Klassenarbeit Mathematik Bearbeitungszeit 90 min. Mo 23.01.12
SG10D Gruppe A NAME: Lösungen

A1 Ausführliche Lösung zur Berechnung der Funktionsgleichung

a) Die vorgegebenen Punkte:

$P_1(-1|-4)$ $P_2(3|0)$ $P_3(5|-4)$ $P_4(7|4)$

Die Funktionsgleichung:

$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

Das Gleichungssystem:

$P_1(-1|-4)\Rightarrow f(-1)=-4 \Leftrightarrow -1a_3+1a_2-1a_1+1a_0=-4$

$P_2(3|0)\Rightarrow f(3)=0 \Leftrightarrow 27a_3+9a_2+3a_1+1a_0=0$

$P_3(5|-4)\Rightarrow f(5)=-4 \Leftrightarrow 125a_3+25a_2+5a_1+1a_0=-4$

$P_4(7|4)\Rightarrow f(7)=4 \Leftrightarrow 343a_3+49a_2+7a_1+1a_0=4$

Der Gauß- Algorithmus:

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−4	
1	3	9	27	0	II − I
1	5	25	125	−4	III − I
1	7	49	343	4	IV − I
1	−1	1	−1	−4	
0	4	8	28	4	: 4
0	6	24	126	0	: 6
0	8	48	344	8	: 8
1	−1	1	−1	−4	
0	1	2	7	1	
0	1	4	21	0	III − II
0	1	6	43	1	IV − II
1	−1	1	−1	−4	
0	1	2	7	1	
0	0	2	14	−1	
0	0	4	36	0	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−4	
0	1	2	7	1	
0	0	2	14	−1	
0	0	0	8	2	

$8a_3=2 \Leftrightarrow \boxed{a_3=\frac{1}{4}}$

$2a_2+14a_3=-1$

$\Leftrightarrow 2a_2+\frac{14}{4}=-1 \mid -\frac{14}{4}$

$\Leftrightarrow 2a_2=-\frac{4}{4}-\frac{14}{4} \Leftrightarrow 2a_2=-\frac{18}{4} \mid :2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2=-\frac{9}{4}}$

$a_1+2a_2+7a_3=1$

$\Leftrightarrow a_1-\frac{18}{4}+\frac{7}{4}=1 \Leftrightarrow a_1-\frac{11}{4}=1 \mid +\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow a_1=\frac{4}{4}+\frac{11}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_1=\frac{15}{4}}$

$a_0-a_1+a_2-a_3=-4$

$\Leftrightarrow a_0-\frac{15}{4}-\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=-4 \Leftrightarrow a_0-\frac{25}{4}=-4 \mid +\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow a_0=-\frac{16}{4}+\frac{25}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_0=\frac{9}{4}}$

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}$$

A1 Ausführliche Lösung zur Berechnung der Extrema

b)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4}\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4}=0\,|\cdot\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$$

$$p=-6\qquad q=5\qquad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-5=4\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{4}=2$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\Big|\;\begin{matrix}x_1=3+2=5\\x_2=3-2=1\end{matrix}$$ Stellen mit waagerechter Tangente

$$f''(x_1)=f''(5)=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}=\frac{6}{2}=3>0\Rightarrow\text{rel. Min. bei } x_1=5$$

$$f''(x_2)=f''(1)=\frac{3}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{6}{2}=-3<0\Rightarrow\text{rel. Max. bei } x_2=1$$

$$f(x_1)=f(5)=-4 \text{ da } P_3(5\,|\,-4)\qquad\Rightarrow \underline{P_{Min}(5\,|\,-4)}$$

$$f(x_2)=f(1)=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}+\frac{15}{4}+\frac{9}{4}=\frac{16}{4}=4\qquad\Rightarrow \underline{P_{Max}(1\,|\,4)}$$

