Klassenarbeit SG15/25D	**Mathematik Bearbeitungszeit 135 min.** **NAME: Lösung**	**Di 27.11.07**

1. In einer Gruppe von 1000 Personen haben sich 700 prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wurde jedes Gruppenmitglied danach befragt, wer an einer Grippe erkrankte.
Die Ergebnisse werden in einer 4 – Feldtafel dargestellt.

Gruppe	B (erkrankt)	$\overline{B}$ (nicht erkrankt)	Summe
A mit Impfung	80	620	700
$\overline{A}$ ohne Impfung	120	180	300
Summe	200	800	1000

Das Ereignis A sei „Person ist geimpft“ und das Ereignis B: „Person erkrankt“.
Berechnen Sie:

$P(A)$ $P(B)$ $P(A\cap B)$ $P_A(B)$

$P_B(A)$ $P(\overline{A}\cap B)$ $P_{\overline{A}}(B)$

Was bedeuten die einzelnen Ergebnisse?

A1 Ausführliche Lösung

A: Die Person ist geimpft B: Die Person ist erkrankt	$\overline{A}$: Die Person ist nicht geimpft $\overline{B}$: Die Person ist nicht erkrankt
$P(A)=\frac{700}{1000}=0{,}7$	Bei der zufälligen Auswahl einer Person, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine geimpfte Person zu finden 0,7
$P(B)=\frac{200}{1000}=0{,}2$	Bei der zufälligen Auswahl einer Person, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine erkrankte Person zu finden 0,2
$P(A\cap B)=\frac{80}{1000}=0{,}08$	Bei der zufälligen Auswahl einer Person, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine trotz Impfung erkrankte Person zu finden 0,08
$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{80}{1000}}{\frac{700}{1000}}=\frac{80}{700}\approx 0{,}114$	Eine Person, von der man weiß, dass sie geimpft wurde ist mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,114 dennoch erkrankt.
$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{80}{1000}}{\frac{200}{1000}}=\frac{80}{200}=0{,}4$	Eine Person, von der man weiß, dass sie erkrankt ist, wurde mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 geimpft.
$P(\overline{A}\cap B)=\frac{120}{1000}=0{,}12$	Bei der zufälligen Auswahl einer Person, ist die Wahrscheinlichkeit eine nicht geimpfte und auch erkrankte Person zu finden 0,12
$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{120}{1000}}{\frac{300}{1000}}=\frac{120}{300}=0{,}4$	Eine Person, von der man weiß, dass sie nicht geimpft wurde ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 auch erkrankt.

2. In einem Land der dritten Welt sind 20% der Bevölkerung an Aids erkrankt.
Von einem Aids- Test weiß man, dass er nicht ganz sicher ist.
Es können zwei Fehler auftreten.

i) Bei 96% der Personen, von denen man weiß, das sie erkrankt sind, fällt der Test positiv aus beim Rest wird die Krankheit nicht erkannt.

ii) Bei 94% der Personen, von denen man weiß, das sie gesund sind, fällt der Test negativ aus, beim Rest wird fälschlicherweise ein Aidsverdacht ausgesprochen.

a) Stellen Sie nach folgendem Schema eine Vierfeld-Tafel auf:

	K	$\overline{K}$	
T	x	x	x
$\overline{T}$	x	x	x
	x	x	1

T: Testergebnis ist positiv
$\overline{T}$: Testergebnis ist negativ
K: Person ist erkrankt
$\overline{K}$: Person ist nicht erkrankt, also gesund

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer erkrankten Person der Test negativ ausfällt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, von der man weiß, dass bei ihr der Test positiv ausgefallen ist, wirklich an Aids erkrankt ist?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, von der man weiß, dass bei ihr der Test negativ ausgefallen ist, wirklich gesund ist?

e) Zeichnen Sie den zur Vierfeldtafel gehörenden Baum und tragen Sie in ihm alle auftretenden Wahrscheinlichkeiten mit der genauen Bezeichnung ein.
(z.B. $P(T) = ; P_{\overline{T}}(K) = ; P\left(T \cap \overline{K}\right) =$ usw.)
Falls nötig, stellen Sie das Ergebnis als Bruch dar.

Schreiben Sie zu jeder Frage einen aussagekräftigen Antwortsatz.

