

Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Mo 21.11.2011
SG10D Gruppe A	NAME: Lösungen		

Hilfsmittel: Taschenrechner

Rechnen Sie wo möglich mit Brüchen.

Bei auftretenden Wurzeln genügt eine Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma.

1.	Leiten Sie folgende Funktionen ab. Benutzen Sie dabei die Ihnen bekannten Ableitungsregeln.		
a)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$	b)	$f(x) = 3x - 4 + 2x^3 - 6x + 2x^2$
c)	$f(x) = (3x - 2)^2$	d)	$f(x) = ax^3 + 2bx^2 + c^2 - dx + 2e$
e)	$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{4}{29}$	f)	$f(x) = (2x + 1)(x + 4)$

A1	Ausführliche Lösung	
a)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = x + 2$	
b)	$f(x) = 3x - 4 + 2x^3 - 6x + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 4x - 3$	
c)	$f(x) = (3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4 \Rightarrow f'(x) = 18x - 12$	
d)	$f(x) = ax^3 + 2bx^2 + c^2 - dx + 2e \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 4bx - d$	
e)	$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{4}{29} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}$	
f)	$f(x) = (2x + 1)(x + 4) = 2x^2 + 9x + 4 \Rightarrow f'(x) = 4x + 9$	

2.	Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$	
a)	Ist der Funktionsgraph symmetrisch? Falls ja, welcher Art ist die Symmetrie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.	
b)	Berechnen Sie die relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte).	
c)	Berechnen Sie die Wendepunkte.	
d)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.	
e)	Berechnen Sie die Funktionswerte für $x = -2,5 ; -1,5 ; -0,5 ; 0,5 ; 1,5 ; 2,5$ und stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf. Genauigkeit in der Wertetabelle, zwei Stellen hinter dem Komma.	
f)	Zeichnen Sie möglichst genau den Graphen in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.)	

A2	Ausführliche Lösung
a)	Der Funktionsgraph ist symmetrisch zur y – Achse. Es gilt: $f(-x) = f(x)$. In der Funktionsgleichung tritt die Variable x nur mit geraden Exponenten auf.

A2	Ausführliche Lösung
b)	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow f'(x) = x^3 - 4x$ $\Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f'''(x) = 6x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $(x^2 - 4) \Rightarrow x_2 = 2 \quad x_3 = -2$ $f''(x_1) = f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. max. bei } x_1 = 0$ $f''(x_{2/3}) = f''(\pm 2) = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. min. bei } x_{2/3} = \pm 2$ $P_{\max}(0 f(0)) \Rightarrow P_{\max}\left(0 \mid -\frac{9}{4} \approx -2,25\right)$ $P_{\min 1/2}(x_{2/3} f(x_{2/3})) \Rightarrow P_{\min 1/2}\left(\pm 2 \mid -\frac{25}{4} = -6,25\right)$

A2	Ausführliche Lösung
c)	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \mid +4$ $\Leftrightarrow 3x^2 = 4 \mid :3$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \mid \sqrt{\quad} \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$ $f'''(x_{1/2}) = f'''(\pm \sqrt{\frac{4}{3}}) = \pm 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0$ $P_{w1/2}(x_{1/2} f(x_{1/2})) \Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm \sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1,155 \mid -\frac{161}{36} \approx -4,472\right)$

