Klassenarbeit SG14/24D	Mathematik NAME:	Bearbeitungszeit 90 min.	Do 19.5.05

Gruppe A

zu 1 a)

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(2|14): \quad f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 14$

$P_1(4|20): \quad f(4) = 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 20$

$P_1(6|18): \quad f(6) = 36a_2 + 6a_1 + 1a_0 = 18$

a_0	a_1	a_2		
1	2	4	14	
1	4	16	20	II − I
1	6	36	18	III − I
1	2	4	14	
0	2	12	6	|: 2
0	4	32	4	|: 4
1	2	4	14	
0	1	6	3	
0	1	8	1	III − II
1	2	4	14	
0	1	6	3	
0	0	2	−2	

$2a_2 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$

$a_1 + 6a_2 = 3$

$\Leftrightarrow a_1 + 6\cdot(-1) = 3$

$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 3 \mid +6$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$

$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 14$

$\Leftrightarrow a_0 + 2\cdot 9 + 4\cdot(-1) = 14$

$\Leftrightarrow a_0 + 18 - 4 = 14 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$

$\underline{\underline{f(x) = -x^2 + 9x}}$

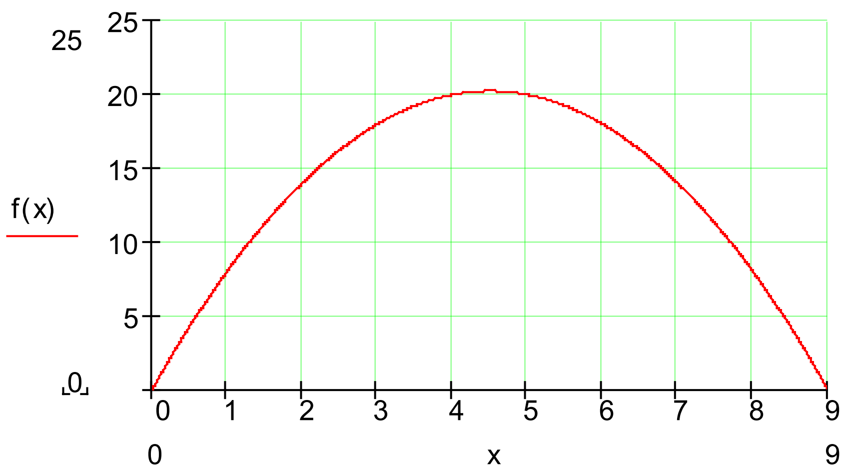
5 Punkte

zu 1b)

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	0	8	14	18	20	20	18	14	8	0

Scheitel liegt bei $x_s = 4{,}5 \Rightarrow y_s = f(4{,}5) = 20{,}25$



3 Punkte

zu 2 a)

$$f(x)=\frac{1}{60}(x-10)^2-\frac{10}{3} \qquad g(x)=-\frac{1}{60}(x-10)^2+\frac{30}{3}$$

Ansatz:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{1}{60}(x-10)^2-\frac{10}{3}=-\frac{1}{60}(x-10)^2+\frac{30}{3}\;|\cdot 60$$

$$\Leftrightarrow (x-10)^2-200=-(x-10)^2+600$$

$$\Leftrightarrow x^2-20x+100-200=-x^2+20x-100+600$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-40x-600=0\;|:2$$

$$\Leftrightarrow x^2-20x-300=0$$

$$\Rightarrow p=-20\,;\,q=-300\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=100+300=400\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{400}=20$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l}x_1=10+20=30\\ x_2=10-20=-10\end{array}\right.$$

$$y_{s1}=f(x_1)=f(30)=\frac{1}{60}(30-10)^2-\frac{10}{3}=\frac{10}{3}\Rightarrow \underline{\underline{P_{s1}\left(30\,|\,\frac{10}{3}\right)}}$$

$$y_{s2}=f(x_2)=f(-10)=\frac{1}{60}(-10-10)^2-\frac{10}{3}=\frac{10}{3}\Rightarrow \underline{\underline{P_{s1}\left(-10\,|\,\frac{10}{3}\right)}}$$

6 Punkte

zu 2 b)

Abstand der Scheitelpunkte:
Die Parabel von f(x) ist nach oben geöffnet, der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse.
Die Parabel von g(x) ist nach unten geöffnet, der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse.
Beide Scheitelpunkte haben die gleiche x-Koordinate (x = 10).
Der Abstand beider Scheitel ist somit die Summe der Absolutwerte der y-Koordinaten der beiden Scheitelpunkte.