A1 Ausführliche Lösung zur Berechnung der Wendepunkte

c)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0\,|+\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}x=\frac{9}{2}\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ist mögliche Wendestelle } x_w$$

$$f'''(x_w)=f'''(3)=\frac{3}{2}\neq 0\Rightarrow x_w=3 \text{ ist Wendestelle}$$

$$f(x_w)=f(3)=0 \text{ da } P_2(3\,|\,0)\Rightarrow \underline{P_w(3\,|\,0)}$$

A1 Ausführliche Lösung zur Berechnung der Achsenschnittpunkte

d)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}$$

$$f(0)=\frac{9}{4}\Rightarrow P_y\left(0\,|\,\frac{9}{4}\right)$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}=0$$

$P_w(3\,|\,0)\Rightarrow x_1=3$ ist bereits als Nullstelle bekannt $\Rightarrow P_{x1}(3\,|\,0)$

	$\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{9}{4}$
$x=3$ ↓		$+\frac{3}{4}$	$-\frac{18}{4}$	$-\frac{9}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$-\frac{6}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0

$\Rightarrow$ Restpolynom $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}=0\,|\cdot 4$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-3=0$$

$$p=-6\qquad q=-3\qquad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9+3=12\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{12}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

$x_2=3+\sqrt{12}\approx 6{,}46\Rightarrow P_{x2}\left(3+\sqrt{12}\approx 6{,}46\,|\,0\right)$

$x_3=3-\sqrt{12}\approx -0{,}46\Rightarrow P_{x3}\left(3-\sqrt{12}\approx -0{,}46\,|\,0\right)$

A1 Ausführliche Lösung zur Berechnung der Wertetabelle

e)

$$f(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-\frac{9}{4}\cdot 4+\frac{15}{4}\cdot 2+\frac{9}{4}=\frac{8}{4}-\frac{36}{4}+\frac{30}{4}+\frac{9}{4}=\frac{11}{4}=2{,}75$$

$$f(4)=\frac{1}{4}\cdot 64-\frac{9}{4}\cdot 16+\frac{15}{4}\cdot 4+\frac{9}{4}=\frac{64}{4}-\frac{144}{4}+\frac{60}{4}+\frac{9}{4}=-\frac{11}{4}=-2{,}75$$

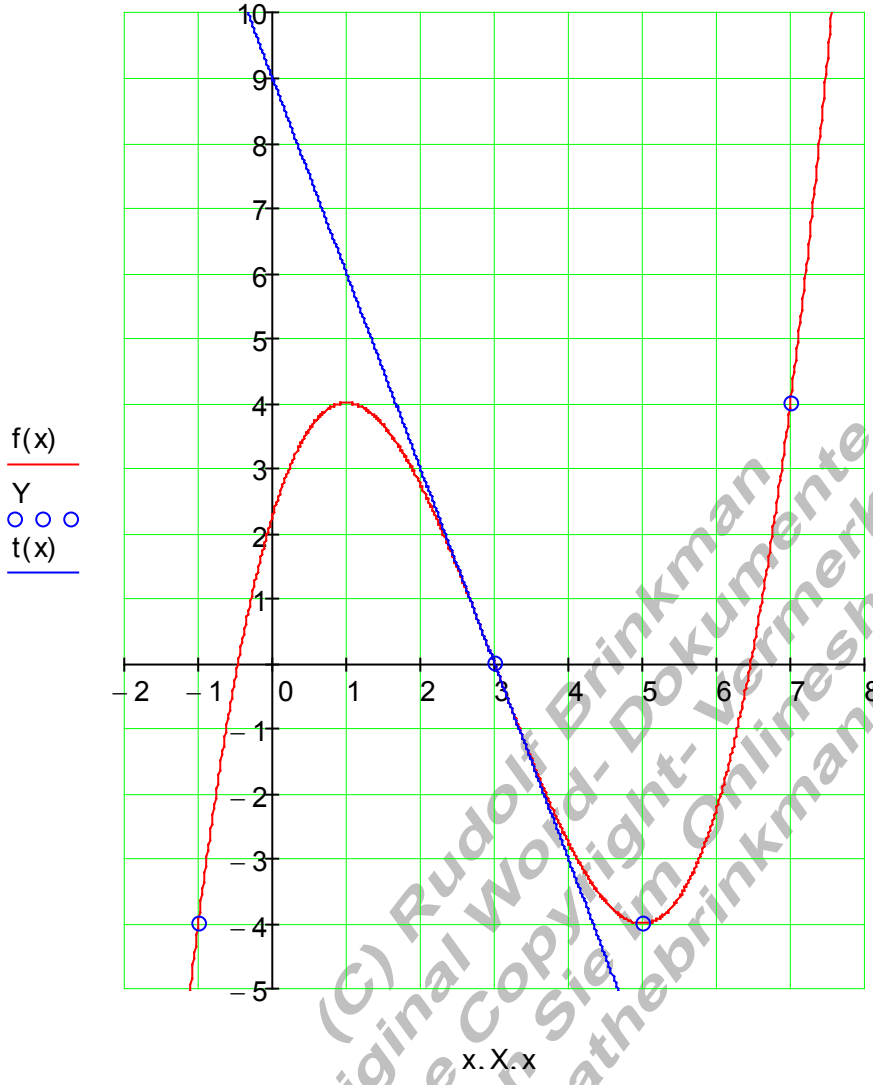
$$f(6)=\frac{1}{4}\cdot 216-\frac{9}{4}\cdot 36+\frac{15}{4}6+\frac{9}{4}=\frac{216}{4}-\frac{324}{4}+\frac{90}{4}+\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}=-2{,}25$$

