

<b>Klassenarbeit</b> <b>SG10D Gruppe A</b>	<b>Mathematik</b> <b>NAME: Lösungen</b>	<b>Bearbeitungszeit 90 min.</b>	<b>Mo 11.06.12</b>
---	--	---------------------------------	--------------------

**Hilfsmittel: Taschenrechner**

**Falls Extremwerte zu berechnen sind, ist der rechnerische Nachweis zu erbringen.**

1. Gegeben sei die Funktion  $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$  für  $k > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie  $f_k$  auf Achsenschnittpunkte und berechnen Sie diese.

b) Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von  $f_k(x)$ .

c) Untersuchen Sie  $f_k$  auf Extrempunkte und berechnen Sie diese.

d) Untersuchen Sie  $f_k$  auf Wendepunkte und berechnen Sie diese (Ohne Nachweis).

e) Berechnen Sie die Ortskurve  $f_{ok}(x)$  für die Extrempunkte ( $P_{kE}$ ).

f) Bestimmen Sie die Fläche  $A_k$  zwischen den Achsenschnittpunkten und der x-Achse.

g) Lesen Sie die Werte der markanten Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) aus der Wertetabelle ab und tragen Sie die Werte in folgendes Schema ein :

$P_{1y}(0   1,25)$	$P_{2y}(0   2,5)$	$P_{3y}(0   3,75)$	$P_{4y}(0   5)$
$P_{1x}(1   0)$	$P_{2x}(2   0)$	$P_{3x}(3   0)$	$P_{4x}(4   0)$
$P_{1E}(-1   1,52)$	$P_{2E}(0   2,5)$	$P_{3E}(1   4,12)$	$P_{4E}(2   6,8)$
$P_{1W}(-3   1,12)$	$P_{2W}(-2   1,84)$	$P_{3W}(-1   3,03)$	$P_{4W}(0   5)$

Berechnen Sie für die Ortskurve mit dem Taschenrechner die Funktionswerte auf 2 Stellen hinter dem Komma genau und tragen Sie die Werte in die Tabelle ein.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f_{ok}(x)$	0,21	0,34	0,56	0,92	1,52	2,5	4,12	6,8

Zeichnen Sie die Graphen für  $f_1(x)$ ;  $f_2(x)$ ;  $f_3(x)$ ;  $f_4(x)$  und die Ortskurve  $f_{ok}(x)$  in ein geeignetes Koordinatensystem.  
Verwenden Sie dafür die berechneten Werte und folgende Wertetabelle.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	-3,4	-11,2	-27,7	-60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	-5,6	-18,5	-45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	-9,24	-30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	-15,2

h) Berechnen Sie für  $k = 4$  die Fläche  $A_4$  und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem.

Kontrollergebnisse:

$$f'(x) = \left[ \frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} \right] e^{\frac{1}{2}x} \quad f''(x) = \left[ \frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad P_{kE} \left( k-2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-1)} \right)$$

A1 a)	<b>Ausführliche Lösung: Berechnung der Achsenschnittpunkte</b> $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ $P_y : f_k(0) = \frac{5}{4}(k-0)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = \frac{5}{4} \cdot k \cdot 1 = \frac{5}{4}k \Rightarrow \underline{\underline{P_y \left( 0 \mid \frac{5}{4}k \right)}}$ $P_x : f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(k-x)\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(k-x) = 0 \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow \underline{\underline{P_x(k \mid 0)}}$
-------	---

A1 b)	<b>Ausführliche Lösung: Die erste Ableitung</b> 1. Ableitung: $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{4}(k-x) \Rightarrow u' = -\frac{5}{4}$ $\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k'(x) = -\frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{4}(k-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = -\frac{5}{4}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{8}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ $= \underline{\underline{\left[ \frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \right] e^{\frac{1}{2}x}}}$
-------	---

A1b)	<b>Ausführliche Lösung: Die zweite Ableitung</b> 2. Ableitung $f_k''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \Rightarrow u' = -\frac{5}{8}$ $\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k''(x) = -\frac{5}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left[ \frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left\{ -\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $= \left[ -\frac{5}{8} + \frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{8} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left[ \frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$
------	---

