Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Do 11.05.06
SG15D Gruppe A	NAME:		

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Wissensfragen.

a) Woran erkennt man Punktsymmetrie bei einer ganzrationalen Funktion? Notieren Sie dazu eine Beispielfunktion.
b) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen?
c) Sie sollen die Extrempunkte einer Ganzrationalen Funktion bestimmen. Beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie Sie dabei vorgehen.

Zu 1 a)
Punktsymmetrie liegt vor, wenn es in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten gibt.

Beispiel: $f(x) = x^3 + x$

Zu 1 b)
Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion hängt von ihrem Grad ab.
Grad gerade: f(x) hat höchstens n Nullstellen
Grad ungerade: f(x) hat mind. eine aber höchstens n Nullstellen.

Zu 1 c)
- Bilde die ersten zwei Ableitungen f'(x) und f''(x)
- Setze f'(x) = 0 und bestimme die Stellen (x – Werte) mit waagerechten Tangenten.
- Setze die x – Werte in f''(x) ein und entscheide ob ein Extrempunkt vorliegt und welcher Art er ist.

f''(x) > 0 → rel. Min. bzw. f''(x) < 0 → rel. Max.

- Setze die x – Werte in die Funktionsgleichung ein und berechne die Extremwerte.

2. Gegeben sind die Punkte $P_1(-3 \mid -8)$; $P_2(-1 \mid 8)$; $P_3(3 \mid -8)$; $P_4(5 \mid 8)$

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
b) Bestimmen Sie die Extrempunkte.
c) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte. (Finden Sie eine Nullstelle über das Horner-Schema)
d) Bestimmen Sie zusätzlich die Funktionswerte für f(-2) , f(2) und f(4) und tragen Sie alle bekannten Wertepaare in eine Wertetabelle ein.
e) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

Kontrollergebnis: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{11}{2}$

Zu 2 a)

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-3\,|\,-8) \Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -8$$

$$P_1(-1\,|\,8) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 8$$

$$P_1(3\,|\,-8) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -8$$

$$P_1(5\,|\,8) \Rightarrow f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	–3	9	–27	–8	
1	–1	1	–1	8	II – I
1	3	9	27	–8	II – I
1	5	25	125	8	II – I
1	–3	9	–27	–8	
0	2	–8	26	16	|: 2
0	6	0	54	0	|: 6
0	8	16	152	16	|: 8
1	–3	9	–27	–8	
0	1	–4	13	8	
0	1	0	9	0	III – II
0	1	2	19	2	IV – II
1	–3	9	–27	–8	
0	1	–4	13	8	
0	0	4	–4	–8	|: 4
0	0	6	6	–6	|: 6
1	–3	9	–27	–8	
0	1	–4	13	8	
0	0	1	–1	–2	
0	0	1	1	–1	IV – III
1	–3	9	–27	–8	
0	1	–4	13	8	
0	0	1	–1	–2	
0	0	0	2	1	

$$2a_3 = 1 \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$

$$a_2 - a_3 = -2$$

$$\Leftrightarrow a_2 - \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} \,\Big|\, + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$a_1 - 4a_2 + 13a_3 = 8$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 6 + \frac{13}{2} = 8 \,\Big|\, -6 - \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -\frac{9}{2}}$$

$$a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = -8$$

$$\Leftrightarrow a_0 + \frac{27}{2} - \frac{27}{2} - \frac{27}{2} = -\frac{16}{2} \,\Big|\, + \frac{27}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{11}{2}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{11}{2}}}$$

Zu 2 b)

Extrempunkte:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}\Rightarrow f''(x)=3x-3$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}=0\,|:\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$$

$$p=-2;q=-3\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+3=4\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{4}=2$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=1+2=3\\x_2=1-2=-1\end{array}\right.$$

$$f''(x_1)=f''(3)=6>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=3$$

$$f''(x_2)=f''(-1)=-6<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-1$$

$$f(x_1)=f(3)=-8\Rightarrow \underline{\underline{P_{min}(3\,|\,-8)}}$$

$$f(x_2)=f(-1)=8\Rightarrow \underline{\underline{P_{max}(-1\,|\,8)}}$$

Zu 2 c)

Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}$

$$P_y:f(0)=\frac{11}{2}\Rightarrow\boxed{P_y\left(0\,|\,\frac{11}{2}\right)}$$

Nullstellen: $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}=0$

$$\begin{array}{llllll} & & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ x=1 & \downarrow & & \frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{11}{2} \\ \hline & & \frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{11}{2} & 0 \quad =f(1) \end{array}\qquad\Rightarrow\boxed{x_1=1}$$

$$\text{Restpolynom}:\frac{1}{2}x^2-x-\frac{11}{2}=0\Leftrightarrow x^2-2x-11=0$$

$$p=-2;q=-11\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+11=12\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{12}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=1+\sqrt{12}\approx4,46\\x_2=1-\sqrt{12}\approx-2,46\end{array}\right.$$

$$\boxed{P_{x1}(1\,|\,0);P_{x2}\left(1+\sqrt{12}\approx4,46\,|\,0\right);P_{x3}\left(1-\sqrt{12}\approx-2,46\,|\,0\right)}$$

Zu 2 d)

$$f(-2) = -4 - 6 + 9 + \frac{11}{2} = 4{,}5$$

$$f(2) = 4 - 6 - 9 + \frac{11}{2} = -5{,}5$$

$$f(4) = 32 - 24 - 18 + \frac{11}{2} = -4{,}5$$

	P_1	P_{x3}		P_2 / P_{max}	P_y	P_{x1}		P_3 / P_{min}		P_{x2}	P_4
x	-3	$-2{,}46$	-2	-1	0	1	2	3	4	$4{,}46$	5
$f(x)$	-8	0	$4{,}5$	8	$5{,}5$	0	$-5{,}5$	-8	$-4{,}5$	0	8

Zu 2 e)

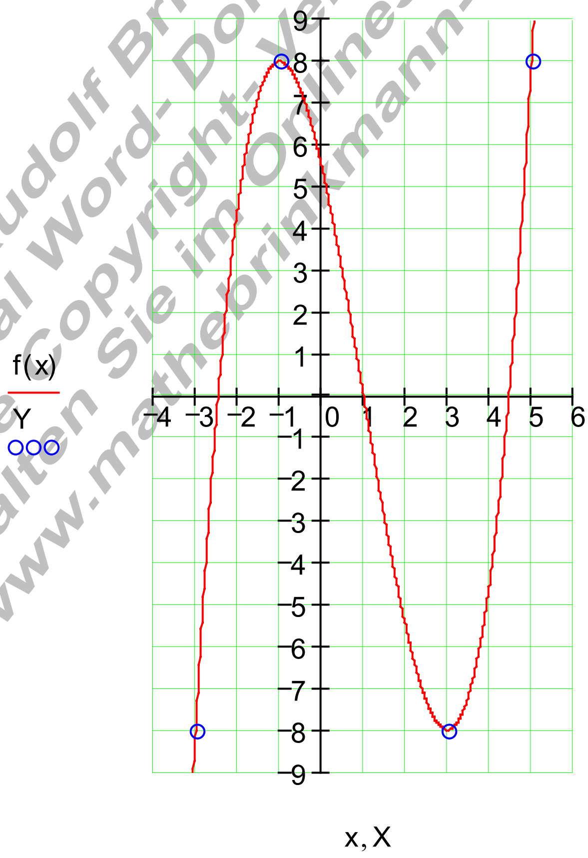
Probe:

$f(x_1) = -8$

$f(x_2) = 8$

$f(x_3) = -8$

$f(x_4) = 8$

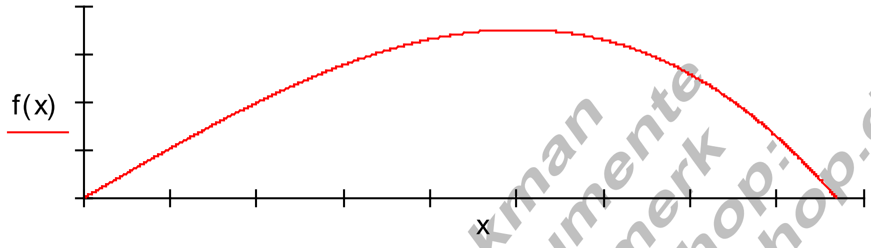


3. Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x \qquad \text{für } x > 0$$

Maßstab: Eine Einheit in x – Richtung bedeutet 10 m

Eine Einheit in y – Richtung bedeutet 1m



a) Welche maximale Höhe erreicht der Speer und wie weit ist er dann vom Abwurfpunkt entfernt?
b) Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?
c) Welche Höhe hat der Speer in 70 m Entfernung vom Abwurfpunkt?

Zu 3a)

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{21}{250}x^2 + \frac{21}{10} \Rightarrow f''(x) = -\frac{21}{125}x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{21}{250}x^2 + \frac{21}{10} = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 5$$

nur $x = 5$ zählt, da $x > 0$ sein soll

$f''(5) = -25 < 0 \Rightarrow$ rel. Max. für $x = 5$

$f(5) = 7 \Rightarrow \underline{\underline{P_{max}(5\,|\,7)}}$

$x = 5$ bedeutet 50 m

Der Speer erreicht eine maximale Höhe von 7 m.

Er ist dann 50 m vom Abwurfpunkt entfernt.

Zu 3 b)

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle

$$-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{75} \approx \pm 8{,}66$$

nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt

$x = 8{,}66$ bedeutet 86,6 m

Der Speer kommt 86,6 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.

Zu 3 c)

$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x$

70m bedeutet $x = 7$

$f(7) = 5{,}096$

Der Speer hat in einer Entfernung von 70m von der Abwurfstelle eine Höhe von 5,096m

Viel Erfolg !!

Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Do 11.05.06
SG15D Gruppe B	NAME:		

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Wissensfragen.

a) Woran erkennt man Achsensymmetrie bei einer ganzrationalen Funktion? Notieren Sie dazu eine Beispielfunktion.
b) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen?
c) Sie sollen die Extrempunkte einer Ganzrationalen Funktion bestimmen. Beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie Sie dabei vorgehen.

Zu 1 a)
Achsensymmetrie liegt vor, wenn es in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten gibt.

Beispiel: $f(x) = x^4 + x^2 + 2$

Zu 1 b)
Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion hängt von ihrem Grad ab.
Grad gerade: f(x) hat höchstens n Nullstellen
Grad ungerade: f(x) hat mind. eine aber höchstens n Nullstellen.

Zu 1 c)
- Bilde die ersten zwei Ableitungen f'(x) und f''(x)
- Setze f'(x) = 0 und bestimme die Stellen (x – Werte) mit waagerechten Tangenten.
- Setze die x – Werte in f''(x) ein und entscheide ob ein Extrempunkt vorliegt und welcher Art er ist.

$f''(x) > 0 \rightarrow$ rel. Min. bzw. $f''(x) < 0 \rightarrow$ rel. Max.

- Setze die x – Werte in die Funktionsgleichung ein und berechne die Extremwerte.

2. Gegeben sind die Punkte $P_1(-3\,|\,8)$; $P_2(-1\,|\,-8)$; $P_3(3\,|\,8)$; $P_4(5\,|\,-8)$

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
b) Bestimmen Sie die Extrempunkte.
c) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
(Finden Sie eine Nullstelle über das Horner-Schema)
d) Bestimmen Sie zusätzlich die Funktionswerte für f(-2) , f(2) und f(4) und tragen Sie alle bekannten Wertepaare in eine Wertetabelle ein.
e) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

Kontrollergebnis: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2}$

Zu 2 a)

