Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 25.10.05**
SG14/24D Gruppe A	**NAME:**		

Gruppe A

zu 1 a)

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(-1|0): f(-1) = 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 0$

$P_1(3|6) \quad : f(3) = 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 6$

$P_1(1|4) \quad : f(1) = 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$

a_0	a_1	a_2		
1	−1	1	0	
1	3	9	6	II − I
1	1	1	4	III − I
1	−1	1	0	
0	4	8	6	
0	2	0	4	

$2a_1 = 4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$4a_1 + 8a_2 = 6 \Leftrightarrow 4 \cdot 2 + 8a_2 = 6 \,|\, -8$

$\Leftrightarrow 8a_2 = 6 - 8 = -2 \,|\, :8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{4}}$

$a_0 - a_1 + a_2 = 0 \Leftrightarrow a_0 - 2 - \frac{1}{4} = 0 \,|\, +\frac{9}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{9}{4}}$

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{9}{4}}}$$

5 Punkte

zu 1b)

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{9}{4} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

Bedingung für waagerechte Tangente:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 2 = 0 \,|\, -2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = -2 \,|\, :\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x = 4$

An der Stelle $x = x_s = 4$ hat der Graph von $f(x)$ eine waagerechte Tangente.
Dort liegt der Scheitelpunkt.
Die y – Koordinate des Scheitelpunktes ist:

$$y_s = f(x_s) = f(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 + \frac{9}{4} = -4 + 8 + \frac{9}{4} = 4 + \frac{9}{4} = \frac{16}{4} + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(4 \,|\, \frac{25}{4}\right)}}$$

5 Punkte

zu 1c)

Die Achsenschnittpunkte für: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{9}{4}$

Bedingung für den Schnittpunkt mit der y – Achse:

$$y_s = f(0) = \frac{9}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{9}{4}\right)}}$$

Bedingung für Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{9}{4} = 0 \mid : \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$$

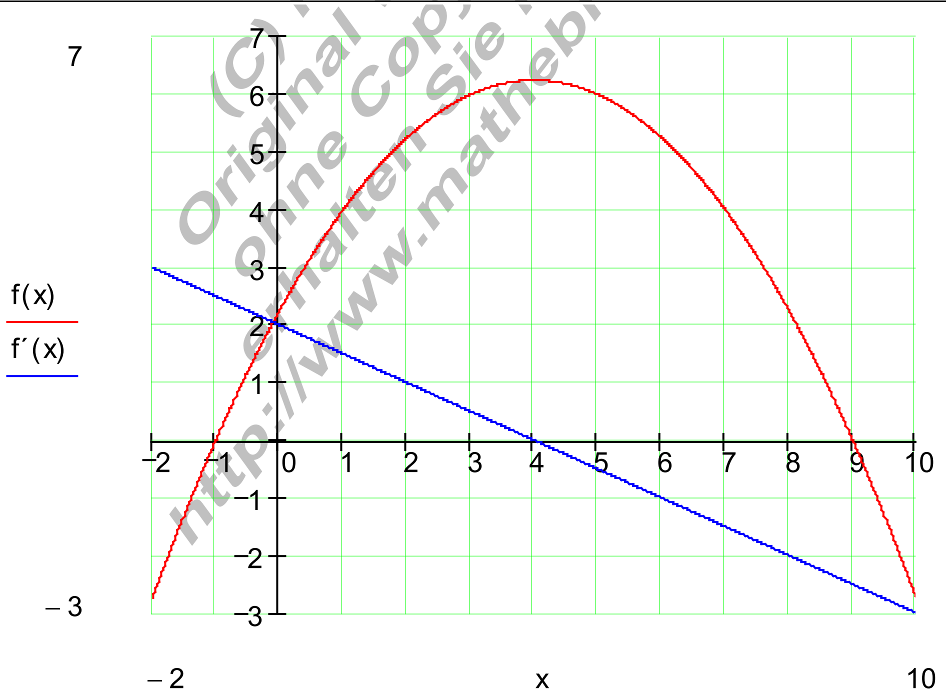
$$\Rightarrow p = -8\,;\, q = -9\,;\, D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-8}{2}\right)^2 + 9 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \Rightarrow x_1 = 4 + 5 = 9\,;\, x_2 = 4 - 5 = -1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(9 \mid 0)\,;\, P_{x2}(-1 \mid 0)}}$$