A1 c)	<p><b>Ausführliche Lösung: Extrempunkte</b></p> $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[ \frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} \right] \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} = 0 \quad   : \frac{5}{8}$ $\Leftrightarrow k-x-2=0 \quad   +x$ $\Leftrightarrow k-2=x \Rightarrow x_E = k-2 \text{ ist mögliche Extremstelle.}$ <p>Überprüfung mit der 2. Ableitung: <math>f_k''(x_E) \neq 0</math></p> $f_k''(x_E) = f_k''(k-2) = \left\{ \frac{5}{16} [k - (k-2)] - \frac{5}{4} \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}$ $= \left[ \frac{5}{16} (k-k+2) - \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \left( \frac{5}{8} - \frac{5}{4} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}$ $= \left( \frac{5}{8} - \frac{10}{8} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = -\frac{5}{8} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}(k-2)}}_{>0} < 0$ <p>Bei <math>x = x_E = k-2</math> liegt ein relatives Maximum.</p> $f_k(x) = \frac{5}{4} (k-x) e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k(x_E) = f_k(k-2) = \frac{5}{4} [k - (k-2)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}$ $= \frac{5}{4} (k-k+2) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} \Rightarrow P_{k_{\text{Max}}} \left( k-2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} \right)$
-------	--

A1 d)	<p><b>Ausführliche Lösung: Der Wendepunkt</b></p> $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[ \frac{5}{16} (k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{5}{16} (k-x) - \frac{5}{4} = 0 \quad   + \frac{5}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{5}{16} (k-x) = \frac{5}{4} \quad   : \frac{5}{16}$ $\Leftrightarrow k-x=4 \quad   -k \Leftrightarrow -x=4-k \quad   \cdot (-1) \Leftrightarrow x=k-4$ <p>Wendestelle bei <math>x = x_W = k-4</math></p> $f_k(x) = \frac{5}{4} (k-x) e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k(x_W) = f_k(k-4) = \frac{5}{4} [k - (k-4)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = \frac{5}{4} \cdot 4 \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)}$ $P_{k_W} \left( k-4 \mid 5 \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} \right)$
-------	---

<b>A1 e)</b>	<b>Ausführliche Lösung: Die Ortskurve</b>
	$P_{k_{\text{Max}}} \left( k-2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k-1} \right) \Rightarrow \underbrace{x = k-2}_{(1)} \quad \text{und} \quad \underbrace{y = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k-1}}_{(2)}$ $x = k-2 \Leftrightarrow k = x+2 \text{ in (2) eingesetzt: } y = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot (x+2)-1} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x+1-1} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ $\text{Funktionsgleichung der Ortskurve: } \underline{\underline{f_{\text{OK}}(x) = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}}}$

<b>A1 f)</b>	<b>Ausführliche Lösung: Die Fläche <math>A_k</math></b>
	$A_k = \left  \int_0^k f_k(x) dx \right $ $\int f_k(x) dx = \int \frac{5}{4} (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{5}{4} \int \underbrace{(k-x)}_u \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'} dx$ <p>Produktintegration <math>\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx</math></p> $u = k-x \Rightarrow u' = -1$ $v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $\Rightarrow \int (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = (k-x) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int (-1) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= (2k-2x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= (2k-2x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = (-2x+2k+4) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $\Rightarrow \frac{5}{4} \int (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \left( -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $\int_0^k f_k(x) dx = \left[ \left( -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k$ $= \left( -\frac{5}{2}k + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( -\frac{5}{2} \cdot 0 + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right]$ $= 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^0 \right] = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left( \frac{5}{2}k + 5 \right) = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5$ $A_k = \left  \int_0^k f_k(x) dx \right  = \underline{\underline{\left  5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5 \right }}$

A1 f)	Ausführliche Lösung: Die Fläche $A_k$ (Lösungsvariante)
	$A_k = \left  \int_0^k f_k(x) dx \right $ $\int f_k(x) dx = \int \frac{5}{4}(k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \int \frac{5}{4}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx - \int \frac{5}{4}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= \frac{5}{4}k \cdot \underbrace{\int e^{\frac{1}{2}x} dx}_I - \frac{5}{4} \cdot \underbrace{\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx}_{II} = \frac{5}{4}k \cdot I - \frac{5}{4} \cdot II$ <p>I: <math>\int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C</math></p> <p>II: <math>\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx</math> mit <math>u = x \Rightarrow u' = 1</math></p> <p style="text-align: right;">und <math>v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C</math> wird</p> $\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = x \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int 1 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $\int f_k(x) dx = \frac{5}{4}k \cdot I - \frac{5}{4} \cdot II = \frac{5}{4}k \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{4} \left( 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) + C$ $= \frac{5}{2}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 5 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $= \left( \frac{5}{2}k - \frac{5}{2}x + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C = \left( -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $\int_0^k f_k(x) dx = \left[ \left( -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k$ $= \left( -\frac{5}{2}k + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( -\frac{5}{2} \cdot 0 + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right]$ $= 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^0 \right] = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left( \frac{5}{2}k + 5 \right) = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5$ $A_k = \left  \int_0^k f_k(x) dx \right  = \left  5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5 \right $

