E1:

a) $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ x = Zeit in Minuten, $f(x)$ = Adrenalinkonzentration

Bei Testbeginn (t = 0) beträgt die Adrenalinkonzentration 4 Einheiten (EH).

$$f(0) = 4 \Leftrightarrow n_0 + a \cdot 0 \cdot e^{k \cdot 0} = 4 \Leftrightarrow n_0 = 4 \Rightarrow f(x) = 4 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

Nach 10 Minuten ist die Konzentration auf maximal 14 EH angewachsen.

$f(10) = 14$ und $x = 10$ ist eine Extremstelle $\Rightarrow f'(10) = 0$

1. Ableitung von $f(x) = 4 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ bilden:

$f'(x) = u'v + uv'$ mit $u = a \cdot x \Rightarrow u' = a$ und $v = e^{k \cdot x} \Rightarrow v' = k \cdot e^{k \cdot x}$ wird

$$f'(x) = a \cdot e^{k \cdot x} + k \cdot a \cdot x \cdot e^{k \cdot x} = a \cdot (1 + k \cdot x) \cdot e^{k \cdot x}$$

$$f'(10) = 0 \Leftrightarrow a \cdot (1 + 10k) \cdot e^{10k} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 10k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{10}$$

$$f(x) = 4 + a \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot x}$$

$$f(10) = 14 \Leftrightarrow 4 + 10a \cdot e^{-1} = 14 \mid -4$$

$$\Leftrightarrow 10a \cdot e^{-1} = 10 \mid :10$$

$$\Leftrightarrow a \cdot e^{-1} = 1 \mid \cdot e$$

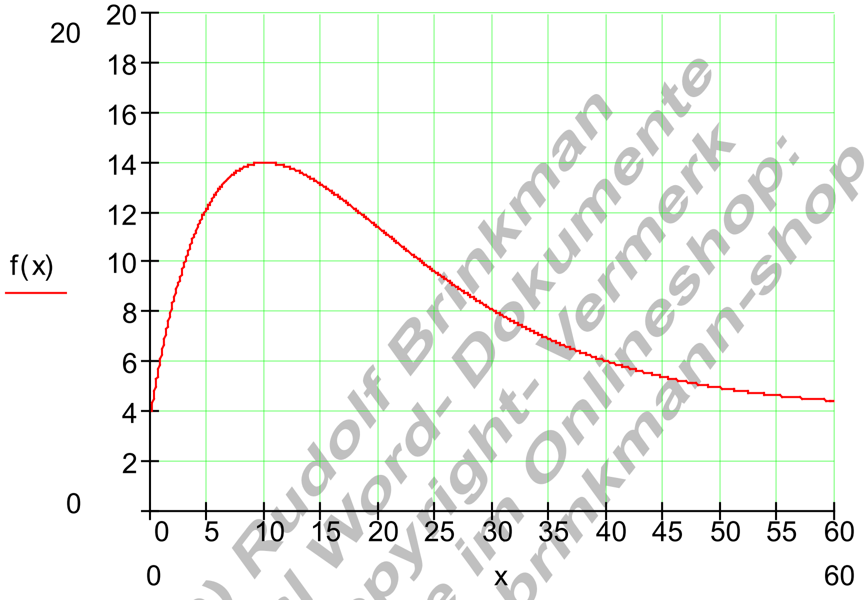
$$\Leftrightarrow a = e$$

$$\underline{\underline{f(x) = 4 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot x}}}$$

b) Wertetabelle:

x	0	5	10	15	20	25	30
f(x)	4	12,2	14	13,1	11,4	9,6	8,1
x	35	40	45	50	55	60	
f(x)	6,9	6	5,4	4,9	4,6	4,4	

Der Graph:



c) Entwicklungsverlauf der Adrenalinkonzentration.
Bei Versuchsbeginn beträgt die Konzentration 4 EH.
Die Konzentration nimmt anfangs stark zu, um dann nach 10 Minuten ihren Maximalwert von 14 EH zu erreichen.
Danach verringert sich die Konzentration nach einer abklingenden e- Funktion.

d) Der Wendepunkt.
Zuerst die drei Ableitungen:

$$f(x)=4+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}$$

$f'(x)=u'v+uv'$ mit $u=e\cdot x\Rightarrow u'=e$ und $v=e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{10}\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}$ wird

$$f'(x)=e\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}-\frac{1}{10}\cdot e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}=\left(e-\frac{1}{10}\cdot e\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}$$