$P_1(-1\,|\,-4)$ $P_2(3\,|\,0)=P_{x1}=P_w$ $P_3(5\,|\,-4)=P_{Min}$ $P_4(7\,|\,4)$ $P_{Max}(1\,|\,4)$

$P_y(0\,|\,2{,}25)$ $P_{x2}(6{,}46\,|\,0)$ $P_{x3}(-0{,}46\,|\,0)$

x	-1	$-0{,}46$	0	1	2	3	4	5	6	$6{,}46$	7
$f(x)$	-4	0	$2{,}25$	4	$2{,}75$	0	$-2{,}75$	-4	$-2{,}25$	0	4

A1 f)	Ausführliche Lösung Graph zeichnen



2.	Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$ Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

A2	Ausführliche Lösung	
	$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$ $P_y(0 \mid y_s)$ $\Rightarrow y_s = f(0) = e^0 - 4 \cdot e^0$ $= 1 - 4 \cdot 1$ $= -3$ $\Rightarrow P_y(0 \mid -3)$	$P_x(x_s \mid 0)$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 \cdot e^{x} \mid +4 \cdot e^{x}$ $\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \cdot e^{x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(4 \cdot e^{x})$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(4) + x \mid -x$ $\Leftrightarrow x = x_s = \ln(4) \Rightarrow P_x(\ln(4) \mid 0)$

Klassenarbeit Mathematik Bearbeitungszeit 90 min. Mo 23.01.12
SG10D Gruppe B NAME: Lösungen

A1 Ausführliche Lösung zur Berechnung der Funktionsgleichung

a) Die vorgegebenen Punkte:

$P_1(-1|4)$ $P_2(3|0)$ $P_3(5|4)$ $P_4(7|-4)$

Die Funktionsgleichung:

$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

Das Gleichungssystem:

$P_1(-1|4)\Rightarrow f(-1)=4 \Leftrightarrow -1a_3+1a_2-1a_1+1a_0=4$

$P_2(3|0)\Rightarrow f(3)=0 \Leftrightarrow 27a_3+9a_2+3a_1+1a_0=0$

$P_3(5|4)\Rightarrow f(5)=4 \Leftrightarrow 125a_3+25a_2+5a_1+1a_0=4$

$P_4(7|-4)\Rightarrow f(7)=-4 \Leftrightarrow 343a_3+49a_2+7a_1+1a_0=-4$

Der Gauß- Algorithmus:

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	4	
1	3	9	27	0	II − I
1	5	25	125	4	III − I
1	7	49	343	−4	IV − I
1	−1	1	−1	4	
0	4	8	28	−4	: 4
0	6	24	126	0	: 6
0	8	48	344	−8	: 8
1	−1	1	−1	4	
0	1	2	7	−1	
0	1	4	21	0	III − II
0	1	6	43	−1	IV − II
1	−1	1	−1	4	
0	1	2	7	−1	
0	0	2	14	1	
0	0	4	36	0	IV − 2·III
1	−1	1	−1	4	
0	1	2	7	−1	
0	0	2	14	1	
0	0	0	8	−2	

$8a_3=-2 \Leftrightarrow \boxed{a_3=-\frac{1}{4}}$

$2a_2+14a_3=1$

$\Leftrightarrow 2a_2-\frac{14}{4}=1|+\frac{14}{4}$

$\Leftrightarrow 2a_2=\frac{4}{4}+\frac{14}{4} \Leftrightarrow 2a_2=\frac{18}{4}|:2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2=\frac{9}{4}}$

$a_1+2a_2+7a_3=-1$

$\Leftrightarrow a_1+\frac{18}{4}-\frac{7}{4}=-1 \Leftrightarrow a_1+\frac{11}{4}=-1|-\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow a_1=-\frac{4}{4}-\frac{11}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_1=-\frac{15}{4}}$

$a_0-a_1+a_2-a_3=4$

$\Leftrightarrow a_0+\frac{15}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=4 \Leftrightarrow a_0+\frac{25}{4}=4|-\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow a_0=\frac{16}{4}-\frac{25}{4} \Leftrightarrow \boxed{a_0=-\frac{9}{4}}$

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{15}{4}x-\frac{9}{4}$$

A1 Ausführliche Lösung zur Berechnung der Extrema

b)

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{15}{4}x-\frac{9}{4}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{15}{4}\Rightarrow f''(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{15}{4}=0\;|\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$$

$$p=-6\qquad q=5\qquad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-5=4\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{4}=2$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\Big|\;\begin{matrix}x_1=3+2=5\\x_2=3-2=1\end{matrix}$$ Stellen mit waagerechter Tangente

$$f''(x_1)=f''(5)=-\frac{15}{2}+\frac{9}{2}=-\frac{6}{2}=-3<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=5$$

$$f''(x_2)=f''(1)=-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=\frac{6}{2}=3>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=1$$

$$f(x_1)=f(5)=4 \text{ da } P_3(5\,|\,4)\qquad\Rightarrow \underline{P_{Max}(5\,|\,4)}$$

$$f(x_2)=f(1)=-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}-\frac{15}{4}-\frac{9}{4}=-\frac{16}{4}=-4\qquad\Rightarrow \underline{P_{Min}(1\,|\,-4)}$$

A1 Ausführliche Lösung zur Berechnung der Wendepunkte

c)

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{15}{4}x-\frac{9}{4}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\Rightarrow f'''(x)=-\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=0\;|-\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x=-\frac{9}{2}\;|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ist mögliche Wendestelle } x_w$$

$$f'''(x_w)=f'''(3)=-\frac{3}{2}\neq 0\Rightarrow x_w=3 \text{ ist Wendestelle}$$

$$f(x_w)=f(3)=0 \text{ da } P_2(3\,|\,0)\Rightarrow \underline{P_w(3\,|\,0)}$$

A1 Ausführliche Lösung zur Berechnung der Achsenschnittpunkte

d)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{9}{4}$$

$$f(0) = -\frac{9}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid -\frac{9}{4}\right)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{9}{4} = 0$$

