Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 17.10.06**
SG15/25D Gruppe A	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Rechnen Sie wo möglich mit Brüchen.
Bei auftretenden Wurzeln genügt eine Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma.

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4}$$

a) Ist der Funktionsgraph symmetrisch?
Falls ja, welcher Art ist die Symmetrie?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Zu a)
Der Funktionsgraph ist symmetrisch zur y – Achse. Es gilt $f(-x)=f(x)$.
In der Funktionsgleichung tritt die Variable x nur mit geraden Exponenten auf.
Punkte: 3

b) Berechnen Sie die relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte).

Zu b)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=x^3-4x \quad\Rightarrow\quad f''(x)=3x^2-4 \quad\Rightarrow\quad f'''(x)=6x$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\left(x^2-4\right) \Rightarrow x_2=2 \qquad x_3=-2$$

$$f''(x_1)=f''(0)=-4<0 \Rightarrow \text{rel. max. bei } x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''(\pm 2)=8>0 \Rightarrow \text{rel. min. bei } x_{2/3}=\pm 2$$

$$P_{max}\left(0\,|\,f(0)\right) \Rightarrow P_{max}\left(0\,|\,-\frac{9}{4}\approx -2{,}25\right)$$

$$P_{min1/2}\left(x_{2/3}\,|\,f(x_{2/3})\right) \Rightarrow P_{min1/2}\left(\pm 2\,|\,-\frac{25}{4}=-6{,}25\right)$$

Punkte: 12

c) Berechnen Sie die Wendepunkte.

Zu c)

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4=0 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow 3x^2=4 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3} \mid \sqrt{\ } \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f'''(x_{1/2})=f'''\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\pm 6\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\neq 0$$

$$P_{w1/2}\left(x_{1/2} \mid f(x_{1/2})\right)\Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\approx\pm 1{,}155 \mid -\frac{161}{36}\approx -4{,}472\right)$$

Punkte: 8

d) Berechnen Sie die Gleichungen der Wendetangenten.
Rechnen Sie mit einer Genauigkeit von 3 Stellen hinter dem Komma.

Zu d)

$$t(x)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) \text{ mit } x_0=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx 1{,}155 \text{ wird}$$

$$f'(x_0)=f'\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=-\frac{16}{9}\sqrt{3}\approx -3{,}079$$

$$f(x_0)=f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=-\frac{161}{36}\approx -4{,}472$$

$$t_1(x)=-\frac{16}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot x-\frac{11}{12} \text{ oder } t_1(x)=-3{,}079\cdot x-0{,}917$$

$$t(x)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) \text{ mit } x_0=-\sqrt{\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx -1{,}155 \text{ wird}$$

$$f'(x_0)=f'\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{16}{9}\sqrt{3}\approx 3{,}079$$

$$f(x_0)=f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=-\frac{161}{36}\approx -4{,}472$$

$$t_2(x)=\frac{16}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot x-\frac{11}{12} \text{ oder } t_2(x)=3{,}079\cdot x-0{,}917$$

Punkte: 8

e) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

Zu e)

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \qquad f(0) = -\frac{9}{4} = -2{,}25 \Rightarrow P_y\left(0 \mid -\frac{9}{4} = -2{,}25\right)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0$ Substitution $z = x^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}z^2 - 2z - \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4$

$\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0$

$p = -8 \qquad q = -9 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$

$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ | $z_1 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$; $z_2 = 4 - 5 = -1 \Rightarrow$ keine Lösung

$P_{x1}(-3 \mid 0) \qquad P_{x2}(3 \mid 0)$

Punkte: 8

f) Berechnen Sie die Funktionswerte für x = -2,5 ; -1,5 ; -0,5 ; 0,5 ; 1,5 ; 2,5 und stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf. Genauigkeit in der Wertetabelle, zwei Stellen hinter dem Komma.

