

Klassenarbeit SG15/25D	Mathematik Bearbeitungszeit 180 min. Di 04.03.08 NAME: Lösungen
-----------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------

Hilfsmittel: Taschenrechner, Tabelle der Normalverteilung

Formulieren Sie zu jeder Aufgabe einen passenden Antwortsatz!

Verwenden Sie bei der Bearbeitung die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung üblichen Schreibweisen und Darstellungen.

1.	Erklären Sie die Begriffe Bernoulli-Experiment , Trefferwahrscheinlichkeit , Bernoullikette und Länge einer Bernoullikette .
----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A1	Ausführliche Lösung
	<p>Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat.</p> <p>Die Ergebnisse werden Erfolg (Treffer) oder Misserfolg (kein Treffer) genannt. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer (p).</p> <p>Eine Bernoullikette entsteht, wenn dasselbe Bernoulli-Experiment mehrmals nacheinander ausgeführt wird.</p> <p>Die Länge einer Bernoullikette gibt an, wie oft das einzelne Experiment nacheinander ausgeführt wird.</p>

2.	Bei welchen der folgenden Zufallsexperimente handelt es sich um Bernoulliketten? Geben Sie, wenn möglich, die Trefferwahrscheinlichkeit p und die Länge n der Bernoullikette an.
a)	Ein Würfel wird dreimal geworfen und die Anzahl der Sechsen notiert.
b)	Ein Würfel wird dreimal geworfen und die Augensumme notiert.
c)	Aus einer Urne mit 3 weißen und 7 roten Kugeln wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis die erste rote Kugel erscheint.
d)	Aus einer Urne mit 3 weißen und 7 roten Kugeln wird 4-mal mit Zurücklegen jeweils eine Kugel gezogen.
e)	Bei einem Glücksrad erscheint in 50% aller Fälle eine 1, in jeweils 25% der Fälle eine 2 bzw. eine 3. Das Rad wird 4-mal gedreht und die Ziffern als 4-stellige Zahl notiert.
f)	Das Glücksrad aus (e) wird achtmal gedreht. Jedes Mal, wenn die 3 erscheint, erhält man 10 Cent.
g)	Das Glücksrad aus (e) wird so oft gedreht, bis die 3 erscheint, höchstens jedoch fünfmal.

A2	Lösung
a)	Bernoullikette; $n = 3$; Treffer: 6; $p = 1/6$
b)	Keine Bernoullikette
c)	Keine Bernoullikette
d)	Bernoullikette; $n = 4$; Treffer: weiß $p = 3/10$; Treffer: rot $p = 7/10$
e)	Keine Bernoullikette
f)	Bernoullikette; $n = 8$; Treffer: Zahl 3; $p = 0,25$
g)	Bernoullikette; Treffer: 3; $p = 0,25$; Kettenlänge maximal 5

3.	Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten.
a)	$n = 160$ und $p = 0,45$ bestimmen Sie $P(X \geq 76)$
b)	$n = 200$ und $p = 0,63$ bestimmen Sie $P(X \leq 110)$
c)	$n = 1000$ und $p = 0,28$ bestimmen Sie $P(270 \leq X \leq 290)$
d)	Bestimmen Sie die 95%- Umgebung vom Erwartungswert für $n = 250$ und $p = 0,7$
Hinweis: Bei allen Aufgaben handelt es sich um einen n- Stufigen Bernoulli- Versuch.	

