| | | | |
|---|---|---|---|
| **Klassenarbeit SG15/25D** | **Mathematik NAME:** | **Bearbeitungszeit 135 min.** | **Di 18.9.07** |

***Hilfsmittel: Taschenrechner***
***Formulieren Sie zu jeder Aufgabe einen passenden Antwortsatz!***

| 1. | Zufallsversuche | |
|---|---|---|
| | In einem Lexikon findet man die nebenstehende Information über die relativen Häufigkeiten, mit denen die einzelnen Blutgruppen in Deutschland auftreten. Beschreiben Sie einen geeigneten Zufallsversuch, sodass die Formulierung „Die Wahrscheinlichkeit für Blutgruppe 0 ist 0,365“ angemessen ist. | *36,5% der Bevölkerung haben die Blutgruppe 0, 42,5% die Blutgruppe A, 14,5% die Blutgruppe B, 6,5% die Blutgruppe AB.* |

| A1 | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | Wählt man aus der Bevölkerung zufällig eine Person aus, so ist die Wahrscheinlichkeit 36,5%, dass diese Person die Blutgruppe 0 hat. |

| 2. | Zufallsversuche | |
|---|---|---|
| | a) | Bei einem Zufallsversuch sind die Chancen für einen Gewinn 4 zu 3. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn an. |
| | b) | Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn ist ¾ . Wie stehen die Chancen? |

| A2 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | a) | Die Gewinnwahrscheinlichkeit bertägt $\frac{4}{7}$ |
| | b) | Die Chancen stehen 3:1 |

| 3. | In einer Gruppe von 8 Touristen schmuggeln 3. Ein Zöllner wählt zufällig einen Touristen aus dieser Gruppe aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Schmuggler? Finden Sie zuerst ein geeignetes Urnenmodell und beschreiben Sie es. |
|---|---|

| A3 | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | Urnenmodell:<br>Urne mit 8 Kugeln, 5 grüne (kein Schmuggler KS), 3 rote (Schmuggler S) Einmal ziehen.<br>Die Wahrscheinlichkeit einen Schmuggler zu erwischen beträgt:<br>$P(S)=\frac{3}{8}=0{,}375$ |

| | |
|---|---|
| 4. | Ein Glücksrad mit 10 gleichen Segmenten, nummeriert von 1 bis 10, wird gedreht.<br>Wie oft muss man **mindestens** drehen, damit mit **mindestens** 95% Wahrscheinlichkeit **mindestens** einmal die 10 erscheint? |

**A4 Ausführliche Lösung**

$P(10) = \frac{1}{10}$ Gegenereignis $P(\overline{10}) = \frac{9}{10}$

Ereignis E: mindestens einmal 10

Gegenereignis: $\overline{E}$: keinmal die 10

Bei $n-$mal drehen $P(\overline{E}) = \left(\frac{9}{10}\right)^n \Rightarrow P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$

$$P(E) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \geq 0{,}95 \,|-1$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{9}{10}\right)^n \geq -0{,}05 \,|\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n \leq 0{,}05 \,|\cdot \ln$$

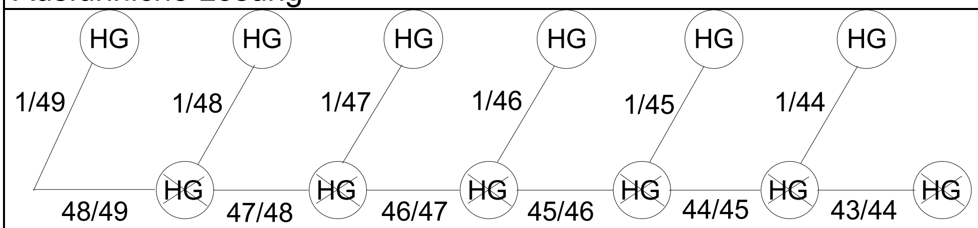
$$\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{9}{10}\right) \leq \ln(0{,}05) \,|: \underbrace{\ln\left(\frac{9}{10}\right)}_{<0}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{9}{10}\right)} \approx 28{,}4$$

Man muss das Glücksrad mindestens 29 mal drehen, um mit einer Sicherheit von mindestens 95% mindestens einmal die 10 zu erhalten.