Zu f)

$f(-2{,}5) = f(2{,}5) \approx -4{,}98$

$f(-1{,}5) = f(1{,}5) \approx -5{,}48$

$f(-0{,}5) = f(0{,}5) \approx -2{,}73$

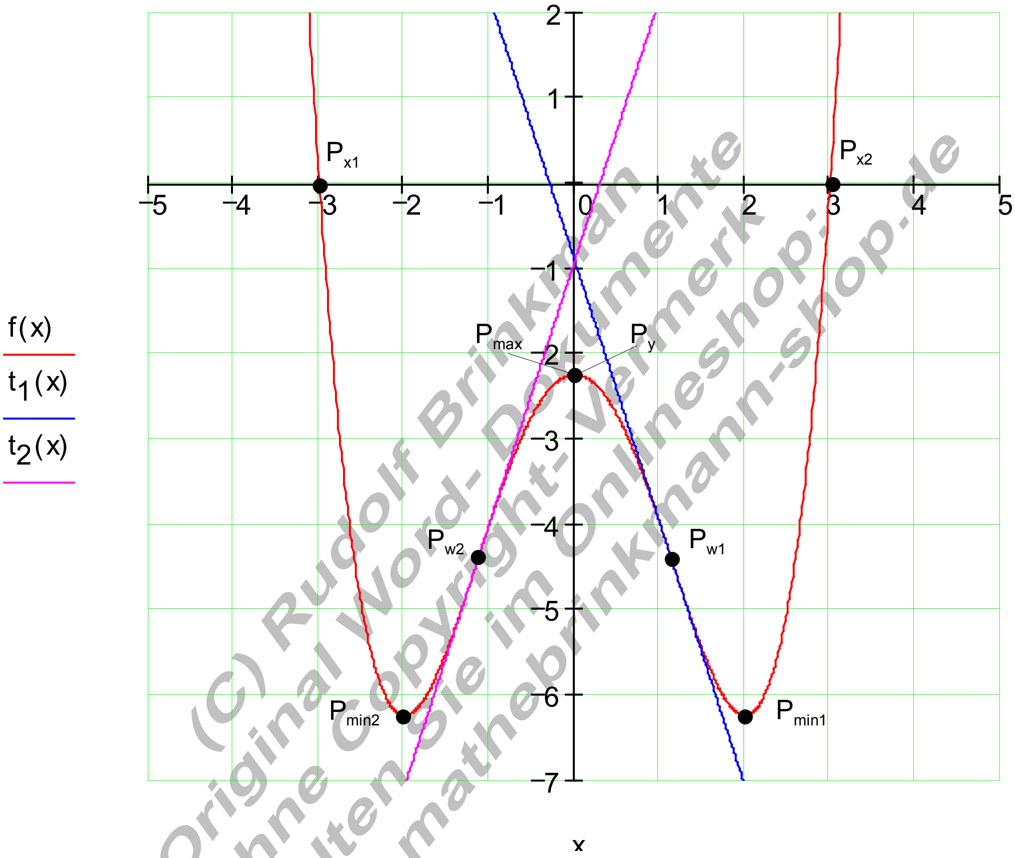
Wertetabelle:

	P_{x1}		P_{min2}		P_{w2}		P_y P_{max}
x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	$-1{,}16$	$-0{,}5$	0
f(x)	0	$-4{,}98$	$-6{,}25$	$-5{,}48$	$-4{,}47$	$-2{,}73$	$-2{,}25$
		P_{w1}		P_{min1}		P_{x2}	
x	0,5	1,16	1,5	2	2,5	3	
f(x)	$-2{,}73$	$-4{,}47$	$-5{,}48$	$-6{,}25$	$-4{,}98$	0	

Punkte: 13

g) Zeichnen Sie möglichst genau den Graphen und die Wendetangenten in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.)

Zu g)



Punkte: 10

h) Machen Sie eine Aussage über das Monotonieverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für monoton wachsend, bzw. monoton fallend an.

Zu h)

streng monoton fallend $]-\infty;-2[$

streng monoton wachsend $]-2;-0[$

streng monoton fallend $]0;2[$

streng monoton wachsend $]2;\infty[$

Punkte: 8

i) Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für Rechts- bzw. Linkskrümmung an.

Zu i)

Linkskrümmung $\left]-\infty;-\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx -1{,}155\right[$

Rechtskrümmung $\left]-\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx -1{,}155;\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx 1{,}155\right[$

Linkskrümmung $\left]\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx 1{,}155;\infty\right[$

Punkte: 6

j) Bestimmen Sie die Randpunkte des Definitionsbereiches.

