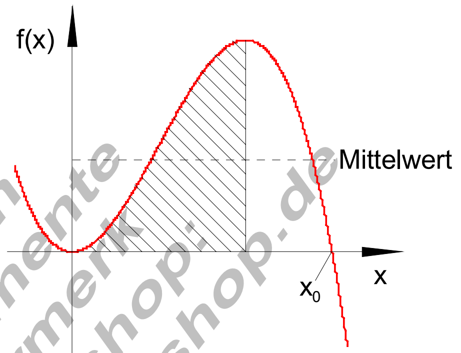
Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 19.12.06**
SG15/25D Gruppe A	**NAME:**		

Lösungen

1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte
b) Berechnen Sie die Extrempunkte.
c) Berechnen Sie die gekennzeichnete Fläche.
d) Berechnen Sie den Mittelwert von f(x) im Intervall [0 ; x_0]



E1:

a)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad f(0) = 0 \Rightarrow \text{Schnittpunkt mit der y-Achse: } P_y(0|0)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{3}{2} \,|\cdot 4 \Leftrightarrow x_3 = 6$$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $P_{x1/2}(0|0); P_{x3}(6|0)$

b)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \qquad f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3 \,|\cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x_2 = 4$$

$f''(x_1) = f''(0) = 3 > 0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_1 = 0$

$f''(x_2) = f''(4) = -3 < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_2 = 4$

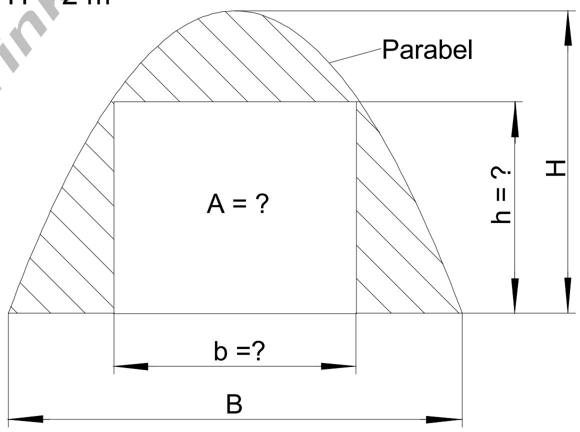
$f(x_1) = f(0) = 0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $P_{Min}(0|0)$

$f(x_2) = f(4) = -16 + 24 = 8 \Rightarrow$ rel. Max. bei $P_{Max}(4|8)$

c)	$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad A = \left\| \int_0^4 f(x)\,dx \right\|$ $\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 \right]_0^4 = -16 + 32 = 16$ $\underline{\underline{A = 16\,FE}}$

d)	$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad \text{Mittelwert} = \frac{1}{6}\int_0^6 f(x)\,dx$ $\text{Mittelwert} = \frac{1}{6}\int_0^6 \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 \right]_0^6$ $= \frac{1}{6}\left[-81 + 108 \right] = \frac{1}{6} \cdot 27 = \frac{9}{2} = 4{,}5$ $\underline{\underline{\text{Mittelwert} = 4{,}5\,LE}}$

2. In einer parabelförmigen Giebelwand soll ein rechteckiges Fenster eingelassen werden, das bis zum Boden reicht. Giebelmaße: B = 3 m, H = 2 m



a) Welche Maße muss das Fenster haben (Breite und Höhe), damit die Fensterfläche maximal wird? Wie groß ist die Fensterfläche?

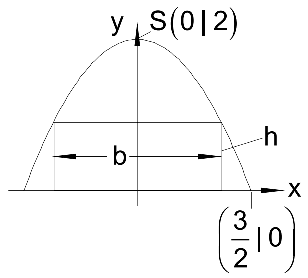
Zwischenwerte zur Kontrolle :

Funktionsgleichung der Parabel: $f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + 2$

Fensterfläche als Funktion von b: $A(b) = -\frac{2}{9}b^3 + 2b$

b) Die restliche Fläche der Giebelwand soll gestrichen werden. Wie groß ist diese Fläche?

E2:

a)	$B = 3\,m \qquad H = 2\,m$ Ansatz über die Scheitelpunktform: $f(x) = a_2x^2 + 2$ $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4}a_2 + 2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{8}{9}$ Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + 2}}$	

$$A = b\cdot h \quad h(b) = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{8}{9}\cdot\frac{b^2}{4} + 2 = -\frac{2}{9}b^2 + 2$$

$$A(b) = b\cdot h(b) = b\cdot\left(-\frac{2}{9}b^2 + 2\right) = -\frac{2}{9}b^3 + 2b$$

$$A'(b) = -\frac{2}{3}b^2 + 2 \qquad A''(b) = -\frac{4}{3}b$$

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}b^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 3 \Leftrightarrow b_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$A''(b) = -\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } b = \sqrt{3}$$

$$\text{Fensterbreite} = \underline{\underline{\sqrt{3}\,m \approx 1{,}732\,m}}$$

$$h(b) = -\frac{2}{9}b^2 + 2 \Rightarrow h\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{9}\cdot 3 + 2 = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$$

$$\text{Fensterhöhe} = \underline{\underline{\frac{4}{3}m = 1{,}\overline{3}\,m}}$$

$$\text{Fensterfläche} = b\cdot h = \sqrt{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3} \approx \underline{\underline{2{,}309\,m^2}}$$

b)

$$\text{Restfläche} = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx - \text{Fensterfläche}$$