A1 g) Ausführliche Lösung: Die Graphen

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	-3,4	-11,2	-27,7	-60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	-5,6	-18,5	-45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	-9,24	-30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	-15,2

Markante Punkte:

$P_{k_y} \left( 0 \mid \frac{5}{4}k \right)$  Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

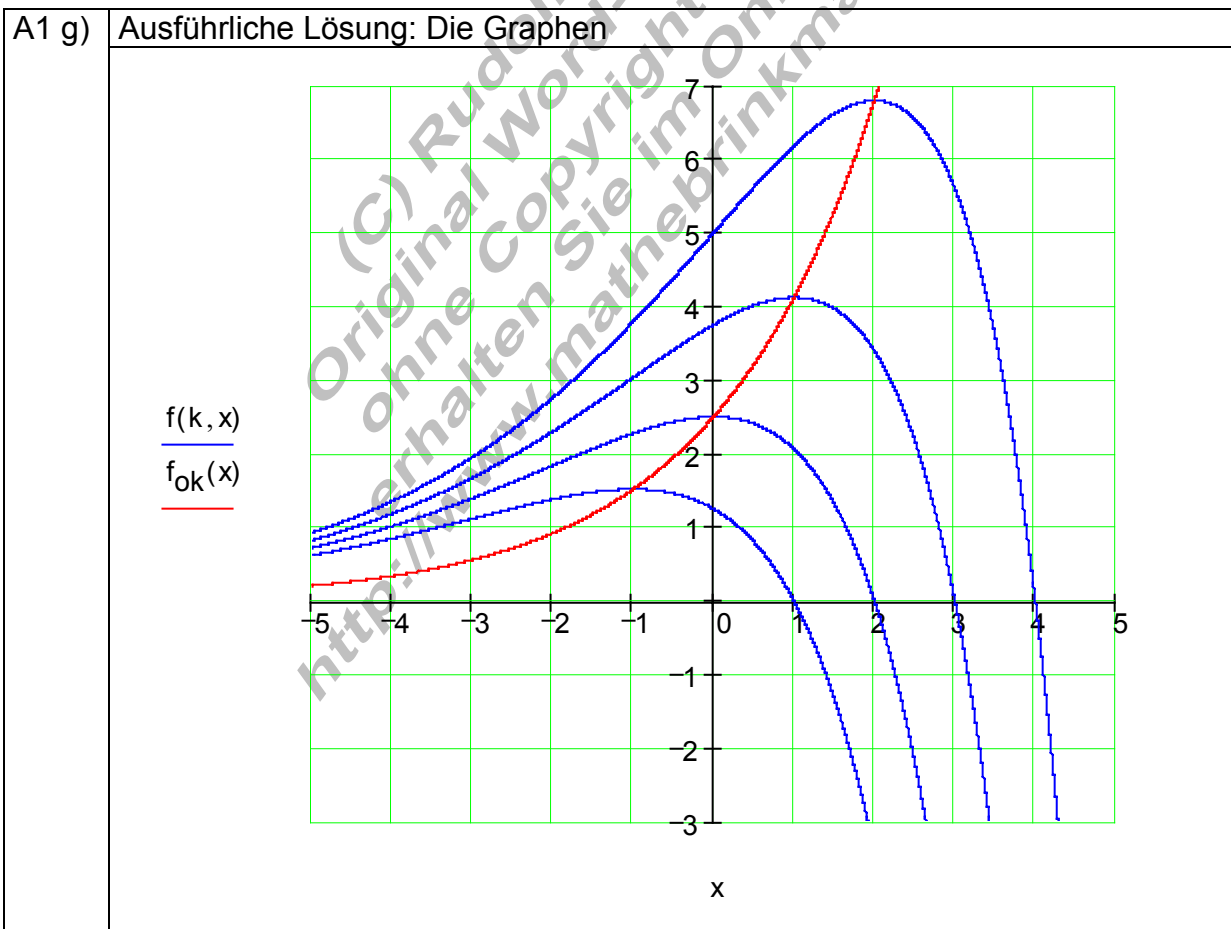
$P_{k_x} (k \mid 0)$  Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

$P_{k_{\text{Max}}} \left( k - 2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$  Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_{\text{Max}}} (-1 \mid 1,52); P_{2_{\text{Max}}} (0 \mid 2,5); P_{3_{\text{Max}}} (1 \mid 4,12); P_{4_{\text{Max}}} (2 \mid 6,8)$