A2 a) Ausführliche Lösung

Bekannte Daten:

20% der Bevölkerung ist erkrankt:

$P(K) = 0,2$ und $P(\overline{K}) = 0,8$

Bei 96% der Personen, von denen man weiß, das sie erkrankt sind, fällt der Test positiv aus:

$P_K(T) = 0,96$

Bei 94% der Personen, von denen man weiß, das sie gesund sind, fällt der Test negativ aus:

$P_{\overline{K}}(\overline{T}) = 0,94$

Berechnung der Tabellenwerte:

$$P_K(T) = \frac{P(K \cap T)}{P(K)} = \frac{P(K \cap T)}{0,2} = 0,96 \Rightarrow P(K \cap T) = 0,96 \cdot 0,2 = 0,192$$

$$P_{\overline{K}}(\overline{T}) = \frac{P(\overline{K} \cap \overline{T})}{P(\overline{K})} = \frac{P(\overline{K} \cap \overline{T})}{0,8} = 0,94 \Rightarrow P(\overline{K} \cap \overline{T}) = 0,94 \cdot 0,8 = 0,752$$

Die restlichen Tabellenwerte lassen sich durch Addition bzw. Subtraktion errechnen.

	K	$\overline{K}$	
T	0,192	0,048	0,24
$\overline{T}$	0,008	0,752	0,76
	0,2	0,8	1

T: Testergebnis ist positiv

$\overline{T}$: Testergebnis ist negativ

K: Person ist erkrankt

$\overline{K}$: Person ist nicht erkrankt, also gesund

A2 b) Ausführliche Lösung

$P(K \cap \overline{T}) = 0,008$

Ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer erkrankten Person der Test negativ ausfällt.

A2 c) Ausführliche Lösung

$$P_T(K) = \frac{P(T \cap K)}{P(T)} = \frac{0,192}{0,24} = \underline{\underline{0,8}}$$

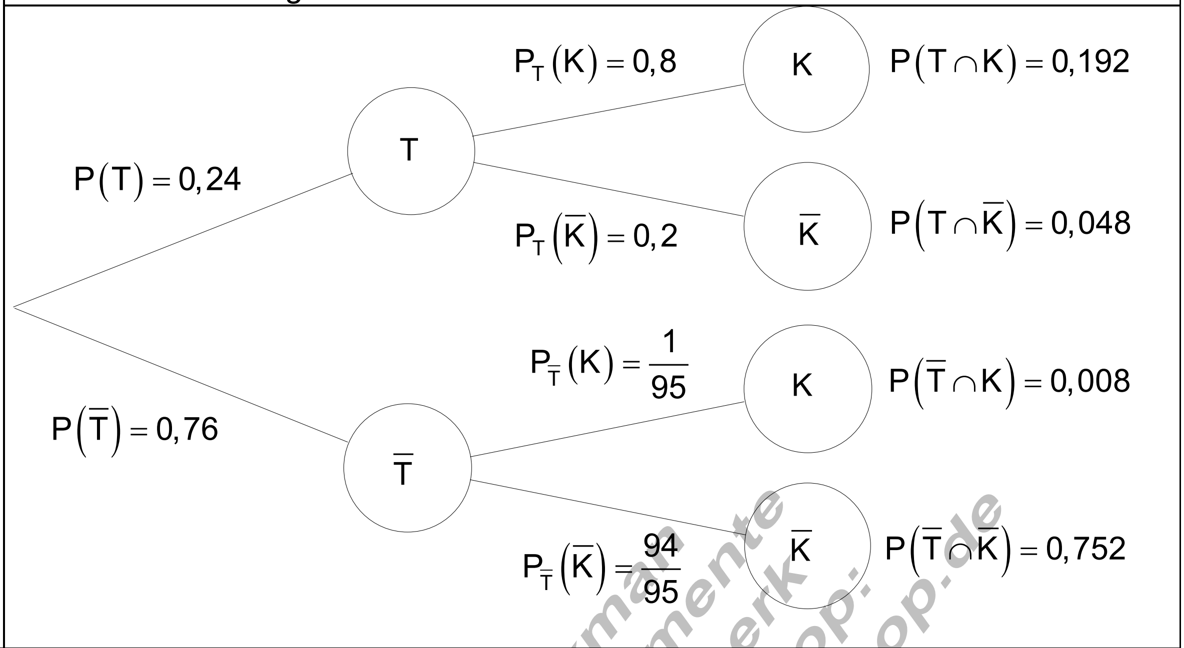
Eine Person, von der man weiß, dass bei ihr der Aids- Test positiv ausgefallen ist, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 (80%) auch tatsächlich erkrankt.

A2 d) Ausführliche Lösung

$$P_{\overline{T}}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{K})}{P(\overline{T})} = \frac{0,752}{0,76} \approx \underline{\underline{0,989}}$$

Eine Person, von der man weiß, dass bei ihr der Aids- Test negativ ausgefallen ist, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,989 (98,9%) auch tatsächlich gesund.