4 Punkte

zu 1d)



4 Punkte

zu 1e)

Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 gibt die Steigung der Tangente an, die den Funktionsgraphen im Punkt P_0 (x_0 | y_0) berührt und ist damit zugleich die Steigung des Funktionsgraphen im Punkt P_0 (x_0 | y_0).

2 Punkte

zu 2

a)	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-1 \Rightarrow f'(x)=x+2$	**1 Punkt**
b)	$f(x)=3x-4+2x^3-6x+2x^2 \Rightarrow f'(x)=6x^2+4x-3$	**2 Punkte**
c)	$f(x)=(3x-2)^2=9x^2-12x+4 \Rightarrow f'(x)=18x-12$	**2 Punkte**
d)	$f(x)=ax^3+2bx^2+c^2-dx+2e \Rightarrow f'(x)=3ax^2+4bx-d$	**2 Punkte**
e)	$f(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{5}x-\frac{4}{29} \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{4}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}$	**2 Punkte**
f)	$f(x)=(2x+1)(x+4)=2x^2+9x+4 \Rightarrow f'(x)=4x+9$	**2 Punkte**

zu 3

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ $\qquad$ $P(-1|f(-1))$

$f(-1)=\frac{1}{4}(-1)^3-\frac{3}{4}(-1)^2+5=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+5=4 \Rightarrow P(-1|4)$

Die Tangente $t(x)$ im Punkt $P(-1|4)$ ist eine Gerade, die durch den Punkt $P(-1|4)$ verläuft und die Steigung a_t hat.
Die Steigung der Tangente im Punkt $P(-1|4)$ ist aber genau die Steigung des Funktionsgraphen in diesem Punkt, also gleich der 1. Ableitung an der Stelle $x_0=-1$

$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x \Rightarrow f'(-1)=\frac{3}{4}\cdot(-1)^2-\frac{3}{2}\cdot(-1)=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow a_t=\frac{9}{4}$ und somit $t(x)=\frac{9}{4}x+b$

Punktprobe mit $P(-1|4)$:

$t(-1)=4 \Leftrightarrow \frac{9}{4}\cdot(-1)+b=4$

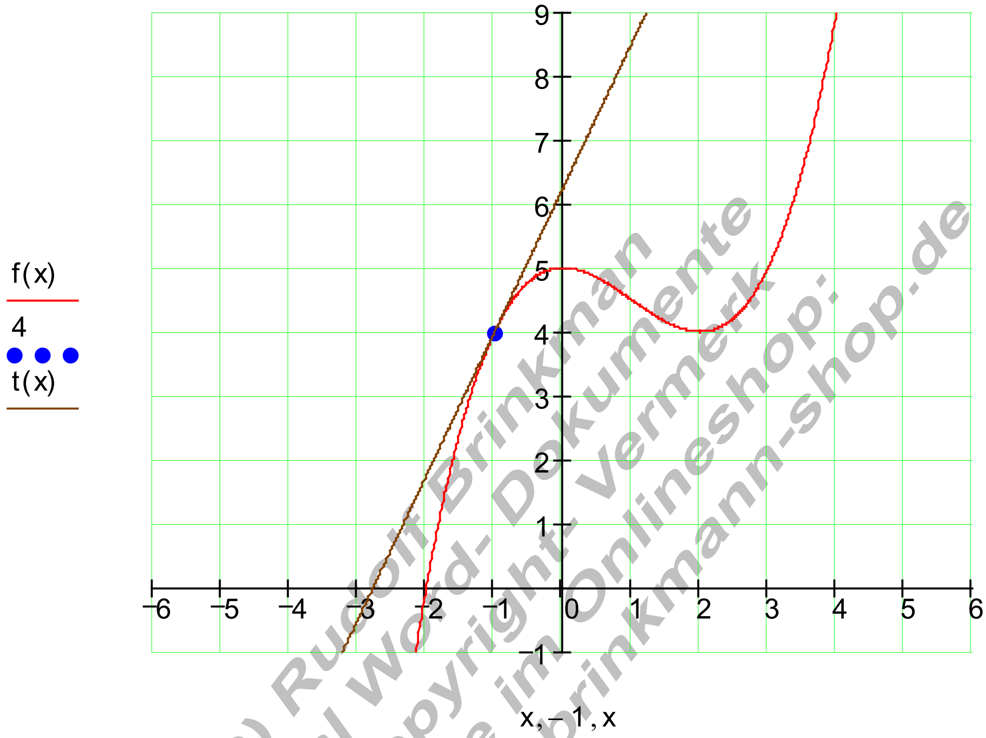
$\Leftrightarrow -\frac{9}{4}+b=4 \mid +\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow b=4+\frac{9}{4}=\frac{16}{4}+\frac{9}{4}=\frac{25}{4} \Rightarrow \underline{\underline{t(x)=\frac{9}{4}x+\frac{25}{4}}}$