A3 a	Ausführliche Lösung
$n = 160 \quad p = 0,45 \quad P(X \geq 76)$ $\mu = n \cdot p = 160 \cdot 0,45 = 72$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{72 \cdot 0,55} = \sqrt{39,6} \approx 6,293 > 3$ $[... \{69...72...75\} \{76...160\}]$ $P(X \geq 76) = \frac{1}{2} [1 - P(69 \leq X \leq 75)]$ $P(69 \leq X \leq 75) = P(68,5 \leq X \leq 75,5)$ $r = 3,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{3,5}{6,293} \Rightarrow r \approx 0,56 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0,56$ $P(69 \leq X \leq 75) \approx 0,425$ $P(X \geq 76) = \frac{1}{2} [1 - 0,425] \approx \underline{\underline{0,288}}$	

A3 b	Ausführliche Lösung
$n = 200 \quad p = 0,63 \quad P(X \leq 110)$ $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,63 = 126$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{126 \cdot 0,37} = \sqrt{46,62} \approx 6,828 > 3$ $[\{0...110\} \{111...126...141\} ...]$ $P(X \leq 110) = \frac{1}{2} [1 - P(111 \leq X \leq 141)]$ $P(111 \leq X \leq 141) = P(110,5 \leq X \leq 141,5)$ $r = 15,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{15,5}{6,828} \Rightarrow r \approx 2,27 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 2,27$ $P(111 \leq X \leq 141) \approx 0,977$ $P(X \leq 110) = \frac{1}{2} [1 - 0,977] \approx \underline{\underline{0,012}}$	

A3 c	Ausführliche Lösung
	$n = 1000 \quad p = 0,28 \quad P(270 \leq X \leq 290)$ $\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0,28 = 280$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{280 \cdot 0,72} = \sqrt{201,6} \approx 14,199 > 3$ [...{270...280...290}...]
	$P(270 \leq X \leq 290) = P(269,5 \leq X \leq 290,5)$ $r = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{14,199} \Rightarrow r \approx 0,74 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0,74$ $P(270 \leq X \leq 290) \approx \underline{\underline{0,541}}$

A3 d	Ausführliche Lösung
	$n = 250 \quad p = 0,7$ $\mu = n \cdot p = 250 \cdot 0,7 = 175$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{175 \cdot 0,3} = \sqrt{52,5} \approx 7,246 > 3$ 95% – Umgebung : [...{?...175...?}...]
	$z = 1,96 \quad r = z \cdot \sigma = 1,96 \cdot 7,246 \approx 14,2$ $\mu - r = 175 - 14,2 \approx 160,8$ Wahl: 161 $\mu + r = 175 + 14,2 \approx 189,2$ Wahl: 189 $P(161 \leq X \leq 189) = P(160,5 \leq X \leq 189,5)$ $r = 14,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{14,5}{7,246} \Rightarrow r \approx 2,00 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 2,00$ $P(161 \leq X \leq 189) \approx \underline{\underline{0,954}}$

4. Ein Würfel wird 600 mal geworfen. (Ereignis die Zahl 6, $p = 1/6$)
 Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man mindestens 90- mal, höchstens 110- mal die Augenzahl 6?

A4	Ausführliche Lösung
	$n = 600 \quad p = 1/6 \quad P(90 \leq X \leq 110)$ $\mu = n \cdot p = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{100 \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{83,3} \approx 9,129 > 3$ [...{90...100...110}...]
	$P(90 \leq X \leq 110) = P(89,5 \leq X \leq 110,5)$ $r = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{9,129} \Rightarrow r \approx 1,15 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,15$ $P(90 \leq X \leq 110) \approx \underline{\underline{0,750}}$ Die Wahrscheinlichkeit bei 600 Würfeln mindestens 90- mal und höchstens 110- mal die 6 zu werfen ist <u>0,750</u>