$f''(x)=u'v+uv'$ mit $u=e-\frac{1}{10}e\cdot x\Rightarrow u'=-\frac{1}{10}e$ und $v=e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{10}\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}$ wird

$$f''(x)=-\frac{1}{10}e\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}-\frac{1}{10}\left(e-\frac{1}{10}\cdot e\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}=\left(-\frac{1}{5}\cdot e+\frac{1}{100}\cdot e\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}$$

$f'''(x)=u'v+uv'$ mit $u=-\frac{1}{5}\cdot e+\frac{1}{100}\cdot e\cdot x\Rightarrow u'=\frac{1}{100}e$

und $v=e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{10}\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}$ wird

$$f'''(x)=\frac{1}{100}e\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\cdot e+\frac{1}{100}\cdot e\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}=\left(\frac{3}{100}\cdot e-\frac{1}{1000}\cdot e\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}$$

Bedingungen für einen Wendepunkt:
$f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{5}\cdot e+\frac{1}{100}\cdot e\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}\cdot e+\frac{1}{100}\cdot e\cdot x=0\,\Big|+\frac{1}{5}\cdot e$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{100}\cdot e\cdot x=\frac{1}{5}\cdot e\,\Big|:e$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{100}\cdot x=\frac{1}{5}\,\Big|\cdot 100$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{100}{5}=20\ \left(\text{mögliche Wendestelle bei } x_w=20\right)$$

Überprüfung der Wendestelle:

$$f'''(x_w)=f'''(20)=\left(\frac{3}{100}\cdot e-\frac{20}{1000}\cdot e\right)\cdot e^{-2}=e\cdot\left(\frac{3}{100}-\frac{2}{100}\right)\cdot e^{-2}=\frac{1}{100}\cdot e^{-1}\neq 0$$

$x_w=20$ ist eine Wendestelle.

$$y_w=f(x_w)=f(20)=4+20\cdot e\cdot e^{-2}=4+20\cdot e^{-1}\approx 11{,}358$$

$$\underline{\underline{P_w\left(20\mid 4+20\cdot e^{-1}\approx 11{,}358\right)}}$$

In Bezug auf den Stresstest bedeutet der Wendepunkt, dass nach 20 Minuten die momentane Abnahme der Adrenalinkonzentration am größten ist.

e) Flächenberechnung:

$$\int_0^{40} f(x)\,dx = \int_0^{40}\left(4+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\right)dx$$

Zunächst wird das Integral in Teilintegrale aufgeteilt und ohne Grenzen berechnet, wobei die Konstante C jeweils weggelassen wird.

$$\int\left(4+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\right)dx = 4\cdot\underbrace{\int dx}_{\mathrm{I}} + e\cdot\underbrace{\int x\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\,dx}_{\mathrm{II}} = 4\cdot \mathrm{I} + e\cdot \mathrm{II}$$

$$\color{red}{\mathrm{I}}:\int dx = \color{red}{x}$$

$$\mathrm{II}:\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{10}\cdot x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-\frac{1}{10}\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\,dx \text{ (Lösung durch einfache Substitution)}$$

$$u(x) = -\frac{1}{10}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{10} \Rightarrow dx = -10du$$

$$\color{blue}{v} = \int e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\,dx = -10\int e^{u}\,du = -10\cdot e^{u} = \color{blue}{-10\cdot e^{-\frac{1}{10}x}}$$

$$\int u'\cdot v\,dx = \int 1\cdot\left(-10\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\right)dx = -10\cdot\int e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\,dx = -10\cdot\left(-10\cdot e^{-\frac{1}{10}x}\right) = 100\cdot e^{-\frac{1}{10}x}$$

$$\color{red}{\mathrm{II}}:\int x\cdot e^{-\frac{1}{10}x} = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx = x\cdot\left(-10\cdot e^{-\frac{1}{10}x}\right) - 100\cdot e^{-\frac{1}{10}x} = \color{red}{-10(x+10)\cdot e^{-\frac{1}{10}x}}$$

$$\int f(x)\,dx = 4\cdot\color{red}{\mathrm{I}} + e\cdot\color{red}{\mathrm{II}} = 4x - 10\cdot e(x+10)\cdot e^{-\frac{1}{10}x}$$

$$\int_0^{40} f(x)\,dx = \left[4x - 10\cdot e(x+10)\cdot e^{-\frac{1}{10}x}\right]_0^{40}$$

$$= 160 - 500\cdot e\cdot e^{-4} - \left(-100\cdot e\cdot e^{0}\right) = 160 - 500\cdot e^{-3} + 100\cdot e \approx \underline{\underline{406{,}935}}$$

Die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse (Adrenalinkonzentration mal Zeit) kann als Wirkungsfaktor aufgefasst werden.

f) Asymptote:

Hilfestellung: $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-k\cdot x} = 0$ für $k > 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(4 + e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot x}\right) = 4$$

Die Asymptote ist die Parallele zur x- Achse im Abstand 4.
In Bezug auf den Stresstest bedeutet das:
Nach längerer Zeit geht die Adrenalinkonzentration auf den Wert 4 zurück.