$P_{k_w} \left( k - 4 \mid 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)$  Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_w} (-3 \mid 1,12); P_{2_w} (-2 \mid 1,84); P_{3_w} (-1 \mid 3,03); P_{4_w} (0 \mid 5)$

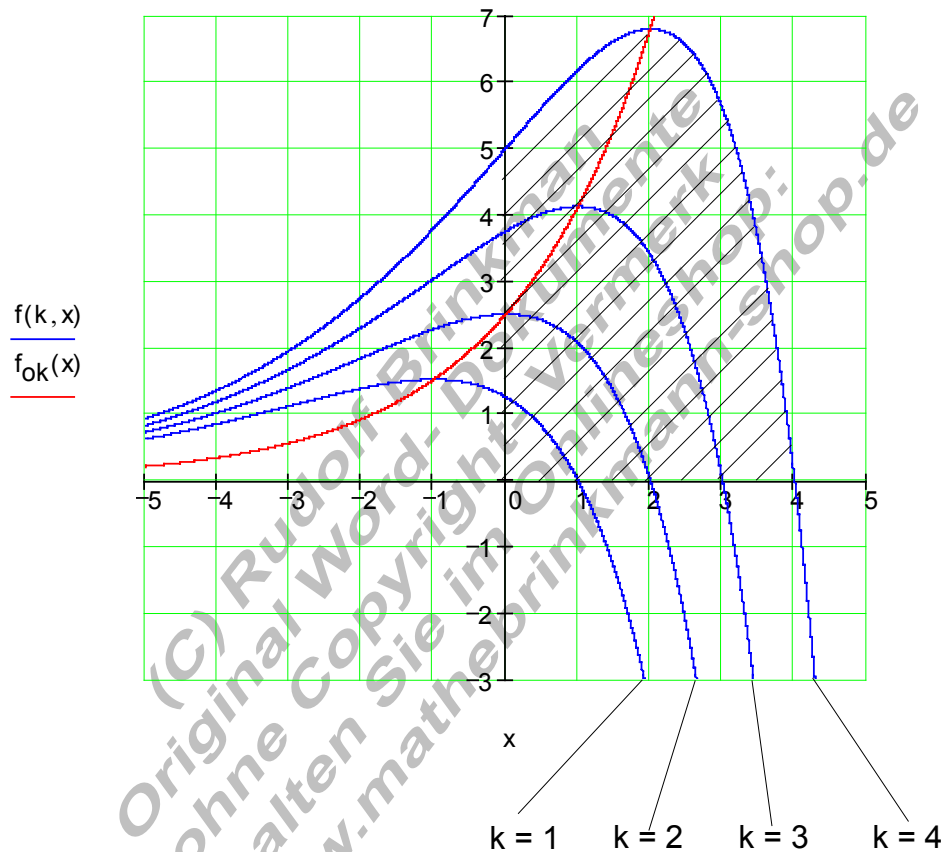


A1 h) Ausführliche Lösung: Flächenberechnung für  $k = 4$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right| = \left| 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5 \right|$$

$$A_4 = \left| \int_0^4 f_4(x) dx \right| = \left| 5 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} - \frac{5}{2} \cdot 4 - 5 \right| = \left| 5 \cdot e^2 - 10 - 5 \right| = \left| 5 \cdot e^2 - 15 \right| \approx \underline{\underline{21,95 \text{ FE}}}$$

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x} \quad f_{\text{OK}}(x) = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$



<b>Klassenarbeit</b> <b>SG10D Gruppe B</b>	<b>Mathematik</b> <b>NAME: Lösungen</b>	<b>Bearbeitungszeit 90 min.</b>	<b>Mo 11.06.12</b>
---	--	---------------------------------	--------------------

