ohne Nachweis).  
 e) Berechnen Sie die Ortskurve  $f_{ok}(x)$  für die Extrempunkte.  $P_E \left( k-2 \mid -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$   
 f) Bestimmen Sie die Fläche  $A_k$  zwischen den Achsenschnittpunkten und der x-Achse.  
 g) Verwenden Sie folgende Wertetabelle und zeichnen Sie die Graphen für  $f_1(x)$ ;  $f_2(x)$ ;  $f_3(x)$ ;  $f_4(x)$  und die Ortskurve  $f_{ok}(x)$  in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie die Werte der markanten Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) mit dem Taschenrechner.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	-0,62	-0,85	-1,12	-1,38	-1,52	-1,25	0	3,4	11,2	27,7	60,9
$f_2(x)$	-0,72	-1,02	-1,39	-1,84	-2,27	-2,5	-2,06	0	5,6	18,4	45,7
$f_3(x)$	-0,82	-1,18	-1,67	-2,3	-3,03	-3,75	-4,12	-3,4	0	9,24	30,5
$f_4(x)$	-0,92	-1,35	-1,95	-2,76	-3,79	-5	-6,18	-6,8	-5,6	0	15,2

- h) Berechnen Sie für  $k = 4$  die Fläche  $A_4$  und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem.

- a) Achsenschnittpunkte

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$P_y : f_k(0) = \frac{5}{4}(0-k)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = -\frac{5}{4} \cdot k \cdot 1 = -\frac{5}{4}k \Rightarrow P_y \left( 0 \mid -\frac{5}{4}k \right)$$

$$P_x : f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x-k) \underset{\neq 0}{e^{\frac{1}{2}x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x-k) = 0 \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow P_x \left( k \mid 0 \right)$$

- b) Die ersten beiden Ableitungen

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{4}(x-k) \Rightarrow u' = \frac{5}{4}$$

$$\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{4}(x-k) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{8} \cdot (x-k) e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left[ \frac{5}{8} \cdot (x-k) + \frac{5}{4} \right] e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \Rightarrow u' = \frac{5}{8}$$

$$\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= \frac{5}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left[ \frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left\{ \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \\ &= \left[ \frac{5}{8} + \frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{8} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left[ \frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x}}} \end{aligned}$$

### c) Extrempunkte

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[ \frac{5}{8} \cdot (x-k) + \frac{5}{4} \right] \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8} \cdot (x-k) + \frac{5}{4} = 0 \quad | : \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow x-k+2 = 0 \quad | +k-2$$

$$\Leftrightarrow x \Rightarrow x_E = k-2 \text{ ist mögliche Extremstelle.}$$

Überprüfung mit der 2. Ableitung:  $f_k''(x_E) \neq 0$

$$f_k''(x_E) = f_k''(k-2) = \left\{ \frac{5}{16}[(k-2)-k] + \frac{5}{4} \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}$$

$$= \left[ \frac{5}{16}(k-2-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \left( -\frac{5}{8} + \frac{5}{4} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \left( -\frac{5}{8} + \frac{10}{8} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \frac{5}{8} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}(k-2)}}_{>0} > 0$$

Bei  $x = x_E = k-2$  liegt ein relatives Minimum.

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_E) = f_k(k-2) = \frac{5}{4}[(k-2)-k] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}$$

$$= \frac{5}{4}(k-2-k) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_{\text{Max}}} \left( k-2 \mid -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)}}$$

## d) Der Wendepunkt

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[ \frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{4} = 0 \quad | -\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}(x-k) = -\frac{5}{4} \quad | : \frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow x-k = -4 \quad | +k \Leftrightarrow x = k-4$$

Wendestelle bei  $x = x_W = k-4$

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_W) = f_k(k-4) = \frac{5}{4}[(k-4)-k] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = \frac{5}{4} \cdot (-4) \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} = -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2}$$

$$\underline{\underline{P_{k_W} \left( k-4 \mid -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)}}$$

## e) Die Ortskurve

$$P_{k_{\text{Max}}} \left( k-2 \mid -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right) \Rightarrow \underbrace{x = k-2}_{(1)} \text{ und } \underbrace{y = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}}_{(2)}$$

$$x = k-2 \Leftrightarrow k = x+2 \text{ in (2) eingesetzt: } y = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x+2)-1} = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x+1-1} = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\underline{\underline{\text{Funktionsgleichung der Ortskurve: } f_{\text{OK}}(x) = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

f) Die Fläche  $A_k$ 

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned} \int f_k(x) dx &= \int \frac{5}{4}(x-k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \int \frac{5}{4}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx - \int \frac{5}{4}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx \\ &= \frac{5}{4} \underbrace{\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx}_I - \frac{5}{4}k \cdot \underbrace{\int e^{\frac{1}{2}x} dx}_{II} = \frac{5}{4} \cdot I - \frac{5}{4}k \cdot II \end{aligned}$$