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{8}{9}x^2 + 2\right)dx = \left[-\frac{8}{27}x^3 + 2x\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{8} + 2\cdot\frac{3}{2} - \left(\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{8} - 2\cdot\frac{3}{2}\right) = -1 + 3 - 1 + 3 = 6 - 2 = 4$$

$$\text{Restfläche} = 4m^2 - \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}\,m \approx \underline{\underline{1{,}691m^2}}$$

3. Vereinfachen bzw. berechnen Sie folgende Terme:

a) $(x-2)^{n+2}\cdot(x-2)^{n-2}$ b) $\frac{e^{2x-1}}{e^{x+2}}$ c) $\left(\frac{1}{2}e^{x+2}\right)^2$ d) $\frac{\left(e^{x-1}\right)^2}{e^{2(x-1)}}$

E3:

a) $(x-2)^{n+2}\cdot(x-2)^{n-2} = (x-2)^{n+2+(n-2)} = (x-2)^{n+2+n-2} = \underline{\underline{(x-2)^{2n}}}$

b) $\frac{e^{2x-1}}{e^{x+2}} = e^{2x-1-(x+2)} = e^{2x-1-x-2} = \underline{\underline{e^{x-3}}}$

c) $\left(\frac{1}{2}e^{x+2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(e^{x+2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}e^{2x+4}}}$

d) $\frac{\left(e^{x-1}\right)^2}{e^{2(x-1)}} = \frac{e^{2x-2}}{e^{2x-2}} = e^{2x-2-(2x-2)} = e^{2x-2-2x+2} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

4. Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = e^{x-2} - 3$

a) Stellen Sie für $x \in [-4;4]$ eine Wertetabelle auf. (x- Werte in einer Schritten)

b) Zeichnen Sie beide Funktionsgraphen möglichst genau in ein Koordinatensystem. (Funktionswerte kleiner 10).

c) Durch welche Verschiebungen geht f_2 (x) aus f_1 (x) hervor?

d) Berechnen Sie den Schnittpunkt mit der y- Achse (P_y).

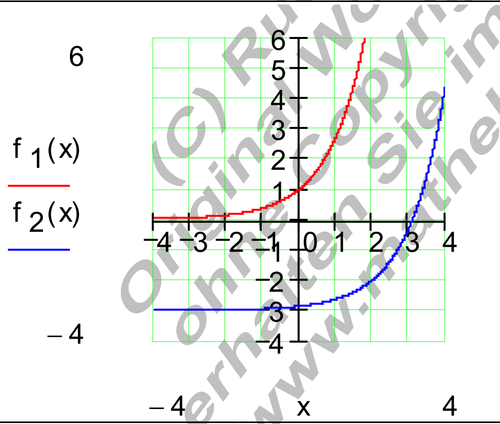
e) Wie verhalten sich die Funktionswerte für $|x| \to \infty$?

E4:

a) $f_1(x) = e^x \qquad f_2(x) = e^{x-2} - 3$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	0,02	0,05	0,14	0,37	1	2,72	7,39	20,09	54,6
$f_2(x)$	−3	−2,99	−2,98	−2,95	−2,86	−2,63	−2	−0,28	4,39

b)



c) Die Funktion f_2 (x) entsteht aus f_1 (x) durch:

Verschiebung um 3 EH nach unten.
Verschiebung um 3 EH nach rechts.

d) $y_{s1} = f_1(0) = e^0 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{y1}(0\,|\,1)}}$

$y_{s2} = f_2(0) = e^{-2} - 3 \approx -2{,}86 \Rightarrow \underline{\underline{P_{y2}\left(0\,|\,e^{-2} - 3 \approx -2{,}86\right)}}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \underline{\underline{0}} \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \underline{\underline{\infty}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2} - 3 = \underline{\underline{-3}} \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x-2} - 3 = \underline{\underline{\infty}}$

Viel Erfolg!