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-3\,|\,8) \Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 8$$

$$P_1(-1\,|\,-8) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -8$$

$$P_1(3\,|\,8) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 8$$

$$P_1(5\,|\,-8) \Rightarrow f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−3	9	−27	8	
1	−1	1	−1	−8	II − I
1	3	9	27	8	II − I
1	5	25	125	−8	II − I
1	−3	9	−27	8	
0	2	−8	26	−16	|: 2
0	6	0	54	0	|: 6
0	8	16	152	−16	|: 8
1	−3	9	−27	8	
0	1	−4	13	−8	
0	1	0	9	0	III − II
0	1	2	19	−2	IV − II
1	−3	9	−27	8	
0	1	−4	13	−8	
0	0	4	−4	8	|: 4
0	0	6	6	6	|: 6
1	−3	9	−27	8	
0	1	−4	13	−8	
0	0	1	−1	2	
0	0	1	1	1	IV − III
1	−3	9	−27	8	
0	1	−4	13	−8	
0	0	1	−1	2	
0	0	0	2	−1	

$$2a_3 = -1 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{2}}$$

$$a_2 - a_3 = 2$$

$$\Leftrightarrow a_2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} \,\Big|\, -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$a_1 - 4a_2 + 13a_3 = -8$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 6 - \frac{13}{2} = -8 \,\Big|\, +6 + \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = \frac{9}{2}}$$

$$a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = 8$$

$$\Leftrightarrow a_0 - \frac{27}{2} + \frac{27}{2} + \frac{27}{2} = \frac{16}{2} \,\Big|\, -\frac{27}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = -\frac{11}{2}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2}}}$$

Zu 2 b)

Extrempunkte :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} \Rightarrow f''(x) = -3x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} = 0 \,|\, : \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$p = -2; q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_1 = 1 + 2 = 3 \\ x_2 = 1 - 2 = -1 \end{array}\right.$$

$$f''(x_1) = f''(3) = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 3$$

$$f''(x_2) = f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = -1$$

$$f(x_1) = f(3) = 8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{max}(3\,|\,8)}}$$

$$f(x_2) = f(-1) = -8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{min}(-1\,|\,-8)}}$$

Zu 2 c)

Achsenschnittpunkte von $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2}$

$$P_y : f(0) = -\frac{11}{2} \Rightarrow \boxed{P_y\left(0\,|\,-\frac{11}{2}\right)}$$

Nullstellen : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2} = 0$

$$\begin{array}{llllll} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{11}{2} & \\ x = 1 & \downarrow & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{11}{2} & \Rightarrow \boxed{x_1 = 1} \\ \hline & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{11}{2} & 0 & = f(1) \end{array}$$

$$\text{Restpolynom} : -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 11 = 0$$

$$p = -2; q = -11 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 11 = 12 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{12}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_1 = 1 + \sqrt{12} \approx 4,46 \\ x_2 = 1 - \sqrt{12} \approx -2,46 \end{array}\right.$$

$$\boxed{P_{x1}(1\,|\,0); P_{x2}\left(1 + \sqrt{12} \approx 4,46\,|\,0\right); P_{x3}\left(1 - \sqrt{12} \approx -2,46\,|\,0\right)}$$

Zu 2 d)

$$f(-2) = 4 + 6 - 9 - \frac{11}{2} = -4,5$$

$$f(2) = -4 + 6 + 9 - \frac{11}{2} = 5,5$$

$$f(4) = -32 + 24 + 18 - \frac{11}{2} = 4,5$$

	P_1	P_{x3}		P_2 / P_{min}	P_y	P_{x1}		P_3 / P_{max}		P_{x2}	P_4
x	–3	–2,46	–2	–1	0	1	2	3	4	4,46	5
f(x)	8	0	–4,5	–8	–5,5	0	5,5	8	4,5	0	–8

Zu 2 e)