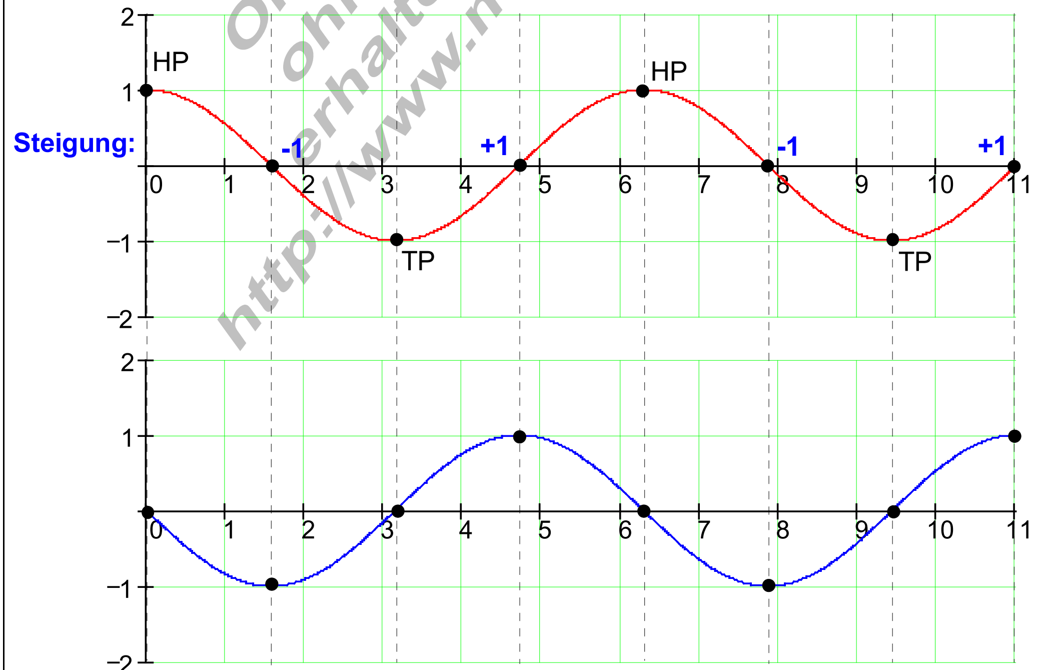
9 Punkte

2 Punkte

$$f(x) := \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5 \qquad t(x) := \frac{9}{4}x + \frac{25}{4}$$



zu 4



8 Punkte

Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Di 25.10.05
SG14/24D Gruppe B	NAME:		

Gruppe A

zu 1 a)

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(-4\,|\,-2): f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$

