Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 23.05.06**
SG14/24D Gruppe A	**NAME:**		

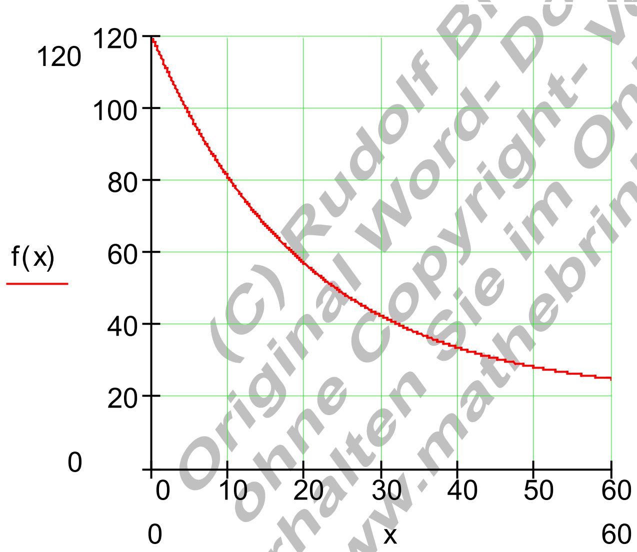
Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung

1. Operationsbesteck wird einem Sterilisator entnommen.
   Der Abkühlungsvorgang lässt sich durch folgende Funktionsgleichung beschreiben:

   $f(x) = 20 + 100 \cdot e^{-\frac{1}{20}x}$ für $x > 0$ sowie x in Minuten und $f(x)$ in Grad Celsius.

a) Ergänzen Sie die Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen in ein Koordinatensystem.

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
f(x)	120	97,88	80,65	67,24	56,79	48,65	42,31	37,38	33,53	30,54	28,21	26,39	24,98



b) Auf welche Temperatur kühlt sich das Operationsbesteck nach langer Zeit ab? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

$f(x) = 20 + 100 \cdot e^{-\frac{1}{20}x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(20 + 100 \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{20}x}}_{\to 0}\right) = 20$

Nach sehr langer Zeit kühlt sich das Operationsbesteck auf 20 Grad Celsius ab.

c) Nach welcher Zeit wird die Temperatur 30 Grad Celsius erreicht?
(Berechnen Sie diesen Wert auf 3 Stellen hinter dem Komma genau)

$$f(x) = 20 + 100 \cdot e^{-\frac{1}{20}x}$$

$$f(x) = 30 \Leftrightarrow 20 + 100 \cdot e^{-\frac{1}{20}x} = 30 | -20$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot e^{-\frac{1}{20}x} = 10 | : 100$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{20}x} = \frac{1}{10} | \ln$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{20}x = \ln\left(\frac{1}{10}\right) | \cdot (-20)$$

$$\Leftrightarrow x = -20 \cdot \ln\left(\frac{1}{10}\right) \approx \underline{\underline{46,052}}$$

Nach etwa 46 Minuten wird die Temperatur 30 Grad Celsius erreicht.

d) Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur in den ersten 10 Minuten.
(Berechnen Sie diesen Wert auf 3 Stellen hinter dem Komma genau)

$$f(x) = 20 + 100 \cdot e^{-\frac{1}{20}x}$$

$$TM = \frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)\,dx = \frac{1}{10}\int_0^{10}\left(20 + 100 \cdot e^{-\frac{1}{20}x}\right)dx$$

$$= 2\underbrace{\int_0^{10} dx}_{I} + 10\underbrace{\int_0^{10} e^{-\frac{1}{20}x}\,dx}_{II} = 2 \cdot I + 10 \cdot II$$

$$I = \int_0^{10} dx = [x]_0^{10} = 10 - 0 = 10$$

$$II = \int_0^{10} e^{-\frac{1}{20}x}\,dx \quad \text{Lösung durch Substitution}$$

$$u(x) = -\frac{1}{20}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{20} \Rightarrow dx = -20\,du$$

$$u(0) = -\frac{1}{20} \cdot 0 = 0; u(10) = -\frac{1}{20} \cdot 10 = -\frac{1}{2}$$