$$A=\frac{30}{3}+\frac{10}{3}=\frac{40}{3}=\underline{\underline{13\frac{1}{3}\,LE}}$$

2 Punkte

zu 3)

$$f(x)=(1-x)(2x+5) \qquad g(x)=-x+b$$

Anastz:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow (1-x)(2x+5)=-x+b$$

$$\Leftrightarrow -2x^2-3x+5=-x+b\Leftrightarrow -2x^2-2x+5-b=0\;|:(-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-\frac{5-b}{2}=0\Rightarrow p=1;\,q=-\frac{5-b}{2}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+\frac{5-b}{2}=\underline{\underline{\frac{11-2b}{4}}}$$

$D = 0 \Rightarrow$ Berührungspunkt

$$D = 0 \Leftrightarrow \frac{11-2b}{4} = 0 \,|\cdot 4 \Leftrightarrow 11-2b = 0 \,|-11 \Leftrightarrow -2b = -11 \,|:(-2) \Leftrightarrow \underline{\underline{b = \frac{11}{2} = 5{,}5}}$$

Für $b = \frac{11}{2} = 5{,}5$ haben Gerade und Parabel einen Berührungspunkt.

$D > 0 \Rightarrow$ zwei Schnittpunkte

$$D > 0 \Leftrightarrow \frac{11-2b}{4} > 0 \,|\cdot 4 \Leftrightarrow 11-2b > 0 \,|-11 \Leftrightarrow -2b > -11 \,|:(-2) \Leftrightarrow \underline{\underline{b < \frac{11}{2} = 5{,}5}}$$

Für $b < \frac{11}{2} = 5{,}5$ haben Gerade und Parabel zwei Schnittpunkte.

$D < 0 \Rightarrow$ keine gemeinsamen Punkte

$$D < 0 \Leftrightarrow \frac{11-2b}{4} < 0 \,|\cdot 4 \Leftrightarrow 11-2b < 0 \,|-11 \Leftrightarrow -2b < -11 \,|:(-2) \Leftrightarrow \underline{\underline{b > \frac{11}{2} = 5{,}5}}$$

Für $b > \frac{11}{2} = 5{,}5$ haben Gerade und Parabel keine gemeinsamen Punkte.

9 Punkte

Klassenarbeit SG14/24D	Mathematik NAME:	Bearbeitungszeit 90 min.	Do 19.5.05

Gruppe B

zu 1 a)

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(1|7): \quad f(1) = 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 7$

$P_1(3|15): \quad f(3) = 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 15$

$P_1(5|15): \quad f(5) = 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 15$

a_0	a_1	a_2		
1	1	1	7	
1	3	9	15	II − I
1	5	25	15	III − I
1	1	1	7	
0	2	8	8	|: 2
0	4	24	8	|: 4
1	1	1	7	
0	1	4	4	
0	1	6	2	III − I
1	1	1	7	
0	1	4	4	
0	0	2	−2	

$2a_2 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$

$a_1 + 4a_2 = 4$

$\Leftrightarrow a_1 + 4\cdot(-1) = 4$

$\Leftrightarrow a_1 - 4 = 4 \,|\, +4$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 8}$

$a_0 + a_1 + a_2 = 7$

$\Leftrightarrow a_0 + 8 + (-1) = 7$

$\Leftrightarrow a_0 + 8 - 1 = 7 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$

$\underline{\underline{f(x) = -x^2 + 8x}}$

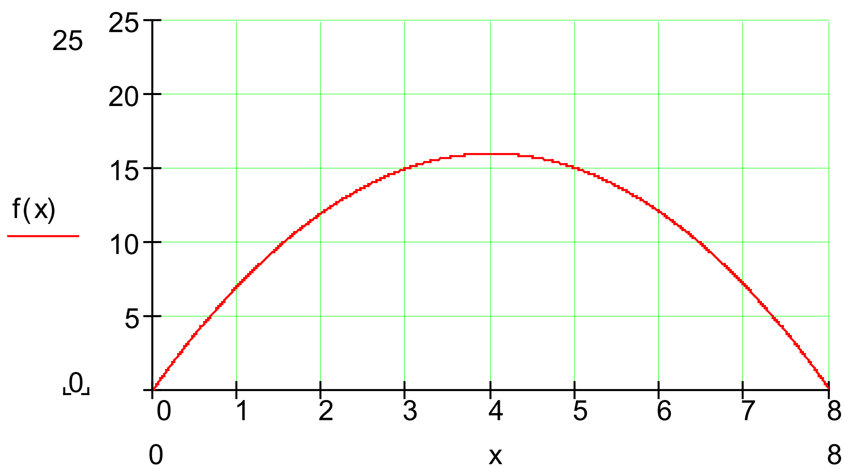
5 Punkte

zu 1b)