$P_1(-2\,|\,-4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$

$P_1(2\,|\,4) \quad : f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$

a_0	a_1	a_2		
1	–4	16	–2	
1	–2	4	–4	II – I
1	2	4	4	III – I
1	–4	16	–2	
0	2	–12	–2	
0	6	–12	6	III – 3·II
1	–4	15	–2	
0	2	–12	–2	
0	0	24	12	

$24a_2 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$

$2a_1 - 12a_2 = -2 \Leftrightarrow 2a_1 - 6 = -2\,|-8$

$\Leftrightarrow 2a_1 = 4\,|:2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2}}$

5 Punkte

zu 1b)

$f(x) = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = x + 2$

Bedingung für waagerechte Tangente:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0\,|-2$

$\Leftrightarrow x = -2$

An der Stelle $x = x_s = -2$ hat der Graph von $f(x)$ eine waagerechte Tangente.
Dort liegt der Scheitelpunkt.
Die y – Koordinate des Scheitelpunktes ist:

$y_s = f(x_s) = f(-2) = \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 2 = \frac{1}{2}\cdot 4 - 4 - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$

$\Rightarrow \underline{\underline{S(-2\,|\,-4)}}$

5 Punkte

zu 1c)

Die Achsenschnittpunkte für: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2$

Bedingung für den Schnittpunkt mit der $y-$Achse:

$y_s=f(0)=-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-2)}}$

Bedingung für Nullstellen:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2x-2=0\,|\cdot 2$

$\Leftrightarrow x^2+4x-4=0$

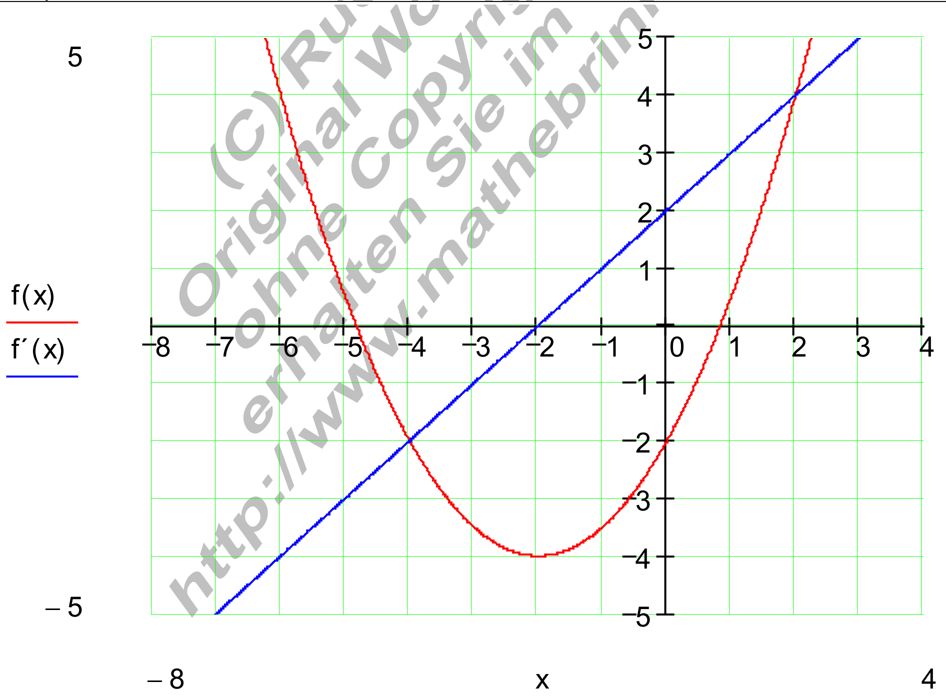
$\Rightarrow p=4\,;q=-4\,;D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{4}{2}\right)^2+4=4+4=6 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{8}$

$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \Rightarrow x_1=-2+\sqrt{8}\approx 0{,}828\,;x_2=-2-\sqrt{8}\approx -4{,}828$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(-2+\sqrt{8}\,|\,0\right);P_{x2}\left(-2-\sqrt{8}\,|\,0\right)}}$

4 Punkte

zu 1d)



4 Punkte

zu 1e)

Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt P ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt.