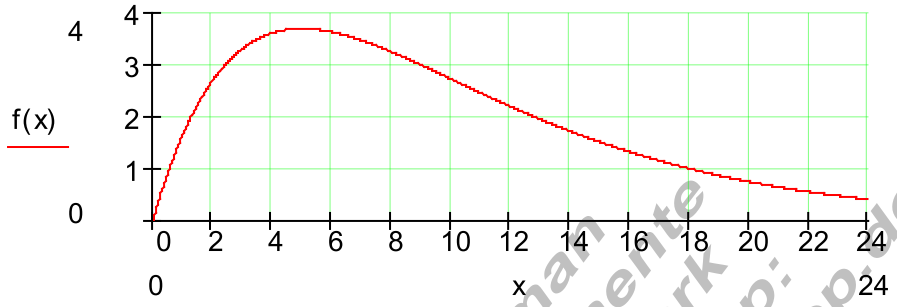
$$II = -20\int_0^{-\frac{1}{2}} e^u\,du = 20\int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^u\,du = \left[20 \cdot e^u\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$= 20 \cdot e^0 - 20 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = 20 - 20 \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

$$TM = 2 \cdot I + 10 \cdot II = 2 \cdot 10 + 10 \cdot \left(20 - 20 \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right) = 220 - 200 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx \underline{\underline{98,694}}$$

Die durchschnittliche Temperatur in den ersten 10 Minuten beträgt 98,694 Grad Celsius

2. Nach einer Operation erhält ein Patient eine Infusion. Die Abbildung zeigt die Dosierung über einen Zeitraum von 24 Stunden.
(x in Stunden, f(x) in mg/h)



Der Verlauf der Dosierung wird mit der Funktion $f(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$ modelliert.

a) Beschreiben Sie grob den Verlauf der Dosierung.

Verlaufsbeschreibung:
Die Dosierung beginnt bei 0 mg/h.
Sie steigt in den ersten Stunden an, um nach etwa 5 Stunden einen Maximalwert von ca. 3,8 mg/h zu erreichen.
Danach klingt sie wieder ab.
Nach ca. 12 Stunden ist die Abnahme am stärksten.

b) Nach welcher Zeit ist die Dosierung maximal? Wie hoch ist sie dann.

$$f(x) = \underbrace{2 \cdot x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_{v} \Rightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2; v = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{5}x} - 2x \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} = \underbrace{\left(2 - \frac{2}{5}x\right)}_{u} \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_{v}$$

$$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = 2 - \frac{2}{5}x \Rightarrow u' = -\frac{2}{5}; v = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}x} - \left(2 - \frac{2}{5}x\right) \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} = \underbrace{\left(\frac{2}{25}x - \frac{4}{5}\right)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_{v}$$

$$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = \frac{2}{25}x - \frac{4}{5} \Rightarrow u' = \frac{2}{25}; v = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{25} \cdot e^{-\frac{1}{5}x} - \left(\frac{2}{25}x - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} = \left(\frac{6}{25} - \frac{2}{125}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(2-\frac{2}{5}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{5}x}=0$$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{2}{5}x=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_e=5}} \text{ Stelle mit waagerechter Tangente}$$

$$f''(x_e)=f''(5)=\left(\frac{2}{25}\cdot 5-\frac{4}{5}\right)\cdot e^{-1}\approx -0,147<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_e=5$$

$$f(x_e)=f(5)=2\cdot 5\cdot e^{-1}\approx \underline{\underline{3,679}}$$

Nach 5 Stunden ist die Dosierung maximal, sie beträgt dann 3,679 mg/h

c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Abnahme der Dosierung am stärksten?

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{25}x-\frac{4}{5}\right)\cdot e^{-\frac{1}{5}x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{25}x-\frac{4}{5}=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_w=10}} \text{ mögliche Wendestelle}$$

$$f'''(x_w)=f'''(10)=\left(\frac{6}{25}-\frac{2}{125}\cdot 10\right)\cdot e^{-2}\approx 0,011\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_w=10$$

Nach 10 Stunden ist die Abnahme der Dosierung am stärksten.

d) Bestimmen Sie die Menge des verabreichten Medikamentes, wenn die Infusion 24 Stunden durchgeführt wird.

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$M = \int_0^{24} f(x)\,dx = \int_0^{24} \underbrace{2 \cdot x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_{v'}\,dx$$

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u'v\,dx$$

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2;\, v' = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v = \int e^{-\frac{1}{5}x}\,dx = -5e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$\int f(x)\,dx = 2x \cdot \left(-5e^{-\frac{1}{5}x}\right) - \int 2 \cdot \left(-5e^{-\frac{1}{5}x}\right) dx = -10x \cdot e^{-\frac{1}{5}x} + 10 \underbrace{\int e^{-\frac{1}{5}x}\,dx}_{-5e^{-\frac{1}{5}x}} = -10(x+5)e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$M = \int_0^{24} f(x)\,dx = \left[-10(x+5)e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^{24} = -290 \cdot e^{-\frac{24}{5}} + 50 \approx \underline{\underline{47,613}}$$

Nach 24 Stunden wurde eine Menge von 47,613 mg verabreicht.

Viel Erfolg!