Zu j)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x^4}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^4\left(\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x^4}\right)=\infty$$

Punkte: 4

Viel Erfolg!

Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min. Di**
SG15/25D Gruppe B	**NAME:**	

Hilfsmittel: Taschenrechner
Rechnen Sie wo möglich mit Brüchen.
Bei auftretenden Wurzeln genügt eine Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma.

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4}$$

a) Ist der Funktionsgraph symmetrisch?
Falls ja, welcher Art ist die Symmetrie?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Zu a)
Der Funktionsgraph ist symmetrisch zur y – Achse. Es gilt $f(-x) = f(x)$.
In der Funktionsgleichung tritt die Variable x nur mit geraden Exponenten auf.
Punkte: 3

b) Berechnen Sie die relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte).

Zu b)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -x^3 + 4x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -3x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = -6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$(-x^2 + 4) \Rightarrow x_2 = 2 \qquad x_3 = -2$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_{2/3}) = f''(\pm 2) = -8 < 0 \Rightarrow \text{rel. max. bei } x_{2/3} = \pm 2$$

$$P_{min}(0 \mid f(0)) \Rightarrow P_{min}\left(0 \mid \frac{9}{4} \approx 2,25\right)$$

$$P_{max1/2}(x_{2/3} \mid f(x_{2/3})) \Rightarrow P_{max1/2}\left(\pm 2 \mid \frac{25}{4} = 6,25\right)$$

Punkte: 12

c) Berechnen Sie die Wendepunkte.

Zu c)

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+4=0 \mid -4$$
$$\Leftrightarrow -3x^2=-4 \mid :(-3)$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3} \mid \sqrt{} \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f'''(x_{1/2})=f'''\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\pm 6\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\neq 0$$

$$P_{w1/2}(x_{1/2} \mid f(x_{1/2})) \Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\approx\pm 1{,}155 \mid \frac{161}{36}\approx 4{,}472\right)$$

Punkte: 8

d) Berechnen Sie die Gleichungen der Wendetangenten.
Rechnen Sie mit einer Genauigkeit von 3 Stellen hinter dem Komma.

Zu d)

$$t(x)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) \text{ mit } x_0=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx 1{,}155 \text{ wird}$$

$$f'(x_0)=f'\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{16}{9}\sqrt{3}\approx 3{,}079$$

$$f(x_0)=f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{161}{36}\approx 4{,}472$$

$$t_1(x)=\frac{16}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot x+\frac{11}{12} \text{ oder } t_1(x)=3{,}079\cdot x+0{,}917$$

$$t(x)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) \text{ mit } x_0=-\sqrt{\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx -1{,}155 \text{ wird}$$

$$f'(x_0)=f'\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=-\frac{16}{9}\sqrt{3}\approx -3{,}079$$

$$f(x_0)=f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{161}{36}\approx 4{,}472$$

$$t_2(x)=-\frac{16}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot x+\frac{11}{12} \text{ oder } t_2(x)=-3{,}079\cdot x+0{,}917$$

Punkte: 8

e) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

Zu e)

$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4} \qquad f(0) = \frac{9}{4} = 2,25 \Rightarrow P_y\left(0 \mid \frac{9}{4} = 2,25\right)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4} = 0$ Substitution $z = x^2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}z^2 + 2z + \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot(-4)$

$\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0$

$p = -8 \qquad q = -9 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$

$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ | $z_1 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$
$z_2 = 4 - 5 = -1 \Rightarrow$ keine Lösung

$P_{x1}(-3 \mid 0) \qquad P_{x2}(3 \mid 0)$

Punkte: 8

f) Berechnen Sie die Funktionswerte für x = -2,5 ; -1,5 ; -0,5 ; 0,5 ; 1,5 ; 2,5 und stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf. Genauigkeit in der Wertetabelle, zwei Stellen hinter dem Komma.