$$II: \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$I: \int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \text{ mit } u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$\text{und } v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \text{ wird}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx &= x \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int 1 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx \\ &= 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int f_k(x) dx &= \frac{5}{4} \cdot I - \frac{5}{4}k \cdot II = \frac{5}{4} \left( 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) - \frac{5}{4}k \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \\ &= \frac{5}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{2}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 5 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \\ &= \left( \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^k f_k(x) dx &= \left[ \left( \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k \\ &= \left( \frac{5}{2}k - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( \frac{5}{2} \cdot 0 - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right] \\ &= -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( -\frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^0 \right] = -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5 \end{aligned}$$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right| = \left| -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5 \right|$$



g) Die Graphen

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	-0,62	-0,85	-1,12	-1,38	-1,52	-1,25	0	3,4	11,2	27,7	60,9
$f_2(x)$	-0,72	-1,02	-1,39	-1,84	-2,27	-2,5	-2,06	0	5,6	18,4	45,7
$f_3(x)$	-0,82	-1,18	-1,67	-2,3	-3,03	-3,75	-4,12	-3,4	0	9,24	30,5
$f_4(x)$	-0,92	-1,35	-1,95	-2,76	-3,79	-5	-6,18	-6,8	-5,6	0	15,2

Markante Punkte:

$P_{k_y} \left( 0 \mid -\frac{5}{4}k \right)$  Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

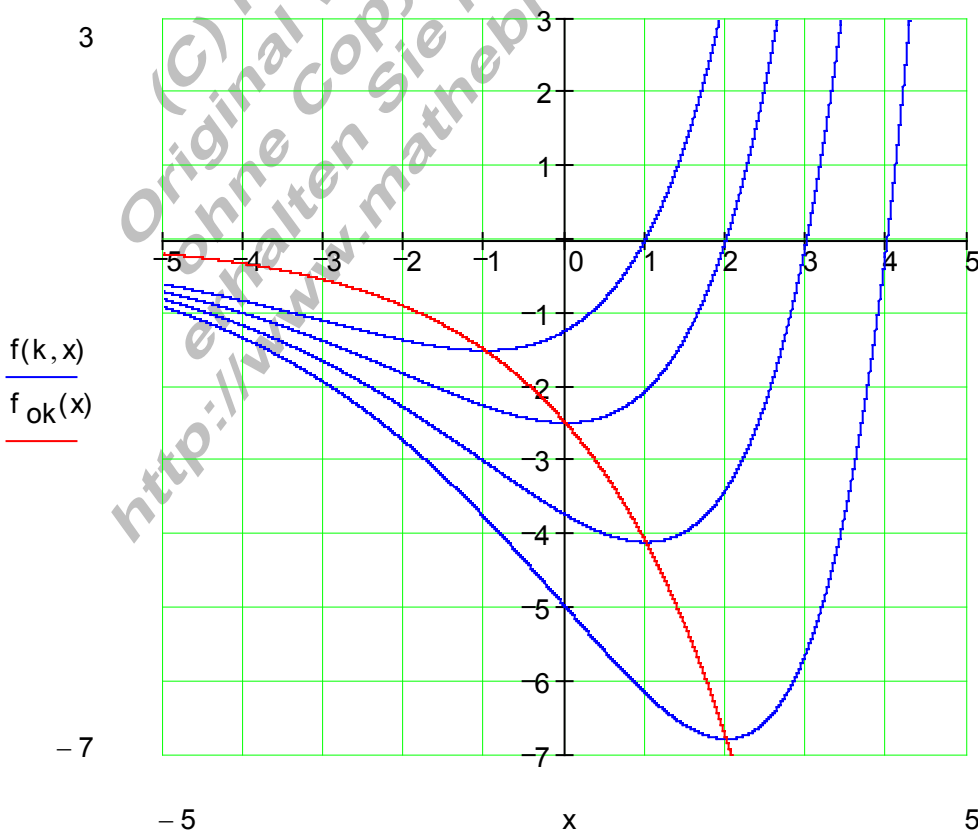
$P_{k_x} (k \mid 0)$  Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

$P_{k_{Max}} \left( k - 2 \mid -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$  Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_{Max}} (-1 \mid -1,52); P_{2_{Max}} (0 \mid -2,5); P_{3_{Max}} (1 \mid -4,12); P_{4_{Max}} (2 \mid -6,8)$

$P_{k_w} \left( k - 4 \mid -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)$  Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_w} (-3 \mid -1,12); P_{2_w} (-2 \mid -1,84); P_{3_w} (-1 \mid -3,03); P_{4_w} (0 \mid -5)$



h) Flächenberechnung für  $k = 4$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right| = \left| -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5 \right|$$

$$A_4 = \left| \int_0^4 f_4(x) dx \right| = \left| -5 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} + \frac{5}{2} \cdot 4 + 5 \right| = \left| -5 \cdot e^2 + 10 + 5 \right| = \left| -5 \cdot e^2 + 15 \right| \approx \underline{\underline{21,95FE}}$$

(C) Rudolf Brinkman  
Original Word-Dokumente  
ohne Copyright-Vermerk  
erhalten Sie im Onlineshop:  
<http://www.mathebrinkmann-shop.de>