A2 e) Ausführliche Lösung



3. Die Ergebnisse einer repräsentativen Umfrage anlässlich einer Kommunalwahl sind in folgenden Vierfeld- Tafeln dargestellt.

	Partei A	sonstige	gesamt
weiblich	22%	33%	55%
männlich	18%	27%	45%
gesamt	40%	60%	100%

	Partei A	sonstige	gesamt
bis 40 J	16%	30%	46%
über 40 J	24%	30%	54%
gesamt	40%	60%	100%

a) Ist die Wahl einer Partei geschlechtsabhängig?

b) Ist die Wahl einer Partei vom Alter der Wähler abhängig?

Hinweis:
Gilt $P_A(B) = P(B)$, so beeinflusst das Eintreten des Ereignisses A die Wahrscheinlichkeit von B nicht.

A3 a) Ausführliche Lösung

Falls $P_{weiblich}(A) = P(A) \Rightarrow$ Parteiwahl ist unabhängig vom Geschlecht

$$P_{weiblich}(A) = \frac{P(weiblich \cap A)}{P(weiblich)} = \frac{0{,}22}{0{,}55} = 0{,}4 \qquad P(A) = 0{,}4$$

$$\Rightarrow P_{weiblich}(A) = P(A) = 0{,}4$$

Die Wahl einer bestimmten Partei geschieht unabhängig vom Geschlecht.

A3 b) Ausführliche Lösung

Falls $P_{bis40}(A) = P(A) \Rightarrow$ Parteiwahl ist unabhängig vom Alter.

$$P_{bis40}(A) = \frac{P(bis40 \cap A)}{P(bis40)} = \frac{0{,}16}{0{,}46} \approx 0{,}348 \qquad P(A) = 0{,}16$$

$$\Rightarrow P_{bis40}(A) \approx 0{,}348 \neq P(A) = 0{,}16$$

Die Wahl einer bestimmten Partei ist vom Alter des Wählers abhängig.

4.	In einer Obstkiste befinden sich 60 Äpfel, davon sind 12 faul. Es werden 5 Äpfel entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
	A: Alle 5 Äpfel sind einwandfrei. B: Genau 3 Äpfel sind faul. C: Alle 5 Äpfel sind faul.
	Berechnen Sie auf drei Stellen hinter dem Komma genau und schreiben Sie zu jedem Ereignis einen Antwortsatz.

A4 Ausführliche Lösung

Die Anzahl aller Möglichkeiten aus 60 Äpfeln 5 auszuwählen ist

$$\binom{60}{5} = \frac{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57\cdot 56}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5.461.512$$

A 5 aus 48 und 0 aus 12

$$P(A) = \frac{\binom{48}{5}\cdot\binom{12}{0}}{\binom{60}{5}} = \frac{\frac{48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 1}{5.461.512} = \frac{1.712.304}{5.461.512} \approx \underline{\underline{0,314}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei der Entnahme von 5 Äpfeln, genau 5 einwandfreie zu erhalten, ist etwa 0,314.

B 2 aus 48 und 3 aus 12

$$P(B) = \frac{\binom{48}{2}\cdot\binom{12}{3}}{\binom{60}{5}} = \frac{\frac{48\cdot 47}{2\cdot 1}\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}}{5.461.512} = \frac{248.160}{5.461.512} \approx \underline{\underline{0,045}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei der Entnahme von 5 Äpfeln, genau 3 faule zu erhalten, ist 0,045.

C 0 aus 48 und 5 aus 12

$$P(B) = \frac{\binom{48}{0}\cdot\binom{12}{5}}{\binom{60}{5}} = \frac{1\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{5.461.512} = \frac{792}{5.461.512} \approx \underline{\underline{0,000145}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei der Entnahme von 5 Äpfeln, alle 5 faule zu erhalten, ist 0,000145.

5.	In Finnland gibt es ähnlich wie in Deutschland ein Lottospiel. Statt 6 aus 49 gilt dort **7 aus 37**.	
	a)	A: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 7 richtige?
	b)	B: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 5 richtige?
	c)	C: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 6 richtige mit Zusatzzahl?

A5 a) Ausführliche Lösung

Die Anzahl der Möglichkeiten 7 Zahlen von insgesamt 7 Gewinnzahlen anzukreuzen und 0 Zahlen von 30 Nicht- Gewinnzahlen anzukreuzen ist:

$$\binom{7}{7}\cdot\binom{30}{0} = 1\cdot 1 = 1$$

Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von A. Damit ist

$$P(A) = \frac{\binom{7}{7}\cdot\binom{30}{0}}{\binom{37}{7}} = \frac{1}{10.295.472} \approx 0{,}000.000.097$$

die Wahrscheinlichkeit dafür,
dass 7 Gewinnzahlen angekreuzt wurden (7 richtige).