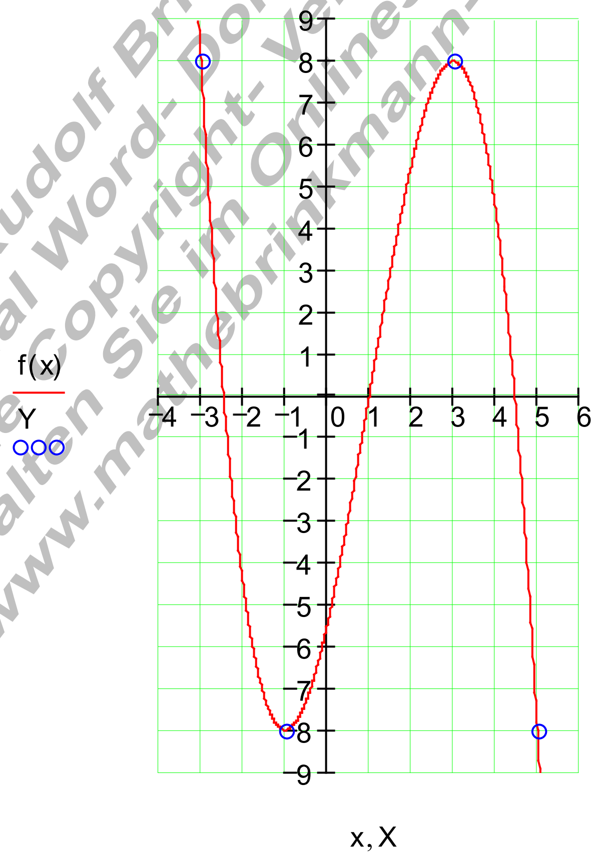
Probe:

$f(x_1) = 8$

$f(x_2) = -8$

$f(x_3) = 8$

$f(x_4) = -8$

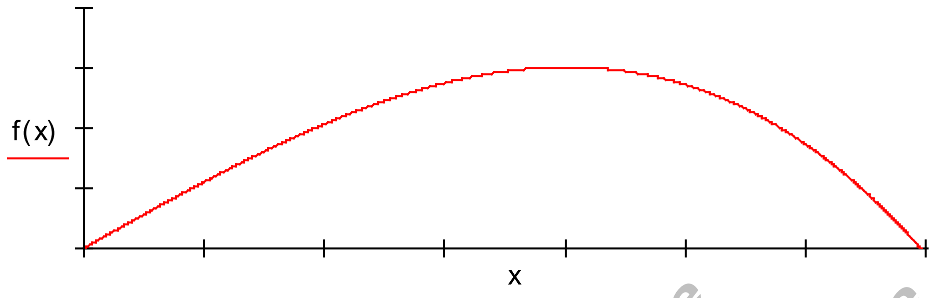


3. Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x \qquad \text{für } x > 0$$

Maßstab: Eine Einheit in x – Richtung bedeutet 10 m

Eine Einheit in y – Richtung bedeutet 1m



a) Welche maximale Höhe erreicht der Speer und wie weit ist er dann vom Abwurfpunkt entfernt?
b) Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?
c) Welche Höhe hat der Speer in 60 m Entfernung vom Abwurfpunkt?

Zu 3a)

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{9}{64}x^2 + \frac{9}{4} \Rightarrow f''(x) = -\frac{9}{32}x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{64}x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$$

nur $x = 4$ zählt, da $x > 0$ sein soll

$$f''(4) = -\frac{9}{8} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. für } x = 4$$

$$f(4) = 6 \Rightarrow \underline{\underline{P_{max}(4|6)}}$$

$x = 4$ bedeutet 40 m

Der Speer erreicht eine maximale Höhe von 6 m.

Er ist dann 40 m vom Abwurfpunkt entfernt.

Zu 3 b)

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle

$$-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{48} \approx \pm 6{,}93$$

nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt

$x = 6{,}93$ bedeutet 69,3 m

Der Speer kommt 69,3 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.

Zu 3 c)

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x$$

60m bedeutet $x = 6$

$f(6) = 3{,}275$

Der Speer hat in einer Entfernung von 60m von der Abwurfstelle eine Höhe von 3,375m

Viel Erfolg !!