**Hilfsmittel: Taschenrechner**

**Falls Extremwerte zu berechnen sind, ist der rechnerische Nachweis zu erbringen.**

1.	Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ für $k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$											
a)	Untersuchen Sie $f_k$ auf Achsenschnittpunkte und berechnen Sie diese.											
b)	Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von $f_k(x)$ .											
c)	Untersuchen Sie $f_k$ auf Extrempunkte und berechnen Sie diese.											
d)	Untersuchen Sie $f_k$ auf Wendepunkte und berechnen Sie diese (Ohne Nachweis).											
e)	Berechnen Sie die Ortskurve $f_{ok}(x)$ für die Extrempunkte ( $P_{kE}$ ).											
f)	Bestimmen Sie die Fläche $A_k$ zwischen den Achsenschnittpunkten und der x-Achse.											
g)	Lesen Sie die Werte der markanten Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) aus der Wertetabelle ab und tragen Sie die Werte in folgendes Schema ein :											
	$P_{1y}(0   -1,25)$	$P_{2y}(0   -2,5)$	$P_{3y}(0   -3,75)$	$P_{4y}(0   -5)$								
	$P_{1x}(1   0)$	$P_{2x}(2   0)$	$P_{3x}(3   0)$	$P_{4x}(4   0)$								
	$P_{1E}(-1   -1,52)$	$P_{2E}(0   -2,5)$	$P_{3E}(1   -4,12)$	$P_{4E}(2   -6,8)$								
	$P_{1W}(-3   -1,12)$	$P_{2W}(-2   -1,84)$	$P_{3W}(-1   -3,03)$	$P_{4W}(0   -5)$								
	Berechnen Sie für die Ortskurve mit dem Taschenrechner die Funktionswerte auf 2 Stellen hinter dem Komma genau und tragen Sie die Werte in die Tabelle ein.											
	x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2			
	$f_{ok}(x)$	-0,21	-0,34	-0,56	-0,92	-1,52	-2,5	-4,12	-6,8			
	Zeichnen Sie die Graphen für $f_1(x)$ ; $f_2(x)$ ; $f_3(x)$ ; $f_4(x)$ und die Ortskurve $f_{ok}(x)$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Verwenden Sie dafür die berechneten Werte und folgende Wertetabelle.											
	x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
	$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	-3,4	-11,2	-27,7	-60,9
	$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	-5,6	-18,5	-45,7
	$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	-9,24	-30,5
	$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	-15,2
h)	Berechnen Sie für $k = 4$ die Fläche $A_4$ und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem.											



A1 a)	<b>Ausführliche Lösung: Berechnung der Achsenschnittpunkte</b>
	$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$ $P_y : f_k(0) = \frac{5}{4}(0-k)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = -\frac{5}{4} \cdot k \cdot 1 = -\frac{5}{4}k \Rightarrow P_y \left( 0 \mid -\frac{5}{4}k \right)$ $P_x : f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x-k)\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x-k) = 0 \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow P_x(k \mid 0)$

A1 b)	<b>Ausführliche Lösung: Die erste Ableitung</b>
	<p>1. Ableitung:</p> $f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{4}(x-k) \Rightarrow u' = \frac{5}{4}$ $\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k'(x) = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{4}(x-k) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{8}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$ $= \left[ \frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \right] e^{\frac{1}{2}x}$

A1b)	<b>Ausführliche Lösung: Die zweite Ableitung</b>
	<p>2. Ableitung</p> $f_k''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \Rightarrow u' = \frac{5}{8}$ $\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k''(x) = \frac{5}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left[ \frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left\{ \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $= \left[ \frac{5}{8} + \frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{8} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left[ \frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

A1 c)	<p><b>Ausführliche Lösung: Extrempunkte</b></p> $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[ \frac{5}{8} \cdot (x-k) + \frac{5}{4} \right] \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{5}{8} \cdot (x-k) + \frac{5}{4} = 0 \quad   : \frac{5}{8}$ $\Leftrightarrow x - k + 2 = 0 \quad   + k - 2$ $\Leftrightarrow x \Rightarrow x_E = k - 2 \text{ ist mögliche Extremstelle.}$ <p>Überprüfung mit der 2. Ableitung: <math>f_k''(x_E) \neq 0</math></p> $f_k''(x_E) = f_k''(k-2) = \left\{ \frac{5}{16} [(k-2) - k] + \frac{5}{4} \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}$ $= \left[ \frac{5}{16} (k-2-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \left( -\frac{5}{8} + \frac{5}{4} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}$ $= \left( -\frac{5}{8} + \frac{10}{8} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \frac{5}{8} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}(k-2)}}_{>0} > 0$ <p>Bei <math>x = x_E = k - 2</math> liegt ein relatives Minimum.</p> $f_k(x) = \frac{5}{4} (x-k) e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k(x_E) = f_k(k-2) = \frac{5}{4} [(k-2) - k] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}$ $= \frac{5}{4} (k-2-k) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \Rightarrow \underline{\underline{P_{kMin} \left( k-2 \mid -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)}}$
-------	--