$P_w(3 \mid 0) \Rightarrow x_1 = 3$ ist bereits als Nullstelle bekannt $\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3 \mid 0)}}$

	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{9}{4}$	
$x = 3$	$\downarrow$	$-\frac{3}{4}$	$+\frac{18}{4}$	$+\frac{9}{4}$	$\Rightarrow$ Restpolynom $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \mid \cdot(-4)$
	$-\frac{1}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$p = -6 \qquad q = -3 \qquad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 + 3 = 12 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{12}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x_2 = 3 + \sqrt{12} \approx 6{,}46 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(3 + \sqrt{12} \approx 6{,}46 \mid 0\right)}}$$

$$x_3 = 3 - \sqrt{12} \approx -0{,}46 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x3}\left(3 - \sqrt{12} \approx -0{,}46 \mid 0\right)}}$$

A1 Ausführliche Lösung zur Berechnung der Wertetabelle

e)

$$f(2) = -\frac{1}{4}\cdot 8 + \frac{9}{4}\cdot 4 - \frac{15}{4}\cdot 2 - \frac{9}{4} = -\frac{8}{4} + \frac{36}{4} - \frac{30}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{11}{4} = -2{,}75$$

$$f(4) = -\frac{1}{4}\cdot 64 + \frac{9}{4}\cdot 16 - \frac{15}{4}\cdot 4 - \frac{9}{4} = -\frac{64}{4} + \frac{144}{4} - \frac{60}{4} - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} = 2{,}75$$

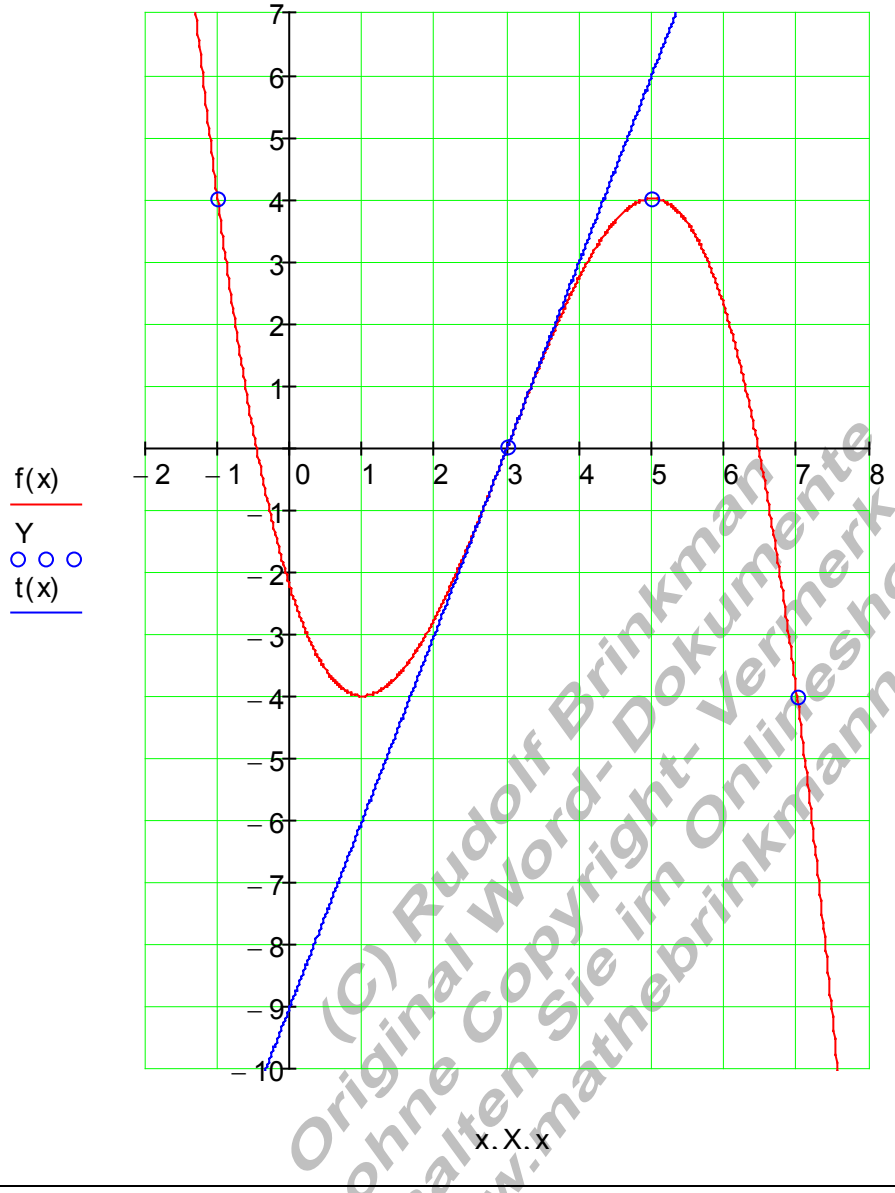
$$f(6) = -\frac{1}{4}\cdot 216 + \frac{9}{4}\cdot 36 - \frac{15}{4}\cdot 6 - \frac{9}{4} = -\frac{216}{4} + \frac{324}{4} - \frac{90}{4} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$P_1(-1 \mid 4)$ $P_2(3 \mid 0) = P_{x1} = P_w$ $P_3(5 \mid 4) = P_{Max}$ $P_4(7 \mid -4)$ $P_{Min}(1 \mid -4)$