E2:

a) $n = 100$ Fahrzeuge werden überprüft.

Davon werden 40 von Frauen und 60 Männern gelenkt.

24% der überprüften Fahrzeuge, wurden von Männern gelenkt und fuhren zu schnell:

$$\Rightarrow M \cap R = \frac{0,24 \cdot 60}{100} = 0,144$$

14% der überprüften Fahrzeuge, wurden von Frauen gelenkt und fuhren zu schnell:

$$\Rightarrow W \cap R = \frac{0,14 \cdot 40}{100} = 0,056$$

	R	N	
M	0,144	0,456	0,6
W	0,056	0,344	0,4
	0,2	0,8	1

M : Mann
W : Frau
R : Raser
N : kein Raser

$$P(A) = P(W \cap R) = 0,056$$

Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,056 von einem weiblichen Raser gelenkt.

$$P(B) = P(N) = 0,8$$

Eine zufällig ausgewähltes Fahrzeug ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 nicht zu schnell.

$$P(C) = P_M(R) = \frac{P(M \cap R)}{P(M)} = \frac{0,144}{0,6} = 0,24$$

Eine zufällig ausgewähltes Fahrzeug, von dem man weiß, dass es von einem Mann gelenkt wird, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,24 zu schnell.

$$P(D) = P_R(W) = \frac{P(R \cap W)}{P(R)} = \frac{0,056}{0,2} = 0,28$$

Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug, von dem man weiß, dass es zu schnell ist, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,28 von einer Raserin gelenkt.

b) Laplace- Bedingung:

$p = 0,2 \qquad n = 100$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = \sqrt{16} = 4$

Laplace- Bedingung: $\sigma > 3$

Die Laplace- Bedingung ist erfüllt.

c) Die Polizei kann bei der Überprüfung von n = 100 Fahrzeugen mit etwa 20 Bußgeldbescheiden rechnen. Das entspricht dem Erwartungswert.

d) $P(X = 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 19) = 0,559 - 0,460 = \underline{\underline{0,099}}$

Die Wahrscheinlichkeit für den Erwartungswert beträgt 0,099.

e) $P(15 \le X \le 25) = P(X \le 25) - P(X \le 14) = 0{,}913 - 0{,}080 = \underline{\underline{0{,}833}}$

Die Anzahl der Raser liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,833 zwischen 15 und 25 einschließlich.

f) Hypothesentest:

$p = 0{,}2 \quad \mu = 20 \quad \sigma = 4$ Signifikanzniveau $\alpha \le 0{,}1$

Beidseitiger Test:

Der Ablehnungsbereich befindet sich auf beiden Seiten vom Annahmebereich.

Linksseitiger Ablehnungsbereich:

$P(X \le k_1) \le 0{,}05 \Rightarrow k_1 \le 13$ denn $P(X \le 13) = 0{,}047$

Für den Annahmebereich gilt:

$P(14 \le X \le k_2) \ge 0{,}90$ denn das Signifikanzniveau ist $\alpha \le 0{,}1$

Zu bestimmen ist die obere Grenze des Annahmebereichs.

$P(X \le k_2) - P(X \le 13) \ge 0{,}9$

$\Leftrightarrow P(X \le k_2) - 0{,}047 \ge 0{,}9 \,|+ 0{,}047$

$\Leftrightarrow P(X \le k_2) \ge 0{,}947$ Diese Bedingung ist für $k_2 = 27$ erfüllt, denn $P(X \le 27) = 0{,}966$

Damit wird der Annahmebereich: $A = \{14;...;20;...;27\}$

und der Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0;...;13\} \cup \{28;...;100\}$

Kontrolle des Signifikanzniveaus:

$$P(\overline{A}) = P(X \le 13) + P(X \ge 28) = P(X \le 13) + [1 - P(X \le 27)]$$

$$= 0{,}047 + [1 - 0{,}966] = 0{,}047 + 0{,}034 = 0{,}081 < 0{,}1$$

Der Fehler 1. Art beträgt 0,081. In etwa 8,1% aller Fälle liegt das Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich, so dass die wahre Hypothese p = 0,2 zu Unrecht verworfen wird.