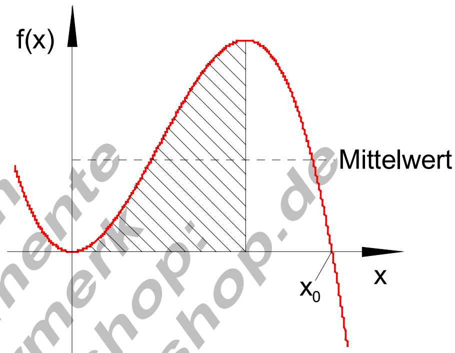
Klassenarbeit SG15/25D Gruppe B **Mathematik** **Bearbeitungszeit 90 min.** **Di 19.12.06**
NAME:

Lösungen

1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte
b) Berechnen Sie die Extrempunkte.
c) Berechnen Sie die gekennzeichnete Fläche.
d) Berechnen Sie den Mittelwert von f(x) im Intervall $[\,0\,;\,x_0\,]$



E1:

a)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \qquad f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Schnittpunkt mit der y-Achse}: P_y(0\,|\,0)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{12}x + \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{12}x + \frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12}x = \frac{3}{4} \,|\cdot 12 \Leftrightarrow x_3 = 9$$

$$\underline{\underline{\text{Schnittpunkte mit der x-Achse}: P_{x1/2}(0\,|\,0); P_{x3}(9\,|\,0)}}$$

b)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \qquad f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \qquad f''(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{3}{2} \,|\cdot 4 \Leftrightarrow x_2 = 6$$

$$f''(x_1) = f''(0) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(6) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = 6$$

$$f(x_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } \underline{\underline{P_{Min}(0\,|\,0)}}$$

$$f(x_2) = f(6) = -18 + 27 = 9 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } \underline{\underline{P_{Max}(6\,|\,9)}}$$

c)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \qquad A = \left|\int_0^6 f(x)\,dx\right|$$

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 \left(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{48}x^4 + \frac{3}{12}x^3\right]_0^6 = -\frac{1296}{48} + \frac{648}{12} = \frac{1296}{48} = 27$$

$$A = 27\,FE$$

d)

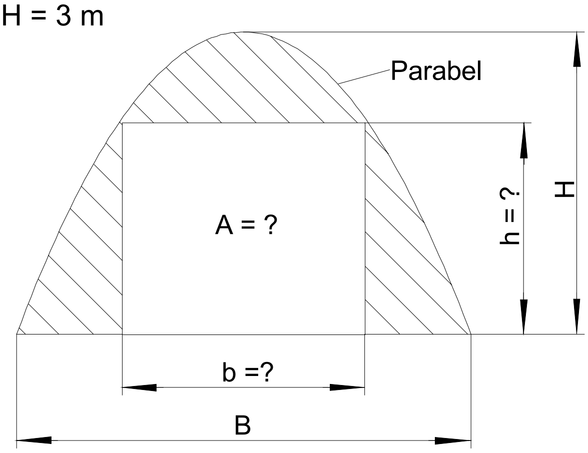
$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \qquad \text{Mittelwert} = \frac{1}{9}\int_0^9 f(x)\,dx$$

$$\text{Mittelwert} = \frac{1}{9}\int_0^9 \left(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right)dx = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{4}x^3\right]_0^9$$

$$= \frac{1}{9}\left[-\frac{6561}{48} + \frac{2187}{12}\right] = \frac{1}{9}\cdot\frac{2187}{48} = \frac{243}{48} = \frac{81}{16} \approx 5{,}06$$

$$\text{Mittelwert} = \frac{81}{16} \approx 5{,}06\,LE$$

2. In einer parabelförmigen Giebelwand soll ein rechteckiges Fenster eingelassen werden, das bis zum Boden reicht. Giebelmaße: B = 4 m, H = 3 m



a) Welche Maße muss das Fenster haben (Breite und Höhe), damit die Fensterfläche maximal wird? Wie groß ist die Fensterfläche?

Zwischenwerte zur Kontrolle:

Funktionsgleichung der Parabel: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$

Fensterfläche als Funktion von b: $A(b) = -\frac{3}{16}b^3 + 3b$

b) Die restliche Fläche der Giebelwand soll gestrichen werden. Wie groß ist diese Fläche?

E2:

a)

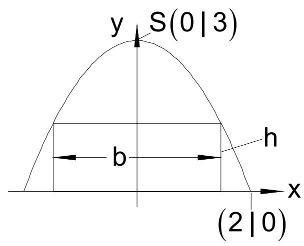
$B = 4\,m \qquad H = 3\,m$

Ansatz über die Scheitelpunktform:

$$f(x) = a_2x^2 + 3$$

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 3 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{4}$$

Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$



$$A = b \cdot h \quad h(b) = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{3}{4}\cdot\frac{b^2}{4} + 3 = -\frac{3}{16}b^2 + 3$$

$$A(b) = b \cdot h(b) = b \cdot \left(-\frac{3}{16}b^2 + 2\right) = -\frac{3}{16}b^3 + 3b$$

$$A'(b) = -\frac{9}{16}b^2 + 3 \qquad A''(b) = -\frac{9}{8}b$$

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{16}b^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{16}b^2 = 3 \Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow b_{1/2} = \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$A''(b) = -\frac{9}{8}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{Fensterbreite} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,m \approx \underline{\underline{2,309\,m}}$$

$$h(b) = -\frac{3}{16}b^2 + 3 \Rightarrow h\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{16}\cdot\frac{16}{9}\cdot 3 + 3 = 2$$

$$\text{Fensterhöhe} = \underline{\underline{2\,m}}$$

$$\text{Fensterfläche} = b \cdot h = \frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot 2 = \frac{8}{3}\cdot\sqrt{3} \approx \underline{\underline{4,619\,m^2}}$$

b)

$$\text{Restfläche} = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \text{Fensterfläche}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{3}{4}x^2 + 3\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^3 + 3x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot 8 + 3\cdot 2 - \left(\frac{1}{4}\cdot 8 - 3\cdot 2\right) = -2 + 6 - 2 + 6 = 12 - 4 = 8$$

$$\text{Restfläche} = 8\,m^2 - \frac{8}{3}\cdot\sqrt{3}\,m \approx \underline{\underline{3,381\,m^2}}$$

3. Vereinfachen bzw. berechnen Sie folgende Terme:

a) $(x+2)^{n-2}\cdot(x+2)^{n+2}$ b) $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-2}}$ c) $\left(\frac{1}{3}e^{x-2}\right)^2$ d) $\frac{e^{2(x-1)}}{\left(e^{x-1}\right)^2}$

E3:

a)

$$(x+2)^{n-2}\cdot(x+2)^{n+2} = (x+2)^{n-2+(n+2)} = (x+2)^{n-2+n+2} = \underline{\underline{(x+2)^{2n}}}$$

b)

$$\frac{e^{2x+1}}{e^{x-2}} = e^{2x+1-(x-2)} = e^{2x+1-x+2} = \underline{\underline{e^{x+3}}}$$

c) $\left(\frac{1}{3}e^{x-2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(e^{x-2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{9}e^{2x-4}}}$

d) $\frac{e^{2(x-1)}}{\left(e^{x-1}\right)^2} = \frac{e^{2x-2}}{e^{2x-2}} = e^{2x-2-(2x-2)} = e^{2x-2-2x+2} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

4. Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = e^{x+2} - 1$

a) Stellen Sie für $x \in [-6;2]$ eine Wertetabelle auf. (x- Werte in einer Schritten)

b) Zeichnen Sie beide Funktionsgraphen möglichst genau in ein Koordinatensystem. (Funktionswerte kleiner 10).

c) Durch welche Verschiebungen geht $f_2(x)$ aus $f_1(x)$ hervor?

d) Berechnen Sie den Schnittpunkt mit der y- Achse (P_y).

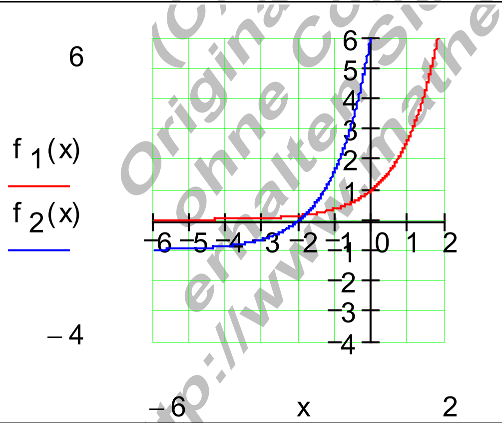
e) Wie verhalten sich die Funktionswerte für $|x| \to \infty$?

E4:

a) $f_1(x) = e^x \qquad f_2(x) = e^{x+2} - 1$

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2
$f_1(x)$	0	0,01	0,02	0,05	0,14	0,37	1	2,72	7,39
$f_2(x)$	−0,98	−0,95	−0,86	−0,63	0	1,72	6,39	19,09	53,6

b)



c) Die Funktion $f_2(x)$ entsteht aus $f_1(x)$ durch:

Verschiebung um 1 EH nach unten.
Verschiebung um 2 EH nach links.

d) $y_{s1} = f_1(0) = e^0 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{y1}(0\,|\,1)}}$

$y_{s2} = f_2(0) = e^2 - 1 \approx 6{,}39 \Rightarrow \underline{\underline{P_{y2}\left(0\,|\,e^2 - 1 \approx 6{,}39\right)}}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \underline{\underline{0}} \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \underline{\underline{\infty}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+2} - 1 = \underline{\underline{-1}} \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x+2} - 1 = \underline{\underline{\infty}}$

Viel Erfolg!