5.	In einer bestimmten Stadt an einer bestimmten Stelle führt die Polizei in regelmäßigen Abständen in der Nacht von Sonnabend auf Sonntag zwischen 1 Uhr und 4 Uhr Verkehrskontrollen durch. Dabei muss der Fahrer „in die Röhre pusten“, um festzustellen, ob der Alkoholgehalt im Blut im gesetzlich erlaubten Rahmen liegt oder nicht. Aus mehrjähriger Erfahrung weiß die Polizei, dass bei etwa 10% aller Verkehrsteilnehmer, die an der entsprechenden Stelle kontrolliert werden die „Promillegrenze“ überschritten wird. Wir nennen diese Personen hier kurz „Alkoholsünder“. Am letzten Wochenende wurden 120 Verkehrsteilnehmer überprüft.
a)	Überprüfen Sie, ob für die Verteilungsfunktion der Laplace- Bedingung genügt und kommentieren Sie das Ergebnis.
b)	Mit wie vielen Fahrverboten kann die Polizei bei der Überprüfung von 120 Verkehrsteilnehmern rechnen?
c)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Alkoholsünder zwischen 8 und 16?
d)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Alkoholsünder zwischen 8 und 16?
e)	Die Annahme $p \leq 0,1$ für Alkoholsünder soll auf einem Signifikanzniveau von höchstens 5% getestet werden. Bestimmen Sie den Annahme und den Ablehnungsbereich. Überprüfen Sie für den gewählten Ablehnungsbereich den Fehler 1. Art und kommentieren Sie das Ergebnis.
f)	Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion und kennzeichnen Sie markante Stellen und Bereiche.

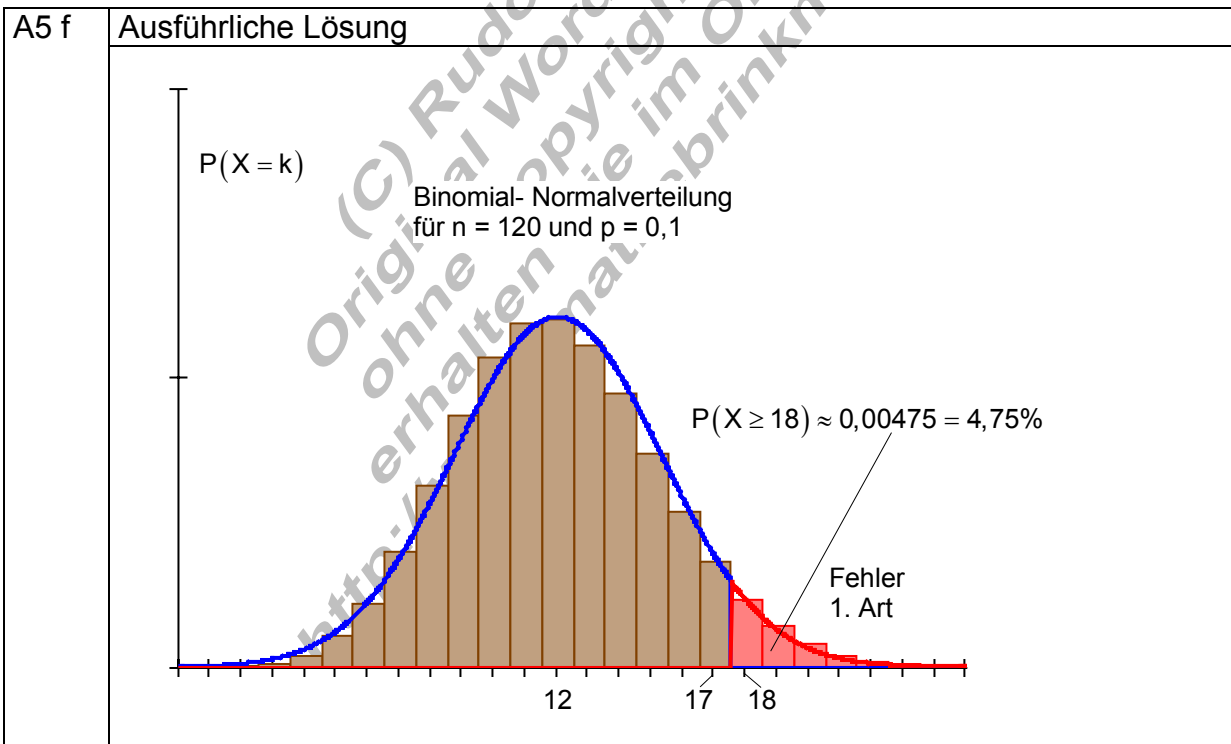
A5 a	Ausführliche Lösung
	<p>Laplace- Bedingung: $p = 0,1 \quad n = 120$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{120 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = \sqrt{10,8} \approx 3,29$ Laplace- Bedingung: $\sigma > 3$ ist erfüllt. Zur Berechnung der Umgebungswahrscheinlichkeiten kann die Tabelle einer normalverteilten Zufallsvariablen verwendet werden.</p>