2 Punkte

zu 2

a)	$f(x)=\frac{3}{4}x^2+4x+5 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x+4$	**1 Punkt**
b)	$f(x)=3x^2-5+2x+x^2-7x \Rightarrow f'(x)=8x-5$	**2 Punkte**
c)	$f(x)=(4x+3)^2 \Rightarrow f'(x)=32x+24$	**2 Punkte**
d)	$f(x)=2ax^2-bx^3+cx+d^2-4e \Rightarrow f'(x)=-3bx^2+4ax+c$	**2 Punkte**
e)	$f(x)=-\frac{3}{4}x^3+3x^2-\frac{7}{4}x+\frac{17}{35} \Rightarrow f'(x)=-\frac{9}{4}x^2+6x-\frac{7}{4}$	**2 Punkte**
f)	$f(x)=(3x-2)(x-4) \Rightarrow f'(x)=6x-14$	**2 Punkte**

zu 3

$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-5 \qquad P(3\,|\,f(3))$

$f(3)=-\frac{1}{4}\cdot 3^3+\frac{3}{4}\cdot 3^2-5=-\frac{1}{4}\cdot 27+\frac{3}{4}\cdot 9-5=-\frac{27}{4}+\frac{27}{4}-5=-5 \Rightarrow P(3\,|\,-5)$

Die Tangente $t(x)$ im Punkt $P(3\,|\,-5)$ ist eine Gerade, die durch den Punkt $P(3\,|\,-5)$ verläuft und die Steigung a_t hat.
Die Steigung der Tangente im Punkt $P(3\,|\,-5)$ ist aber genau die Steigung des Funktionsgraphen in diesem Punkt, also gleich der 1. Ableitung an der Stelle $x_0=3$

$f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x \Rightarrow f'(3)=-\frac{3}{4}\cdot 3^2+\frac{3}{2}\cdot 3=-\frac{3}{4}\cdot 9+\frac{9}{2}=-\frac{27}{4}+\frac{18}{4}=-\frac{9}{4}$

$\Rightarrow a_t=-\frac{9}{4}$ und somit $t(x)=-\frac{9}{4}x+b$

Punktprobe mit $P(3\,|\,-5)$:

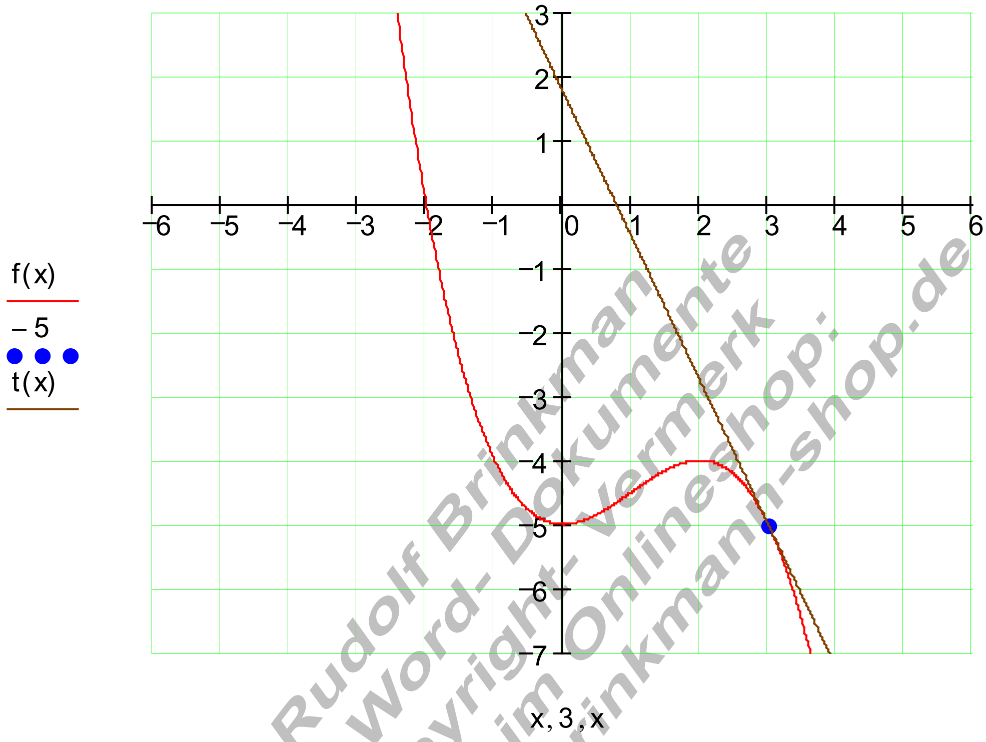
$t(3)=-5 \Leftrightarrow -\frac{9}{4}\cdot 3+b=-5$

