Klassenarbeit SG14/24D	**Mathematik NAME:**	**Bearbeitungszeit 135 min.**	**Di 12.12.06**

Hilfsmittel: Taschenrechner
Formulieren Sie zu jeder Aufgabe einen passenden Antwortsatz!
Verwenden Sie bei der Bearbeitung die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung üblichen Schreibweisen und Darstellungen.

1. In einem Land der dritten Welt sind 20% der Bevölkerung an Aids erkrankt.
   Von einem Aids- Test weiß man, dass er nicht ganz sicher ist. Es können zwei Fehler auftreten.
   1. Bei 96% der Erkrankten fällt der Test positiv aus, beim Rest wird die Krankheit nicht erkannt.
   2. Bei 94% der Gesunden fällt der Test negativ aus, beim Rest wird fälschlicherweise ein Aidsverdacht ausgesprochen.

   Berechnen Sie:
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, von der man weiß, dass bei ihr der Test positiv ausgefallen ist, wirklich an Aids erkrankt ist?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, von der man weiß, dass bei ihr der Test negativ ausgefallen ist, wirklich gesund ist.?
   Runden Sie das Ergebnis auf 3 Stellen hinter dem Komma uns schreiben Sie einen aussagekräftigen Antwortsatz.

   Stellen Sie zuerst eine Vierfeld- Tafel nach folgendem Schema auf:

	K	$\overline{K}$	
T	x	x	x
$\overline{T}$	x	x	x
	x	x	1

T: Testergebnis ist positiv
$\overline{T}$: Testergebnis ist negativ
K: Person ist erkrankt
$\overline{K}$: Person ist nicht erkrankt, also gesund

E1:

	K	$\overline{K}$	
T	0,192	0,048	0,24
$\overline{T}$	0,008	0,752	0,76
	0,2	0,8	1

T: Testergebnis ist positiv
$\overline{T}$: Testergebnis ist negativ
K: Person ist erkrankt
$\overline{K}$: Person ist nicht erkrankt, also gesund

$$P_T(K) = \frac{P(T \cap K)}{P(T)} = \frac{0{,}192}{0{,}24} = \underline{\underline{0{,}8}}$$

Eine Person, von der man weiß, dass bei ihr der Aids- Test positiv ausgefallen ist, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 (80%) auch tatsächlich erkrankt.

$$P_{\overline{T}}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{K})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}752}{0{,}76} \approx \underline{\underline{0{,}989}}$$

Eine Person, von der man weiß, dass bei ihr der Aids- Test negativ ausgefallen ist, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,989 (98,9%) auch tatsächlich gesund.

2. In einem Eierkarton befinden sich 30 Eier, davon sind 6 faul.
   Es werden 6 Eier entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
   A: Alle 6 Eier sind einwandfrei.
   B: Genau 2 Eier sind faul.
   C: Genau 4 Eier sind faul.
   Berechnen Sie auf drei Stellen hinter dem Komma genau und schreiben Sie zu jedem Ereignis einen Antwortsatz.

E2:
Die Anzahl aller Möglichkeiten aus 30 Eiern 6 auszuwählen ist

$$\binom{30}{6} = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 593.775$$

A: 6 aus 24 und 0 aus 6

$$P(A) = \frac{\binom{24}{6}\cdot\binom{6}{0}}{\binom{30}{6}} = \frac{\frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{593.775} = \frac{134.596}{593.775} \approx \underline{\underline{0,227}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei der Entnahme von 6 Eiern, genau 6 einwandfreie zu erhalten, ist 0,227.

B: 4 aus 24 und 2 aus 6

$$P(B) = \frac{\binom{24}{4}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{30}{6}} = \frac{\frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}}{593.775} = \frac{10.626\cdot 15}{593.775} \approx \underline{\underline{0,268}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei der Entnahme von 6 Eiern, genau 2 faule zu erhalten, ist 0,268.

C: 2 aus 24 und 4 aus 6

$$P(B) = \frac{\binom{24}{2}\cdot\binom{6}{4}}{\binom{30}{6}} = \frac{\frac{24\cdot 23}{2\cdot 1}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{593.775} = \frac{276\cdot 15}{593.775} \approx \underline{\underline{0,007}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei der Entnahme von 6 Eiern, genau 4 faule zu erhalten, ist 0,007.