A5 b	Ausführliche Lösung
	Die Polizei kann bei der Überprüfung von $n = 120$ Personen mit etwa 12 Fahrverboten rechnen. Das entspricht dem Erwartungswert.

A5 c	Ausführliche Lösung
	$P(X = 12) \text{ Radius} = 0,5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{0,5}{\sqrt{10,8}} \approx 0,152 \Rightarrow P(X = 12) \approx 0,119$ Die Wahrscheinlichkeit für den Erwartungswert beträgt etwa 0,119.

A5 d	Ausführliche Lösung
	$P(8 \leq X \leq 16) \text{ Radius} = 4,5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{4,5}{\sqrt{10,8}} \approx 1,369 \Rightarrow P(8 \leq X \leq 16) \approx 0,829$ Die Anzahl der Alkoholsünder liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,829 zwischen 8 und 16 einschließlich.

A5 e	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>Hypothesentest: $p \leq 0,1$ $\mu = 12$ $\sigma = \sqrt{10,8} \approx 3,286$ Signifikanzniveau $\alpha \leq 0,05$ Es handelt sich um einen rechtsseitigen Hypothesentest. Damit wird $\mu + 1,64 \cdot \sigma = 12 + 1,64 \cdot \sqrt{10,8} \approx 17,38$ Annahmehereich: $A = \{0 \dots 12 \dots 17\}$ Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{18 \dots 120\}$ Zu prüfen ist der Ablehnungsbereich: $P(18 \leq X \leq 120) \leq 0,05$ $\{0 \dots 6\} \{7 \dots 12 \dots 17\} \{18 \dots 120\}$ $P(18 \leq X \leq 120) = \frac{1}{2} [1 - P(7 \leq X \leq 17)]$ $P(7 \leq X \leq 17) = P(6,5 \leq X \leq 17,5) \Rightarrow r = 5,5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{5,5}{\sqrt{10,8}} \approx 1,673$ $P(7 \leq X \leq 17) \approx 0,905 \Rightarrow P(18 \leq X \leq 120) = \frac{1}{2} [1 - 0,905] \approx 0,0475$ Der Fehler 1. Art beträgt etwa 0,0475. In etwa 4,75% aller Fälle liegt das Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich, so dass die wahre Hypothese $p = 0,1$ zu Unrecht verworfen wird.</p>
------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



Leistungsbewertung				
Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1+	97 - 100	1	4	8
1	93 - 96			
1-	89 - 92	2	7	14
2+	85 - 88			
2	80 - 84	3a	3	6
2-	75 - 79	3b	3	6
3+	70 - 74	3c	3	6
3	65 - 69	3d	4	8
3-	60 - 64			
4+	55 - 59	4	5	10
4	50 - 54			
4-	45 - 49	5a	2	4
5+	39 - 44	5b	1	2
5	30 - 38	5c	3	6
5-	20 - 29	5d	3	6
6	0 - 19	5e	9	18
		5f	3	6
		Summe	50	100

Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1+	97 - 100	1	4	8
1	93 - 96			
1-	89 - 92	2	7	14
2+	85 - 88			
2	80 - 84	3a	3	6
2-	75 - 79	3b	3	6
3+	70 - 74	3c	3	6
3	65 - 69	3d	4	8
3-	60 - 64			
4+	55 - 59	4	5	10
4	50 - 54			
4-	45 - 49	5a	2	4
5+	39 - 44	5b	1	2
5	30 - 38	5c	3	6
5-	20 - 29	5d	3	6
6	0 - 19	5e	9	18
		5f	3	6
		Summe	50	100