A1 d)	<p><b>Ausführliche Lösung: Der Wendepunkt</b></p> $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[ \frac{5}{16} (x-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{5}{16} (x-k) + \frac{5}{4} = 0 \quad   - \frac{5}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{5}{16} (x-k) = -\frac{5}{4} \quad   : \frac{5}{16}$ $\Leftrightarrow x - k = -4 \quad   + k \Leftrightarrow x = k - 4$ <p>Wendestelle bei <math>x = x_W = k - 4</math></p> $f_k(x) = \frac{5}{4} (x-k) e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k(x_W) = f_k(k-4) = \frac{5}{4} [(k-4) - k] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = \frac{5}{4} \cdot (-4) \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} = -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2}$ $\underline{\underline{P_{kW} \left( k-4 \mid -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)}}$
-------	--

<b>A1 e)</b>	<b>Ausführliche Lösung: Die Ortskurve</b>
	$P_{k_{\text{Min}}} \left( k-2 \mid -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right) \Rightarrow \underbrace{x=k-2}_{(1)} \text{ und } \underbrace{y=-\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}}_{(2)}$ <p><math>x = k-2 \Leftrightarrow k = x+2</math> in (2) eingesetzt:</p> $y = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x+2)-1} = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x+1-1} = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ <p>Funktionsgleichung der Ortskurve: <math>f_{\text{OK}}(x) = \underline{\underline{-\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}</math></p>

<b>A1 f)</b>	<b>Ausführliche Lösung: Die Fläche <math>A_k</math></b>
	$A_k = \left  \int_0^k f_k(x) dx \right $ $\int f_k(x) dx = \int \frac{5}{4}(x-k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{5}{4} \int \underbrace{(x-k)}_u \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'} dx$ <p>Produktintegration <math>\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx</math></p> <p><math>u = x-k \Rightarrow u' = 1</math></p> <p><math>v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}</math></p> $\Rightarrow \int (x-k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = (x-k) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int 1 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= (2x-2k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= (2x-2k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = (2x-2k-4) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $\Rightarrow \frac{5}{4} \int (x-k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \left( \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $\int_0^k f_k(x) dx = \left[ \left( \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k$ $= \left( \frac{5}{2}k - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( \frac{5}{2} \cdot 0 - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right]$ $= -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( -\frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^0 \right] = -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5 = -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5$ $A_k = \left  \int_0^k f_k(x) dx \right  = \underline{\underline{\left  -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5 \right }}$

A1 f)	Ausführliche Lösung: Die Fläche $A_k$ (Lösungsvariante)
	$A_k = \left  \int_0^k f_k(x) dx \right $ $\int f_k(x) dx = \int \frac{5}{4}(x-k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \int \frac{5}{4}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx - \int \frac{5}{4}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= \frac{5}{4} \underbrace{\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx}_I - \frac{5}{4}k \cdot \underbrace{\int e^{\frac{1}{2}x} dx}_{II} = \frac{5}{4} \cdot I - \frac{5}{4}k \cdot II$ $II: \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $I: \int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \text{ mit } u = x \Rightarrow u' = 1$ <p style="text-align: right;">und <math>v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C</math> wird</p> $\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = x \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int 1 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $\int f_k(x) dx = \frac{5}{4} \cdot I - \frac{5}{4}k \cdot II = \frac{5}{4} \left( 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) - \frac{5}{4}k \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $= \frac{5}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{2}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 5 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $= \left( \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $\int_0^k f_k(x) dx = \left[ \left( \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k$ $= \left( \frac{5}{2}k - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( \frac{5}{2} \cdot 0 - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right]$ $= -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[ \left( -\frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^0 \right] = -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5$ $A_k = \left  \int_0^k f_k(x) dx \right  = \left  -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5 \right $

A1 g) Ausführliche Lösung: Die Graphen

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	-0,62	-0,85	-1,12	-1,38	-1,52	-1,25	0	3,4	11,2	27,7	60,9
$f_2(x)$	-0,72	-1,02	-1,39	-1,84	-2,27	-2,5	-2,06	0	5,6	18,4	45,7
$f_3(x)$	-0,82	-1,18	-1,67	-2,3	-3,03	-3,75	-4,12	-3,4	0	9,24	30,5
$f_4(x)$	-0,92	-1,35	-1,95	-2,76	-3,79	-5	-6,18	-6,8	-5,6	0	15,2

Markante Punkte:

$P_{k_y} \left( 0 \mid -\frac{5}{4}k \right)$  Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