Klassenarbeit SG14/24D Gruppe B	**Mathematik NAME:**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 23.05.06**

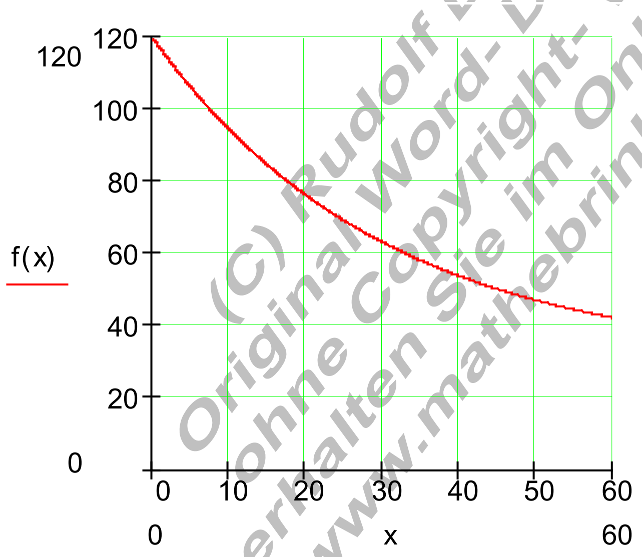
Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung

1. Operationsbesteck wird einem Sterilisator entnommen.
   Der Abkühlungsvorgang lässt sich durch folgende Funktionsgleichung beschreiben:

   $f(x) = 30 + 90 \cdot e^{-\frac{1}{30}x}$ für $x > 0$ sowie x in Minuten und $f(x)$ in Grad Celsius.

a) Ergänzen Sie die Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen in ein Koordinatensystem.

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
f(x)	120	106,18	94,49	84,59	76,21	69,11	63,11	58,03	53,72	50,08	47	44,39	42,18



b) Auf welche Temperatur kühlt sich das Operationsbesteck nach langer Zeit ab? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

$$f(x) = 30 + 90 \cdot e^{-\frac{1}{30}x}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(30 + 90 \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{30}x}}_{\to 0}\right) = 30$$

Nach sehr langer Zeit kühlt sich das Operationsbesteck auf 30 Grad Celsius ab.

c) Nach welcher Zeit wird die Temperatur 40 Grad Celsius erreicht?

$$f(x) = 30 + 90 \cdot e^{-\frac{1}{30}x}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 40 &\Leftrightarrow 30 + 90 \cdot e^{-\frac{1}{30}x} = 40 \mid -30 \\ &\Leftrightarrow 90 \cdot e^{-\frac{1}{30}x} = 10 \mid :90 \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{30}x} = \frac{1}{9} \mid \ln \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{30}x = \ln\left(\frac{1}{9}\right) \mid \cdot(-30) \\ &\Leftrightarrow x = -30 \cdot \ln\left(\frac{1}{9}\right) \approx \underline{\underline{65{,}917}} \end{aligned}$$

Nach etwa 66 Minuten wird die Temperatur 30 Grad Celsius erreicht.

d) Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur in den ersten 20 Minuten.

$$f(x) = 30 + 90 \cdot e^{-\frac{1}{30}x}$$

$$TM = \frac{1}{20}\int_0^{20} f(x)\,dx = \frac{1}{20}\int_0^{20}\left(30 + 90 \cdot e^{-\frac{1}{30}x}\right)dx$$

$$= \frac{3}{2}\underbrace{\int_0^{20} dx}_{I} + \frac{9}{2}\underbrace{\int_0^{20} e^{-\frac{1}{30}x}\,dx}_{II} = \frac{3}{2}\cdot I + \frac{9}{2}\cdot II$$

$$I = \int_0^{20} dx = [x]_0^{20} = 20 - 0 = 20$$

$$II = \int_0^{20} e^{-\frac{1}{30}x}\,dx \qquad \text{Lösung durch Substitution}$$

$$u(x) = -\frac{1}{30}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{30} \Rightarrow dx = -30\,du$$

$$u(0) = -\frac{1}{30}\cdot 0 = 0; u(20) = -\frac{1}{30}\cdot 20 = -\frac{2}{3}$$

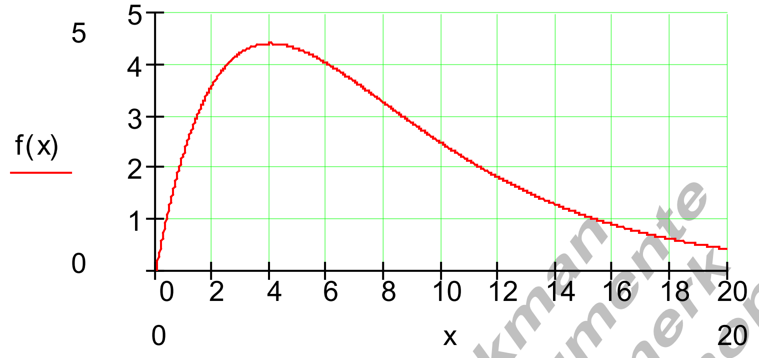
$$II = -30\int_0^{-\frac{2}{3}} e^u\,du = 30\int_{-\frac{2}{3}}^{0} e^u\,du = \left[30 \cdot e^u\right]_{-\frac{2}{3}}^{0}$$