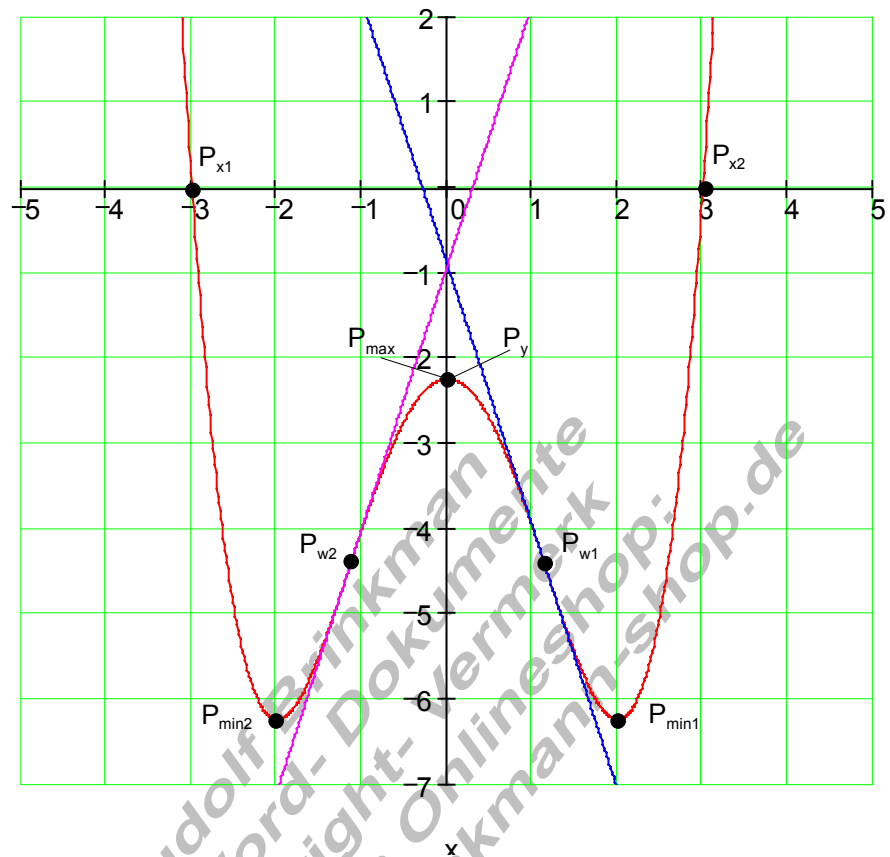
A2	Ausführliche Lösung
d)	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \quad f(0) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow P_y \left(0 \mid -\frac{9}{4} = -2,25 \right)$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \text{ Substitution } z = x^2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}z^2 - 2z - \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4$ $\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0$ $p = -8 \quad q = -9 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$ $z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \quad \begin{array}{l} z_1 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3 \\ z_2 = 4 - 5 = -1 \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{array} \right.$ $P_{x1}(-3 \mid 0) \quad P_{x2}(3 \mid 0)$

A2	Ausführliche Lösung																																																
e)	$f(-2,5) = f(2,5) \approx -4,98$ $f(-1,5) = f(1,5) \approx -5,48$ $f(-0,5) = f(0,5) \approx -2,73$ <p>Wertetabelle:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>P_{x1}</th> <th></th> <th>$P_{\min 2}$</th> <th></th> <th>P_{w2}</th> <th></th> <th>$P_y \quad P_{\max}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>-3</td> <td>-2,5</td> <td>-2</td> <td>-1,5</td> <td>-1,16</td> <td>-0,5</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>0</td> <td>-4,98</td> <td>-6,25</td> <td>-5,48</td> <td>-4,47</td> <td>-2,73</td> <td>-2,25</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <th>P_{w1}</th> <td></td> <th>$P_{\min 1}$</th> <td></td> <th>P_{x2}</th> <td></td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>0,5</td> <td>1,16</td> <td>1,5</td> <td>2</td> <td>2,5</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>-2,73</td> <td>-4,47</td> <td>-5,48</td> <td>-6,25</td> <td>-4,98</td> <td>0</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		P_{x1}		$P_{\min 2}$		P_{w2}		$P_y \quad P_{\max}$	x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1,16	-0,5	0	f(x)	0	-4,98	-6,25	-5,48	-4,47	-2,73	-2,25			P_{w1}		$P_{\min 1}$		P_{x2}		x	0,5	1,16	1,5	2	2,5	3		f(x)	-2,73	-4,47	-5,48	-6,25	-4,98	0	
	P_{x1}		$P_{\min 2}$		P_{w2}		$P_y \quad P_{\max}$																																										
x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1,16	-0,5	0																																										
f(x)	0	-4,98	-6,25	-5,48	-4,47	-2,73	-2,25																																										
		P_{w1}		$P_{\min 1}$		P_{x2}																																											
x	0,5	1,16	1,5	2	2,5	3																																											
f(x)	-2,73	-4,47	-5,48	-6,25	-4,98	0																																											

A2 Ausführliche Lösung

f)

$f(x)$
 $t_1(x)$
 $t_2(x)$



Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Mo 21.11.2011
SG10D	Gruppe B	NAME: Lösungen	

Hilfsmittel: Taschenrechner

Rechnen Sie wo möglich mit Brüchen.

Bei auftretenden Wurzeln genügt eine Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma.