3. Es wird folgendes Spiel vereinbart:
   Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen und ihre Augensumme betrachtet.
   Beträgt sie 2, dann werden 4 € ausgezahlt, beträgt sie 3 oder 4, wird 1 € ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.
   Als Betreiber dieses Spiels wollen Sie 20% der zu im Mittel zu erwartenden Auszahlungen als Gewinn einnehmen.
   Wie hoch muss der Einsatz pro Spiel sein? Ist das Spiel fair?
   Hinweis: Bestimmen Sie zuerst den Erwartungswert der Auszahlungen.

E3:

Augen Summe	Ereignis	Auszahlung x_i in €	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$
2	$(1\|1)$	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$
3	$(1\|2);(2\|1)$	1	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
4	$(1\|3);(3\|1);(2\|2)$	1	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$
>4	....	0	$\frac{30}{36}$	0

$$E(X)=\frac{4}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{9}{36}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Der durchschnittliche Auszahlungsbetrag ist 0,25 €. Davon 20% sind 0,05 €.
Bei einem Einsatz von 0,3 € macht der Betreiber des Spiels über lange Sicht einen Gewinn von 20% der Auszahlungen. Das Spiel ist nicht fair, da der Betreiber immer gewinnt.

4. Von einer großen Ladung Apfelsinen sind 20% verdorben.
   Es werden 5 Stück entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
   A: Eine Apfelsine ist verdorben.
   B: Alle Apfelsinen sind in Ordnung.
   C: Mindestens zwei Apfelsinen sind verdorben.

E4:

Treffer: Apfelsine ist verdorben. $n=5$; $p=20\% \Rightarrow p=\frac{1}{5}$

$$P(A)=P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4=5\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{256}{625}=\frac{1280}{3125}=\frac{256}{625}=\underline{\underline{0{,}4096}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine Apfelsine verdorben ist, ist 0,4096.

B: Alle Apfelsinen sind in Ordnung, bedeutet, keine Apfelsine ist verdorben.

$$P(B)=P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5=1\cdot 1\cdot\frac{1024}{3125}=\underline{\underline{0{,}32768}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Apfelsinen in Ordnung sind, ist 0,32768.

$$P(C)=P(X\le 5)-P(X=1)-P(X=0)$$

$$=1-\frac{1280}{3125}-\frac{1024}{3125}=\frac{3125-1280-1024}{3125}=\frac{821}{3125}=\underline{\underline{0{,}26272}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Apfelsinen verdorben sind, ist 0,26272.

5. Jemand kauft 20 Blumenzwiebeln einer Sorte, bei der Erfahrungsgemäß 90% der Zwiebeln keimen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 20 Zwiebeln:
   A: mindestens 16 keimen
   B: mindestens 18 keimen
   C: alle keimen

Binomialverteilung für n = 20 und p = 0,9

k	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$P(X \le k)$	0,000	0,002	0,011	0,043	0,133	0,323	0,608	0,878	1,000

E5:

$$P(A) = P(X \ge 16) = P(X \le 20) - P(X \le 15) = 1 - 0{,}043 = \underline{\underline{0{,}957}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 20 Zwiebeln mindestens 16 keimen, ist 0,957 (95,7%).

$$P(B) = P(X \ge 18) = P(X \le 20) - P(X \le 17) = 1 - 0{,}323 = \underline{\underline{0{,}677}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 20 Zwiebeln mindestens 18 keimen, ist 0,677 (67,7%).

$$P(C) = P(X = 20) = P(X \le 20) - P(X \le 19) = 1 - 0{,}878 = \underline{\underline{0{,}122}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 20 Zwiebeln alle keimen, ist 0,122 (12,2%).

6. Bei der Herstellung von Spielzeugautos gibt es durchschnittlich bei 8% der Autos Mängel. An einem Tag werden 2300 Autos hergestellt. X sei die Zufallsvariable für die Anzahl der mängelbehafteten Autos.
   Mit wie vielen mängelbehafteten Autos ist zu rechnen (Erwartungswert E(X))?
   Wie groß ist die zugehörige Standardabweichung?

E6:

Mit $n = 2300$ und $p = 0{,}08$ (8%) erhält man:

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 2300 \cdot 0{,}08 = \underline{\underline{184}}$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{2300 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92} \approx \underline{\underline{13{,}01}}$

An einem Tag hat man durchschnittlich mit 184 mängelbehafteten Autos zu rechnen. Die zugehörige Standardabweichung beträgt etwa 13 Autos.