| | |
|---|---|
| 5. | In einer Lostrommel sind 49 Lose. Davon ist ein Los der Hauptgewinn.<br>6 Lose werden nacheinander gezogen.<br>Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den 6 gezogenen Losen der Hauptgewinn befindet?<br>Hinweis: zeichnen Sie einen Teilbaum für die 6 Ziehungen. |

**A5 Ausführliche Lösung**




$$P(HG)=\frac{1}{49}+\underbrace{\frac{48}{49}\cdot\frac{1}{48}}_{\frac{1}{49}}+\underbrace{\frac{48}{49}\cdot\frac{47}{48}\cdot\frac{1}{47}}_{\frac{1}{49}}+\underbrace{\frac{48}{49}\cdot\frac{47}{48}\cdot\frac{46}{47}\cdot\frac{1}{46}}_{\frac{1}{49}}$$

$$+\underbrace{\frac{48}{49}\cdot\frac{47}{48}\cdot\frac{46}{47}\cdot\frac{45}{46}\cdot\frac{1}{45}}_{\frac{1}{49}}+\underbrace{\frac{48}{49}\cdot\frac{47}{48}\cdot\frac{46}{47}\cdot\frac{45}{46}\cdot\frac{44}{45}\cdot\frac{1}{44}}_{\frac{1}{49}}=\frac{6}{49}$$

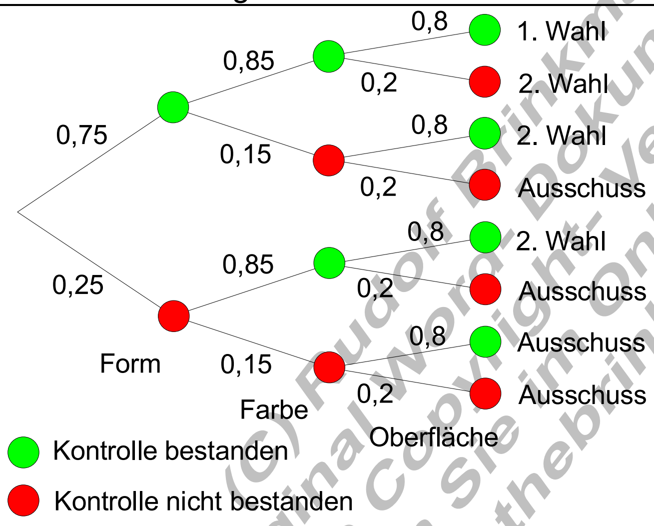
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Hauptgewinn bei irgendeiner der 6 Ziehungen gezogen wird beträgt:

$$P(HG)=\frac{6}{49}$$

| | | |
|---|---|---|
| 6. | In einer Fabrik wird Porzellangeschirr hergestellt.<br>Jedes Teil wird nacheinander in verschiedenen Kontrollgängen auf Form, Farbe und Oberflächenbeschaffenheit geprüft.<br>Erfahrungsgemäß muss bei 25% die Form beanstandet werden.<br>Die Farbkontrolle passieren 85% der Teile ohne Beanstandung.<br>In 20% aller Fälle genügt die Oberfläche nicht den Ansprüchen der 1. Wahl.<br>Nur wenn alle drei Kontrollen ohne Beanstandung durchlaufen sind, kann ein Teil als 1. Wahl verkauft werden.<br>Ein Teil ist 2. Wahl, wenn die Qualität an nur einer Kontrollstelle nicht ausreicht.<br>Alle übrigen Porzellanteile gelten als Ausschussware. | |
| | a) | Stellen Sie die dreifache Kontrolle in einem Baumdiagramm dar. |
| | b) | Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil 1. Wahl ist? |
| | c) | Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil 2. Wahl ist? |
| | d) | Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil Ausschuss ist? |

**A6** Ausführliche Lösung

a)




1. Wahl:

$0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 = \underline{\underline{0,51}}$

2. Wahl:

$0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,2 = 0,1275$

$0,75 \cdot 0,15 \cdot 0,8 = 0,09$

$0,25 \cdot 0,85 \cdot 0,8 = 0,17$

Ausschuss:

$0,75 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 0,0225$

$0,25 \cdot 0,85 \cdot 0,2 = 0,0425$

$0,25 \cdot 0,15 \cdot 0,8 = 0,03$

$0,25 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 0,0075$

b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil 1. Wahl ist, beträgt:

$P(1.\text{Wahl}) = \underline{\underline{0,51}}$

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil 2. Wahl ist, beträgt:

$P(2.\text{Wahl}) = 0,1275 + 0,09 + 0,17 = \underline{\underline{0,3875}}$

d) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil Ausschuss ist, beträgt:

$P(\text{Ausschuss}) = 0,0225 + 0,0425 + 0,03 + 0,0075 = \underline{\underline{0,1025}}$

**7.** Eine Befragung von 2000 Haushalten ergab folgendes Ergebnis.
in 1740 Haushalten gibt es ein Radio
in 1500 Haushalten gibt es einen Fernseher
in 1400 Haushalten gibt es Radio und Fernseher

a) Stellen Sie ein Mengendiagramm auf.

b) In wie vielen Haushalten gibt es Radio **oder** Fernseher?

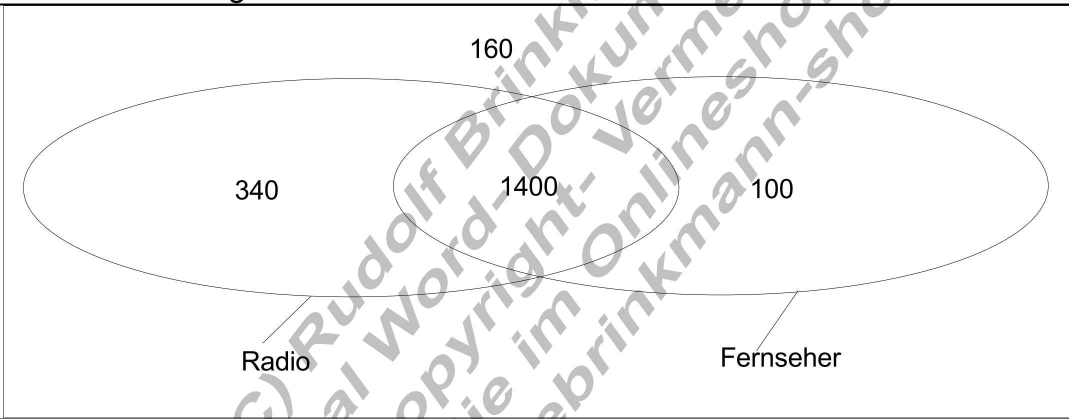
c) Ein Haushalt wird zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es in ihm
Radio **und** Fernseher gibt.

d) Ein Haushalt wird zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es in ihm
Radio **oder** Fernseher gibt. Schreiben Sie den Additionssatz auf und
wenden Sie ihn auf diese Aufgabe an.

e) Ein Haushalt wird zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es in ihm
**weder** Radio **noch** Fernseher gibt.

**A7** Ausführliche Lösung

a)




b) In 1740 + 1500 – 1400 = 1840 Haushalten gibt es Radio oder Fernseher.

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, das ein zufällig ausgewählter Haushalt Radio und Fernseher besitzt beträgt:

$P(R \wedge F) = \frac{1400}{2000} = 0,7$

d) Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(R) = \frac{1740}{2000} = 0,87 \quad P(F) = \frac{1500}{2000} = 0,75 \quad P(R \wedge F) = \frac{1400}{2000} = 0,7$

$P(R \vee F) = P(R) + P(F) - P(R \wedge F) = 0,87 + 0,75 - 0,7 = 0,92$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, das ein zufällig ausgewählter Haushalt Radio oder Fernseher besitzt beträgt:

$P(R \vee F) = 0,92$

e) Die Wahrscheinlichkeit dafür, das ein zufällig ausgewählter Haushalt weder Radio noch Fernseher besitzt beträgt:

$P(\overline{R \vee F}) = 1 - P(R \vee F) = 1 - 0,92 = 0,08$

| 8. | Viele Internetnutzer klagen über Spam-Mails. Nehmen wir an, in 1% der guten und 40% der Spam-Mails komme das Wort „ Viagra“ vor. Außerdem seien 10% der Mails gut und 90% Spam. |
|---|---|
| a) | Stellen Sie eine Vierfeldtafel auf.<br>Ereignisse:<br>$A$: Mail enthält das Wort Viagra    $\overline{A}$: Mail enthält nicht das Wort Viagra<br>$B$: Spam-Mail    $\overline{B}$: gute Mail |
| b) | Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine gute Mail das Wort „Viagra“? |