1.	Leiten Sie folgende Funktionen ab. Benutzen Sie dabei die Ihnen bekannten Ableitungsregeln.		
a)	$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 4x + 5$	b)	$f(x) = 3x^2 - 5 + 2x + x^2 - 7x$
c)	$f(x) = (4x + 3)^2$	d)	$f(x) = 2ax^2 - bx^3 + cx + d^2 - 4e$
e)	$f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 3x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{17}{35}$	f)	$f(x) = (3x - 2)(x - 4)$

A1	Ausführliche Lösung	
a)	$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 4x + 5 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x + 4$	
b)	$f(x) = 3x^2 - 5 + 2x + x^2 - 7x \Rightarrow f'(x) = 8x - 5$	
c)	$f(x) = (4x + 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 32x + 24$	
d)	$f(x) = 2ax^2 - bx^3 + cx + d^2 - 4e \Rightarrow f'(x) = -3bx^2 + 4ax + c$	
e)	$f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 3x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{17}{35} \Rightarrow f'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 6x - \frac{7}{4}$	
f)	$f(x) = (3x - 2)(x - 4) \Rightarrow f'(x) = 6x - 14$	

2.	Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4}$
a)	Ist der Funktionsgraph symmetrisch? Falls ja, welcher Art ist die Symmetrie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
b)	Berechnen Sie die relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte).
c)	Berechnen Sie die Wendepunkte.
d)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
e)	Berechnen Sie die Funktionswerte für $x = -2,5 ; -1,5 ; -0,5 ; 0,5 ; 1,5 ; 2,5$ und stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf. Genauigkeit in der Wertetabelle, zwei Stellen hinter dem Komma.
f)	Zeichnen Sie möglichst genau den Graphen in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.)

A2	Ausführliche Lösung
a)	Der Funktionsgraph ist symmetrisch zur y – Achse. Es gilt: $f(-x) = f(x)$ In der Funktionsgleichung tritt die Variable x nur mit geraden Exponenten auf.

A2	Ausführliche Lösung
b)	$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4} \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 4x$ $\Rightarrow f''(x) = -3x^2 + 4 \Rightarrow f'''(x) = -6x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 4x = 0$ $\Leftrightarrow x(-x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $(-x^2 + 4) \Rightarrow x_2 = 2 \quad x_3 = -2$ $f''(x_1) = f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. min. bei } x_1 = 0$ $f''(x_{2/3}) = f''(\pm 2) = -8 < 0 \Rightarrow \text{rel. max. bei } x_{2/3} = \pm 2$ $P_{\min}(0 f(0)) \Rightarrow P_{\min}\left(0 \mid \frac{9}{4} \approx 2,25\right)$ $P_{\max 1/2}(x_{2/3} f(x_{2/3})) \Rightarrow P_{\max 1/2}\left(\pm 2 \mid \frac{25}{4} = 6,25\right)$

A2	Ausführliche Lösung
c)	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 4 = 0 \mid -4$ $\Leftrightarrow -3x^2 = -4 \mid :(-3)$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \mid \sqrt{\quad} \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$ $f'''(x_{1/2}) = f'''(\pm \sqrt{\frac{4}{3}}) = \pm 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0$ $P_{w1/2}(x_{1/2} f(x_{1/2})) \Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm \sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1,155 \mid \frac{161}{36} \approx 4,472\right)$

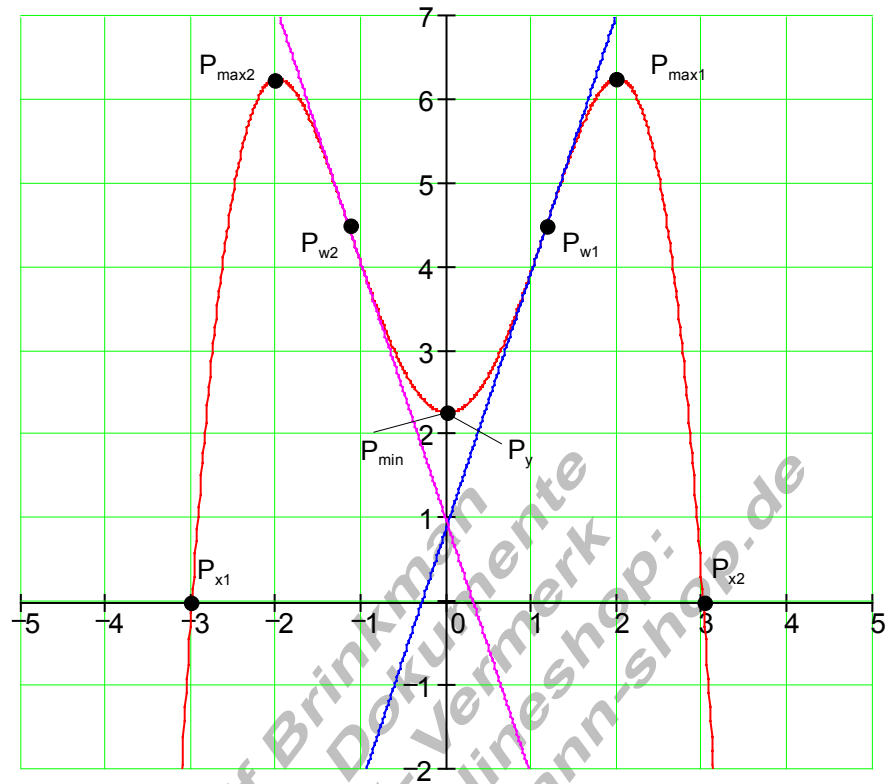
A2	Ausführliche Lösung
d)	$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4} \quad f(0) = \frac{9}{4} = 2,25 \Rightarrow P_y \left(0 \mid \frac{9}{4} = 2,25 \right)$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4} = 0 \text{ Substitution } z = x^2$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{4}z^2 + 2z + \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot (-4)$ $\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0$ $p = -8 \quad q = -9 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$ $z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} z_1 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3 \\ z_2 = 4 - 5 = -1 \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{array} \right.$ $P_{x1}(-3 \mid 0) \quad P_{x2}(3 \mid 0)$