$P_y(0 \mid -2{,}25)$ $P_{x2}(6{,}46 \mid 0)$ $P_{x3}(-0{,}46 \mid 0)$

x	-1	$-0{,}46$	0	1	2	3	4	5	6	$6{,}46$	7
$f(x)$	4	0	$-2{,}25$	-4	$-2{,}75$	0	$2{,}75$	4	$2{,}25$	0	-4

A1 f)	Ausführliche Lösung Graph zeichnen



2.	Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4 \cdot e^x - e^{2x}$ Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

A2	Ausführliche Lösung	
	$f(x) = 4 \cdot e^x - e^{2x}$ $P_y(0 \mid y_s)$ $\Rightarrow y_s = f(0) = 4 \cdot e^0 - e^0$ $= 4 \cdot 1 - 1$ $= 3$ $\Rightarrow P_y(0 \mid 3)$	$P_x(x_s \mid 0)$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot e^x - e^{2x} \mid + e^{2 \cdot x}$ $\Leftrightarrow 4 \cdot e^x = e^{2 \cdot x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(4 \cdot e^x) = \ln(e^{2 \cdot x})$ $\Leftrightarrow \ln(4) + x = 2x \mid -x$ $\Leftrightarrow x = x_s = \ln(4) \Rightarrow P_x(\ln(4) \mid 0)$

Leistungsbewertung				
Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1+	97 - 100			
1	93 - 96	1a	12	24
1-	89 - 92	1b	8	16
2+	85 - 88	1c	4	8
2	80 - 84	1d	8	16
2-	75 - 79	1e	6	12
3+	70 - 74	1f	6	12
3	65 - 69			
3-	60 - 64	2	6	12
4+	55 - 59			
4	50 - 54			
4-	45 - 49			
5+	39 - 44			
5	30 - 38			
5-	20 - 29			
6	0 - 19			
		Summe	50	100

Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1^+	97 – 100	1a	12	24
1	93 – 96	1b	8	16
1^-	89 – 92	1c	4	8
2^+	85 – 88	1d	8	16
2	80 – 84	1e	6	12
2^-	75 – 79	1f	6	12
3^+	70 – 74			
3	65 – 69	2	6	12
3^-	60 – 64			
4^+	55 – 59			
4	50 – 54			
4^-	45 – 49			
5^+	39 – 44			
5	30 – 38			
5^-	20 – 29			
6	0 – 19			
		Summe	50	100