Zu f)

$f(-2,5) = f(2,5) \approx 4,98$

$f(-1,5) = f(1,5) \approx 5,48$

$f(-0,5) = f(0,5) \approx 2,73$

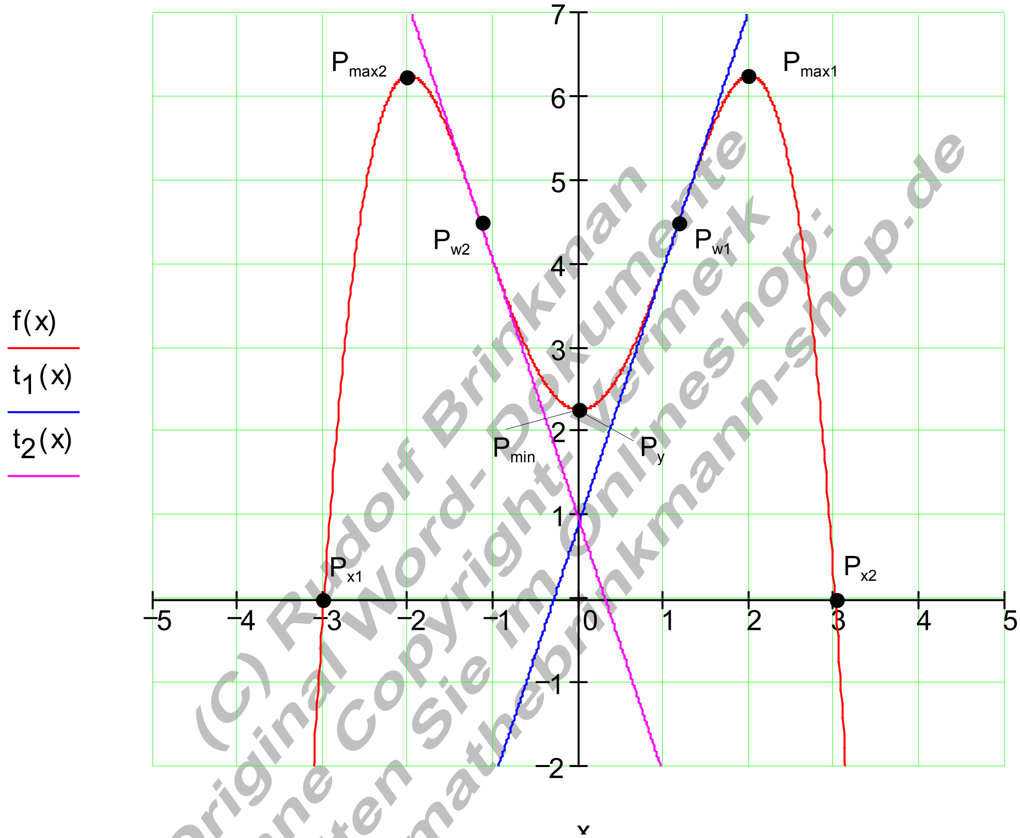
Wertetabelle:

	P_{x1}		P_{max2}		P_{w2}		P_y P_{max}
x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	$-1,16$	$-0,5$	0
$f(x)$	0	4,98	6,25	5,48	4,47	2,73	2,25
		P_{w1}		P_{max1}		P_{x2}	
x	0,5	1,16	1,5	2	2,5	3	
$f(x)$	2,73	4,47	5,48	6,25	4,98	0	

Punkte: 13

g) Zeichnen Sie möglichst genau den Graphen und die Wendetangenten in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.)

Zu g)



Punkte: 10

h) Machen Sie eine Aussage über das Monotonieverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für monoton wachsend, bzw. monoton fallend an.

Zu h)

streng monoton wachsend $]-\infty;-2[$

streng monoton fallend $]-2;-0[$

streng monoton wachsend $]0;2[$

streng monoton fallend $]2;\infty[$

Punkte: 8

i) Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für Rechts- bzw. Linkskrümmung an.

Zu i)

Rechtskrümmung $\left]-\infty;-\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx-1{,}155\right[$

Linkskrümmung $\left]-\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx-1{,}155;\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx1{,}155\right[$

Rechtskrümmung $\left]\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx1{,}155;\infty\right[$

Punkte: 6

j) Bestimmen Sie die Randpunkte des Definitionsbereiches.

Zu j)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x^4}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^4\left(-\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x^4}\right)=-\infty$$

Punkte: 4

Viel Erfolg!