**A8 Ausführliche Lösung**

a) Aufstellen der Vierfeldtafel mit den vorgegebenen Daten.
Die % Werte entsprechen relativen Häufigkeiten (Wahrscheinlichkeiten)
90 % Spam bedutet Summe Spam = 0,9
10% gute Mails bedeutet Summe gute Mails = 0,1
40% der Spam-Mails mit Viagra bedeutet 0,9 x 0,4 = 0,36
1% der guten Mails mit Viagra bedeutet =0,1 x 0,01 = 0,001
Die restliche Werte kann man ausrechnen, da die Summen bekannt sind.

| | $B$: Spam-Mail | $\overline{B}$: Gute Mail | Summe |
|---|---|---|---|
| A: mit Viagra | 0,36 | 0,001 | |
| $\overline{A}$: ohne Viagra | | | |
| Summe | 0,9 | 0,1 | 1 |

Spam ohne Viagra: 0,9 – 0,36 = 0,54
Gute Mail ohne Viagra: 0,1 – 0,001 = 0,099
Summe aller Mails mit Viagra: 0,36 + 0,001 = 0,361
Summe aller Mails ohne Viagra: 0,54 + 0,099 = 0,639

Mit diesen Werten wird die Vierfeldtafel nun vervollständigt.

| | $B$: Spam-Mail | $\overline{B}$: Gute Mail | Summe |
|---|---|---|---|
| A: mit Viagra | 0,36 | 0,001 | 0,361 |
| $\overline{A}$: ohne Viagra | 0,54 | 0,099 | 0,639 |
| Summe | 0,9 | 0,1 | 1 |

b) $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}001$
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine gute Mail das Wort „Viagra“ enthält beträgt 0,001.

| Leistungsbewertung | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Note | % der Gesamtpunktzahl | Aufgabe | Punkte | % |
| 1+ | 97 - 100 | 1 | 2 | 4 |
| 1 | 93 - 96 | 2a | 2 | 4 |
| 1- | 89 - 92 | 2b | 2 | 4 |
| 2+ | 85 - 88 | 3 | 2 | 4 |
| 2 | 80 - 84 | 4 | 8 | 16 |
| 2- | 75 - 79 | 5 | 6 | 12 |
| 3+ | 70 - 74 | 6a | 2 | 4 |
| 3 | 65 - 69 | 6b | 2 | 4 |
| 3- | 60 - 64 | 6c | 2 | 4 |
| 4+ | 55 - 59 | 6d | 2 | 4 |
| 4 | 50 - 54 | 7a | 2 | 4 |
| 4- | 45 - 49 | 7b | 2 | 4 |
| 5+ | 39 - 44 | 7c | 2 | 4 |
| 5 | 30 - 38 | 7d | 2 | 4 |
| 5- | 20 - 29 | 7e | 2 | 4 |
| 6 | 0 - 19 | 8a | 9 | 18 |
| | | 8b | 1 | 2 |
| | | Summe | 50 | 100 |



| Note | % der Gesamtpunktzahl | Aufgabe | Punkte | % |
|---|---|---|---|---|
| $1^+$ | 97 – 100 | 1 | 2 | 4 |
| 1 | 93 – 96 | 2a | 2 | 4 |
| $1^-$ | 89 – 92 | 2b | 2 | 4 |
| $2^+$ | 85 – 88 | 3 | 2 | 4 |
| 2 | 80 – 84 | 4 | 8 | 16 |
| $2^-$ | 75 – 79 | 5 | 6 | 12 |
| $3^+$ | 70 – 74 | 6a | 2 | 4 |
| 3 | 65 – 69 | 6b | 2 | 4 |
| $3^-$ | 60 – 64 | 6c | 2 | 4 |
| $4^+$ | 55 – 59 | 6d | 2 | 4 |
| 4 | 50 – 54 | 7a | 2 | 4 |
| $4^-$ | 45 – 49 | 7b | 2 | 4 |
| $5^+$ | 39 – 44 | 7c | 2 | 4 |
| 5 | 30 – 38 | 7d | 2 | 4 |
| $5^-$ | 20 – 29 | 7e | 2 | 4 |
| 6 | 0 – 19 | 8a | 9 | 18 |
| | | 8b | 1 | 2 |
| | | Summe | 50 | 100 |