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	0	7	12	15	16	15	12	7	0

Scheitel liegt bei $x_s = 4 \Rightarrow y_s = f(4) = 16$



3 Punkte

zu 2 a)

$$f(x)=-\frac{1}{60}(x+10)^2+\frac{32}{3} \qquad g(x)=\frac{1}{60}(x+10)^2-\frac{8}{3}$$

Ansatz:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow -\frac{1}{60}(x+10)^2+\frac{32}{3}=\frac{1}{60}(x+10)^2-\frac{8}{3}\,|\cdot 60$$

$$\Leftrightarrow -(x-10)^2+640=(x-10)^2-160$$

$$\Leftrightarrow -x^2-20x+540=x^2+20x-60$$

$$\Leftrightarrow -2x^2-40x+600=0\,|:(-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2+20x-300=0$$

$$\Rightarrow p=20\,;\,q=-300\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=100+300=400\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{400}=20$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l}x_1=-10+20=10\\ x_2=-10-20=-30\end{array}\right.$$

$$y_{s1}=g(x_1)=g(10)=\frac{1}{60}(10+10)^2-\frac{8}{3}=\frac{12}{3}=4\Rightarrow \underline{\underline{P_{s1}(10\,|\,4)}}$$

$$y_{s2}=g(x_2)=g(-30)=\frac{1}{60}(-30+10)^2-\frac{8}{3}=\frac{12}{3}=4\Rightarrow \underline{\underline{P_{s1}(-30\,|\,4)}}$$

6 Punkte

zu 2 b)

Abstand der Scheitelpunkte:
Die Parabel von f(x) ist nach unten geöffnet, der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse.
Die Parabel von g(x) ist nach oben geöffnet, der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse.
Beide Scheitelpunkte haben die gleiche x-Koordinate (x = -10).
Der Abstand beider Scheitel ist somit die Summe der Absolutwerte der y-Koordinaten der beiden Scheitelpunkte.

$$A=\frac{32}{3}+\frac{8}{3}=\frac{40}{3}=\underline{\underline{13\frac{1}{3}\,LE}}$$

2 Punkte

zu 3)

$$f(x)=(x-1)(2x+5) \qquad g(x)=x+b$$

Anastz:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow (x-1)(2x+5)=x+b$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3x-5=x+b\Leftrightarrow 2x^2+2x-5-b=0\,|:2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-\frac{5+b}{2}=0\Rightarrow p=1;q=-\frac{5+b}{2}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+\frac{5+b}{2}=\underline{\underline{\frac{11+2b}{4}}}$$

$D = 0 \Rightarrow$ Berührungspunkt

$$D = 0 \Leftrightarrow \frac{11+2b}{4} = 0 \mid \cdot 4 \Leftrightarrow 11+2b = 0 \mid -11 \Leftrightarrow 2b = -11 \mid :2 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = -\frac{11}{2} = -5{,}5}}$$

Für $b = -\frac{11}{2} = -5{,}5$ haben Gerade und Parabel einen Berührungspunkt.

$D > 0 \Rightarrow$ zwei Schnittpunkte

$$D > 0 \Leftrightarrow \frac{11+2b}{4} > 0 \mid \cdot 4 \Leftrightarrow 11+2b > 0 \mid -11 \Leftrightarrow 2b > -11 \mid :2 \Leftrightarrow \underline{\underline{b > -\frac{11}{2} = -5{,}5}}$$

Für $b > -\frac{11}{2} = -5{,}5$ haben Gerade und Parabel zwei Schnittpunkte.

$D < 0 \Rightarrow$ keine gemeinsamen Punkte

$$D < 0 \Leftrightarrow \frac{11+2b}{4} < 0 \mid \cdot 4 \Leftrightarrow 11+2b < 0 \mid -11 \Leftrightarrow 2b < -11 \mid :2 \Leftrightarrow \underline{\underline{b < -\frac{11}{2} = -5{,}5}}$$

Für $b < -\frac{11}{2} = -5{,}5$ haben Gerade und Parabel keine gemeinsamen Punkte.

9 Punkte