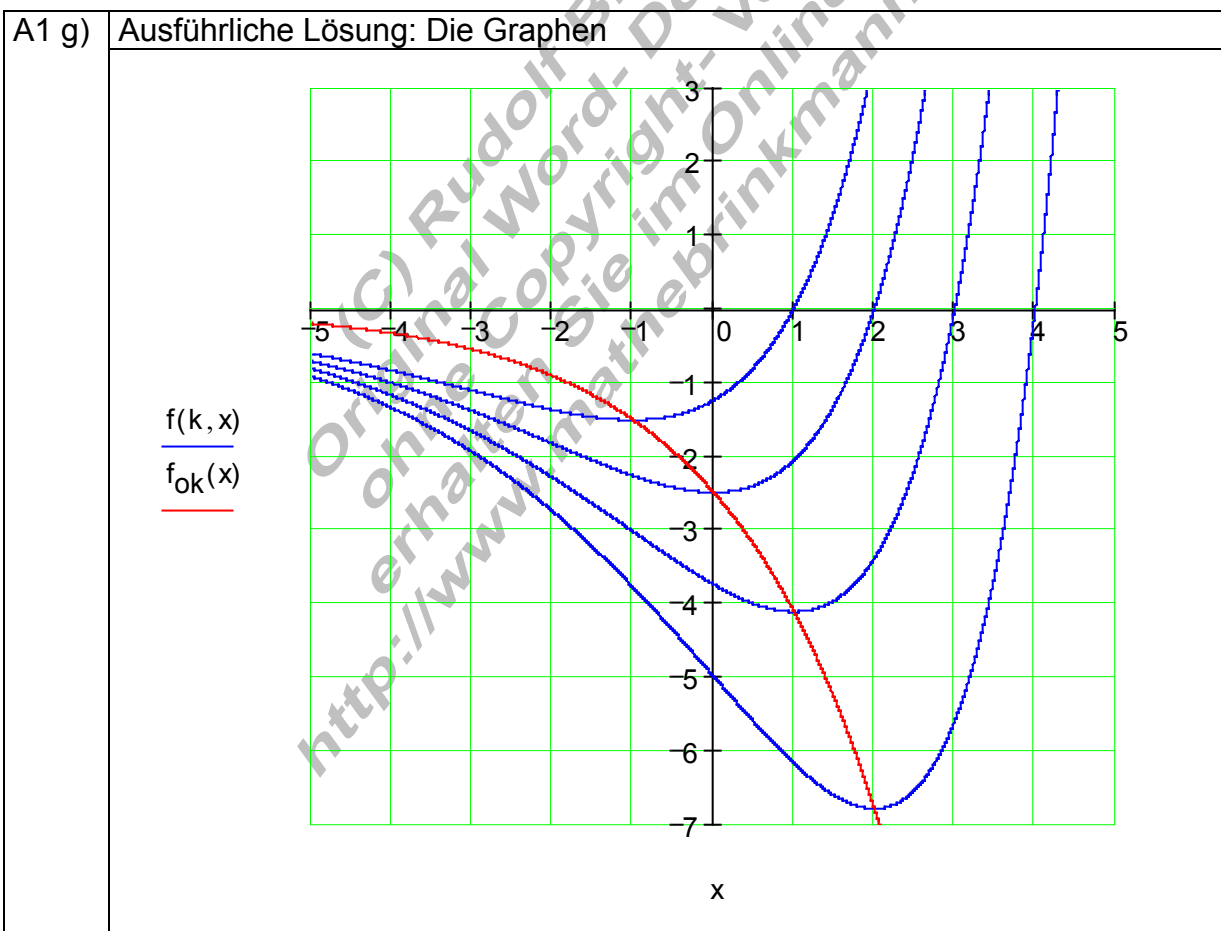
$P_{k_x} (k \mid 0)$  Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