A5 b) Ausführliche Lösung

Die Anzahl der Möglichkeiten 5 Zahlen von insgesamt 7 Gewinnzahlen anzukreuzen und 2 Zahl von 30 Nicht- Gewinnzahlen anzukreuzen ist:

$$\binom{7}{5}\cdot\binom{30}{2} = 21\cdot 435 = 9135$$

Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von B. Damit ist

$$P(B) = \frac{\binom{7}{5}\cdot\binom{30}{2}}{\binom{37}{7}} = \frac{9135}{10.295.472} \approx 0{,}000.887$$

die Wahrscheinlichkeit dafür,
dass 5 Gewinnzahlen angekreuzt wurden (5 richtige).

A5 c)	Ausführliche Lösung
	Anzahl der Möglichkeiten für: 6 Gewinnzahlen angekreuzt (6 aus 7) $\binom{7}{6}=7$ 1 Zusatzzahl angekreuzt (1 aus 1) $\binom{1}{1}=1$ 0 nicht Gewinnzahlen angekreuzt (0 aus 29) $\binom{29}{0}=1$ $P(C)=\frac{\binom{7}{6}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{29}{0}}{\binom{37}{7}}=\frac{7\cdot1\cdot1}{10.295.472}=\frac{7}{10.295.472}\approx 0{,}000.000683$ Ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Tipp genau 6 richtige mit Zusatzzahl zu haben.

6.	Die Buchstaben des Wortes ANANAS werden geschüttelt und neu geordnet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse?
	A: Es entsteht wieder das Wort ANANAS B: Die Buchstabenkombination beginnt mit AAA. C: Es entsteht ein Wort mit dreifachem A direkt hintereinander.

A6 Ausführliche Lösung

ANANAS: Die Anzahl der Möglichkeiten 6 Buchstaben anzuordnen ist 6!

A Es entsteht wieder das Wort ANANAS

Anzahl der Möglichkeiten für A: $3 \cdot 2 \cdot 1$

für N: $2 \cdot 1$

für S: 1

Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$

Damit ist $P(A) = \frac{12}{6!} = \frac{1}{60} = 0{,}01\overline{6}$

die Wahrscheinlichkeit dafür,

das nach dem Schütteln wieder das Wort ANANAS entsteht.

B Die Buchstabenkombination beginnt mit AAA.

AAAxxx

Anzahl der Möglichkeiten für A: $3 \cdot 2 \cdot 1$

für x: $3 \cdot 2 \cdot 1$

Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$

Damit ist $P(B) = \frac{36}{6!} = \frac{1}{20} = 0{,}05$

die Wahrscheinlichkeit dafür,

das nach dem Schütteln AAA die Anfangsbuchstaben bilden.

C Es entsthet ein Wort mit dreifachem A direkt hintereinander.

AAAxxx oder xAAAxx oder xxAAAx oder xxxAAA

$P(C) = 4 \cdot P(B) = 4 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{54} = 0{,}2$

Ist die Wahrscheinlichkeit dafür,

das nach dem Schütteln ein Wort mit dreifachem A hintereinander entsteht.

Leistungsbewertung

Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1+	97 - 100	1	7	14
1	93 - 96			
1-	89 - 92	2a	4	8
2+	85 - 88	2b	1	2
2	80 - 84	2c	2	4
2-	75 - 79	2d	2	4
3+	70 - 74	2e	3	6
3	65 - 69			
3-	60 - 64	3a	2	4
4+	55 - 59	3b	2	4
4	50 - 54			
4-	45 - 49	4	9	9
5+	39 - 44	5a	3	6
5	30 - 38	5b	3	6
5-	20 - 29	5c	3	6
6	0 - 19			
		6	9	18
		Summe	50	100

Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1^+	97 – 100	1	7	14
1	93 – 96			
1^-	89 – 92	2a	4	8
2^+	85 – 88	2b	1	2
2	80 – 84	2c	2	4
2^-	75 – 79	2d	2	4
3^+	70 – 74	2e	3	6
3	65 – 69			
3^-	60 – 64	3a	2	4
4^+	55 – 59	3b	2	4
4	50 – 54			
4^-	45 – 49	4	9	18
5^+	39 – 44			
5	30 – 38	5a	3	6
5^-	20 – 29	5b	3	6
6	0 – 19	5c	3	6
		6	9	18
		Summe	50	100