$\Leftrightarrow -\frac{27}{4}+b=-5 \quad |+\frac{27}{4}$

$\Leftrightarrow b=-5+\frac{27}{4}=-\frac{20}{4}+\frac{27}{4}=\frac{7}{4} \Rightarrow \underline{\underline{t(x)=-\frac{9}{4}x+\frac{7}{4}}}$

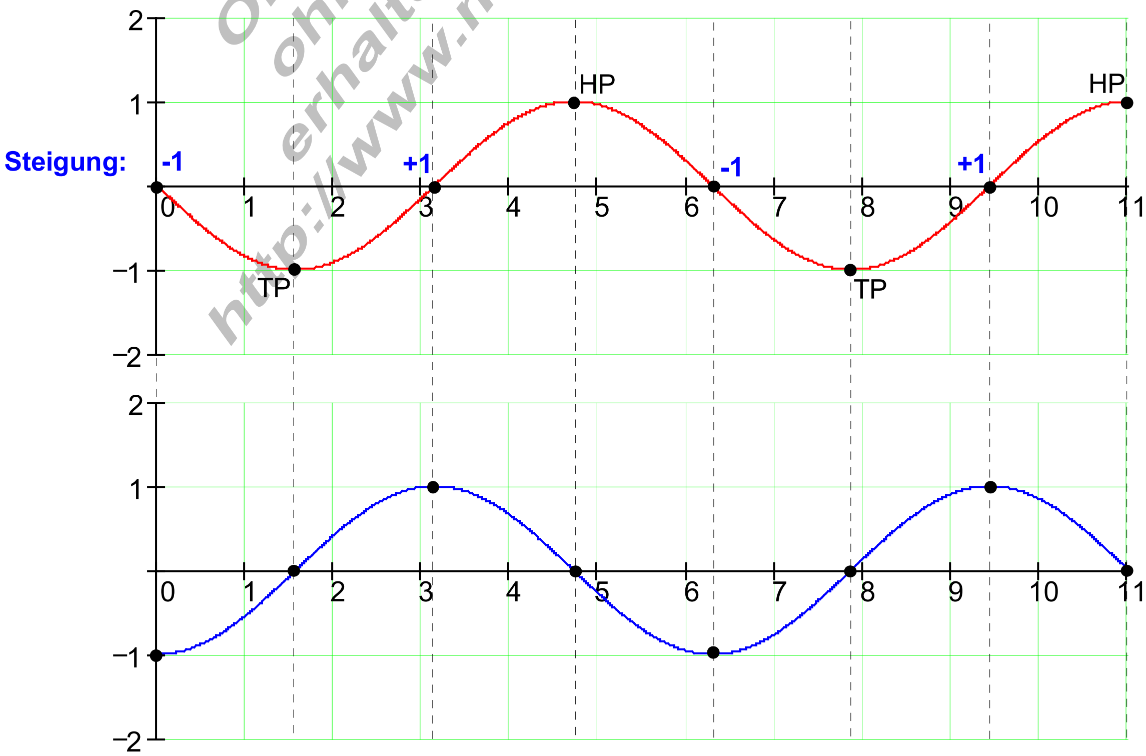
9 Punkte

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 5 \qquad t(x) := \frac{-9}{4}x + \frac{7}{4}$$



2 Punkte

zu 4



8 Punkte