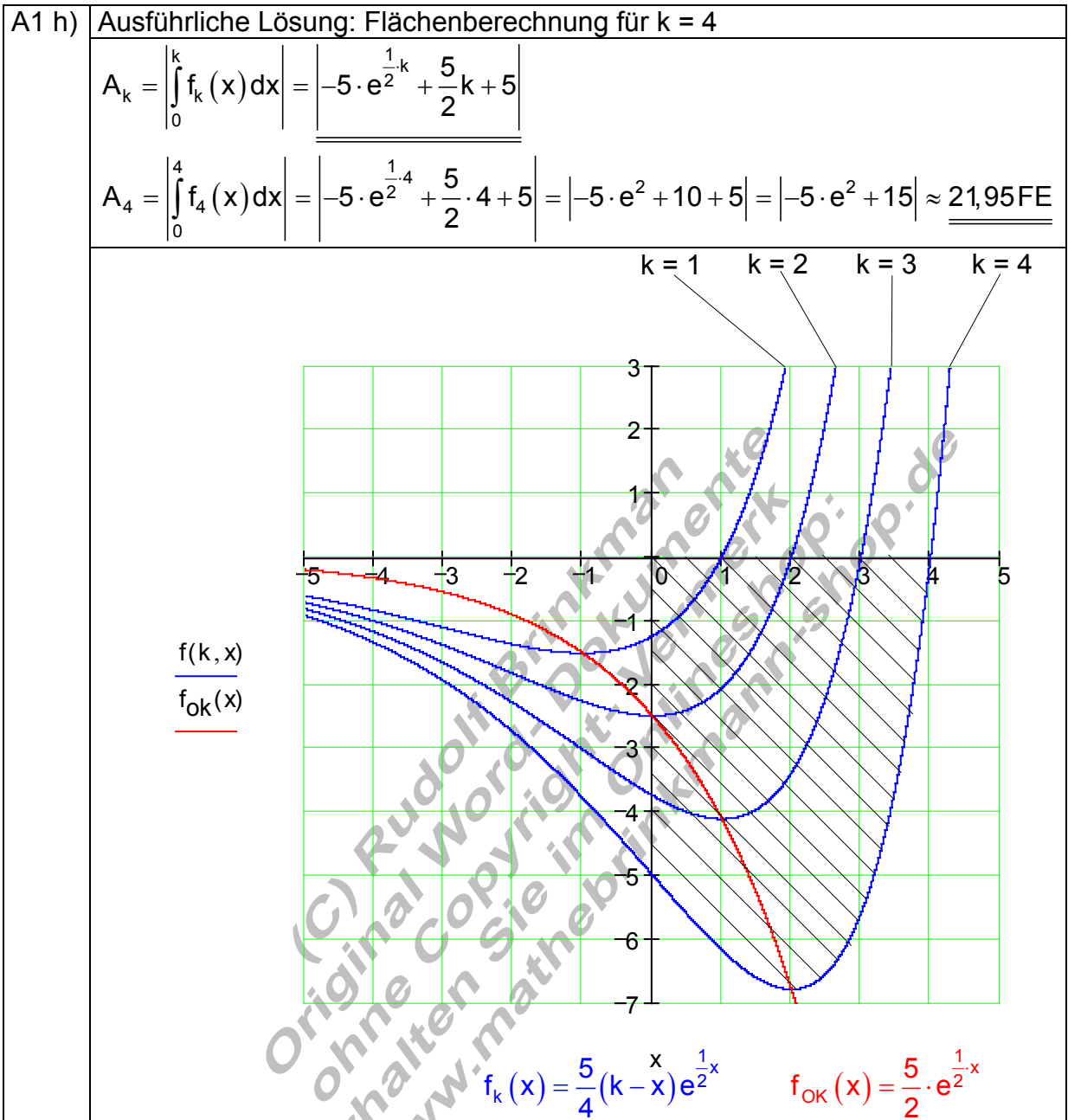
$P_{k_{\text{Min}}} \left( k - 2 \mid -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$  Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_{\text{Min}}} (-1 \mid -1,52); P_{2_{\text{Min}}} (0 \mid -2,5); P_{3_{\text{Min}}} (1 \mid -4,12); P_{4_{\text{Min}}} (2 \mid -6,8)$

$P_{k_w} \left( k - 4 \mid -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)$  Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_w} (-3 \mid -1,12); P_{2_w} (-2 \mid -1,84); P_{3_w} (-1 \mid -3,03); P_{4_w} (0 \mid -5)$





### Leistungsbewertung

Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
------	-----------------------	---------	--------	---

1+	97 - 100			
1	93 - 96	1a	4	8
1-	89 - 92	1b	6	12
2+	85 - 88	1c	6	12
2	80 - 84	1d	4	8
2-	75 - 79	1e	4	8
3+	70 - 74	1f	8	16
3	65 - 69	1g	16	32
3-	60 - 64	1h	2	4
4+	55 - 59			
4	50 - 54			
4-	45 - 49			
5+	39 - 44			
5	30 - 38			
5-	20 - 29			
6	0 - 19			
		Summe	50	100

Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1+	97 – 100	1a	4	8
1	93 – 96	1b	6	12
1-	89 – 92	1c	6	12
2+	85 – 88	1d	4	8
2	80 – 84	1e	4	8
2-	75 – 79	1f	8	16
3+	70 – 74	1g	16	32
3	65 – 69	1h	2	4
3-	60 – 64			
4+	55 – 59			
4	50 – 54			
4-	45 – 49			
5+	39 – 44			
5	30 – 38			
5-	20 – 29			
6	0 – 19			
		Summe	50	100