A2	Ausführliche Lösung																																																
e)	$f(-2,5) = f(2,5) \approx 4,98$ $f(-1,5) = f(1,5) \approx 5,48$ $f(-0,5) = f(0,5) \approx 2,73$ Wertetabelle: <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">P_{x1}</td> <td></td> <td style="text-align: center;">$P_{\max 2}$</td> <td></td> <td style="text-align: center;">P_{w2}</td> <td></td> <td style="text-align: center;">$P_y \quad P_{\max}$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">-3</td> <td style="text-align: center;">-2,5</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">-1,5</td> <td style="text-align: center;">-1,16</td> <td style="text-align: center;">-0,5</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">f(x)</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">4,98</td> <td style="text-align: center;">6,25</td> <td style="text-align: center;">5,48</td> <td style="text-align: center;">4,47</td> <td style="text-align: center;">2,73</td> <td style="text-align: center;">2,25</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">P_{w1}</td> <td></td> <td style="text-align: center;">$P_{\max 1}$</td> <td></td> <td style="text-align: center;">P_{x2}</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">0,5</td> <td style="text-align: center;">1,16</td> <td style="text-align: center;">1,5</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">2,5</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">f(x)</td> <td style="text-align: center;">2,73</td> <td style="text-align: center;">4,47</td> <td style="text-align: center;">5,48</td> <td style="text-align: center;">6,25</td> <td style="text-align: center;">4,98</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td></td> </tr> </table>		P_{x1}		$P_{\max 2}$		P_{w2}		$P_y \quad P_{\max}$	x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1,16	-0,5	0	f(x)	0	4,98	6,25	5,48	4,47	2,73	2,25			P_{w1}		$P_{\max 1}$		P_{x2}		x	0,5	1,16	1,5	2	2,5	3		f(x)	2,73	4,47	5,48	6,25	4,98	0	
	P_{x1}		$P_{\max 2}$		P_{w2}		$P_y \quad P_{\max}$																																										
x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1,16	-0,5	0																																										
f(x)	0	4,98	6,25	5,48	4,47	2,73	2,25																																										
		P_{w1}		$P_{\max 1}$		P_{x2}																																											
x	0,5	1,16	1,5	2	2,5	3																																											
f(x)	2,73	4,47	5,48	6,25	4,98	0																																											

A2 Ausführliche Lösung

f)

$f(x)$
 $t_1(x)$
 $t_2(x)$



Leistungsbewertung				
Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1+	97 - 100			
1	93 - 96	1a	1	2
1-	89 - 92	1b	2	4
2+	85 - 88	1c	2	4
2	80 - 84	1d	2	4
2-	75 - 79	1e	2	4
3+	70 - 74	1f	2	4
3	65 - 69			
3-	60 - 64	2a	3	6
4+	55 - 59	2b	10	20
4	50 - 54	2c	7	14
4-	45 - 49	2d	7	14
5+	39 - 44	2e	6	12
5	30 - 38	2f	6	12
5-	20 - 29			
6	0 - 19			
		Summe	50	100

Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1+	97 - 100	1a	1	2
1	93 - 96	1b	2	4
1-	89 - 92	1c	2	4
2+	85 - 88	1d	2	4
2	80 - 84	1e	2	4
2-	75 - 79	1f	2	4
3+	70 - 74			
3	65 - 69	2a	3	6
3-	60 - 64	2b	10	20
4+	55 - 59	2c	7	14
4	50 - 54	2d	7	14
4-	45 - 49	2e	6	12
5+	39 - 44	2f	6	12
5	30 - 38			
5-	20 - 29			
6	0 - 19			
		Summe	50	100