$$= 30 \cdot e^0 - 30 \cdot e^{-\frac{2}{3}} = 30 - 30 \cdot e^{-\frac{2}{3}}$$

$$TM = \frac{3}{2}\cdot I + \frac{9}{2}\cdot II = \frac{3}{2}\cdot 20 + \frac{9}{2}\cdot\left(30 - 30 \cdot e^{-\frac{2}{3}}\right) = 165 - 135 \cdot e^{-\frac{2}{3}} \approx \underline{\underline{95{,}689}}$$

Die durchschnittliche Temperatur in den ersten 20 Minuten beträgt 95,689 Grad Celsius

2. Nach einer Operation erhält ein Patient eine Infusion. Die Abbildung zeigt die Dosierung über einen Zeitraum von 24 Stunden.
(x in Stunden, f(x) in mg/h)



Der Verlauf der Dosierung wird mit der Funktion $f(x) = 3 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ modelliert.

a) Beschreiben Sie grob den Verlauf der Dosierung.

Verlaufsbeschreibung:
Die Dosierung beginnt bei 0 mg/h.
Sie steigt in den ersten Stunden an, um nach etwa 4 Stunden einen Maximalwert von ca. 4,3 mg/h zu erreichen.
Danach klingt sie wieder ab.
Nach ca. 8 Stunden ist die Abnahme am stärksten.

b) Nach welcher Zeit ist die Dosierung maximal? Wie hoch ist sie dann.

$$f(x)=\underbrace{3\cdot x}_{u}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{v}\Rightarrow f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$u=3x\Rightarrow u'=3;v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'(x)=3\cdot e^{-\frac{1}{4}x}-3x\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}=\underbrace{\left(3-\frac{3}{4}x\right)}_{u}\underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{v}$$

$$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$u=3-\frac{3}{4}x\Rightarrow u'=-\frac{3}{4};v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f''(x)=-\frac{3}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}-\left(3-\frac{3}{4}x\right)\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}=\underbrace{\left(\frac{3}{16}x-\frac{3}{2}\right)}_{u}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{v}$$

$$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$u=\frac{3}{16}x-\frac{3}{2}\Rightarrow u'=\frac{3}{16};v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{16}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}-\left(\frac{3}{16}x-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}=\left(\frac{9}{16}-\frac{3}{64}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left(3-\frac{3}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=0$$

$$\Leftrightarrow 3-\frac{3}{4}x=0\Leftrightarrow \underline{\underline{x_e=4}}\text{ Stelle mit waagerechter Tangente}$$

$$f''(x_e)=f''(4)=\left(\frac{3}{16}\cdot 4-\frac{3}{2}\right)\cdot e^{-1}\approx -0{,}276<0\Rightarrow\text{rel. Max. bei } x_e=4$$

$$f(x_e)=f(4)=3\cdot 4\cdot e^{-1}\approx\underline{\underline{4{,}415}}$$

Nach 4 Stunden ist die Dosierung maximal, sie beträgt dann 4,415 mg/h

c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Abnahme der Dosierung am stärksten?

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{16}x-\frac{3}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{16}x-\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_w=8}} \text{ mögliche Wendestelle}$$

$$f'''(x_w)=f'''(8)=\left(\frac{9}{16}-\frac{3}{64}\cdot 8\right)\cdot e^{-2}\approx 0{,}025\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_w=8$$

Nach 8 Stunden ist die Abnahme der Dosierung am stärksten.

d) Bestimmen Sie die Menge des verabreichten Medikamentes, wenn die Infusion 20 Stunden durchgeführt wird.

$$f(x)=3\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$M=\int_0^{20} f(x)\,dx=\int_0^{20}\underbrace{3\cdot x}_{u}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{v'}\,dx$$

$$\int u\cdot v'\,dx=u\cdot v-\int u'v\,dx$$

$$u=3x\Rightarrow u'=3;\ v'=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v=\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx=-4e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$\int f(x)\,dx=3x\cdot\left(-4e^{-\frac{1}{4}x}\right)-\int 3\cdot\left(-4e^{-\frac{1}{4}x}\right)dx=-12x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+12\underbrace{\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx}_{-4e^{-\frac{1}{4}x}}=-12(x+4)e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$M=\int_0^{20} f(x)\,dx=\left[-12(x+4)e^{-\frac{1}{4}x}\right]_0^{20}=-288\cdot e^{-5}+48\approx\underline{\underline{46{,}059}}$$

Nach 20 Stunden wurde eine Menge von 46,059 mg verabreicht.

Viel Erfolg!