Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 14.06.11**
SG10 D Gruppe A	**NAME: Lösungen**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1.	Wissensfragen
a)	Was wissen Sie im Allgemeinen über die Symmetrie ganzrationaler Funktionen? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x)=4x^5-2x^3+x$
b)	Wodurch wird im Allgemeinen der Verlauf einer ganzrationalen Funktion bestimmt? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x)=2x^4+3x^2-2x+1$
c)	Was wissen Sie im Allgemeinen über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x)=3x^3-x^2+2x-1$

A1	Ausführliche Lösungen
a)	Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann <u>achsensymmetrisch</u>, wenn alle Exponenten in der Funktionsgleichung <u>gerade</u> sind. Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann <u>punktsymmetrisch</u>, wenn alle Exponenten in der Funktionsgleichung <u>ungerade</u> sind. $f(x)=4x^5-2x^3+x \quad \Rightarrow$ Punktsymmetrie, da alle Exponenten ungerade sind
b)	Der Verlauf einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt, also durch $a_n x^n$. $f(x)=2x^4+3x^2-2x+1 \quad n=4\ (\text{gerade}) \wedge a_n=2>0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{II}-\text{I}}}$
c)	Eine ganzrationale Funktion n ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Ist der Grad n ungerade, so hat sie mindestens eine Nullstelle. $f(x)=3x^3-x^2+2x-1$ hat mindestens eine und höchstens 3 Nullstellen.

2.	Führen Sie die Polynomdivision durch.
	$\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)$

A2	Ausführliche Lösung
	$\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)=3x^2+6x-9$ $\underline{-\left(3x^3-21x^2\right)}$ $6x^2-51x$ $\underline{-\left(6x^2-42x\right)}$ $-9x+63$ $\underline{-(-9x+63)}$

3. Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen folgender ganzrationaler Funktionen und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + \frac{75}{2}x^2 - 216$

A3 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ den Faktor x ausklammern

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 6x + 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0$ quadratische Gleichung

$p = -6 \,;\, q = 9 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 9 = 0$

Darstellung als Produkt von Linearfaktoren:

$f(x) = x(x-3)(x-3) = x(x-3)^2$

A3 Ausführliche Lösung

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + \frac{75}{2}x^2 - 216 = 0$

Substitution: $x^2 = z \Rightarrow -\frac{3}{2}z^2 + \frac{75}{2}z - 216 = 0 \mid \cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

$\Leftrightarrow z^2 - 25z + 144 = 0$ Normalform der quadratischen Gleichung

$p = -25 \,;\, q = 144 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{625}{4} - \frac{576}{4} = \frac{49}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$

$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ $\quad z_1 = \frac{25}{2} + \frac{7}{2} = \frac{32}{2} = 16$ $\quad z_2 = \frac{25}{2} - \frac{7}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$z_1 = 16 \,;\, z_2 = 9 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4 \,;\, x_{3/4} = \pm 3$

$f(x) = -\frac{3}{2}(x-4)(x+4)(x-3)(x+3)$

4. Die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion lautet:

$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 9x + 4$

Der Graph verläuft durch die Punkte $P_1(2 \mid -4)\,;\, P_2(4 \mid 0)\,;\, P_3(6 \mid 4)\,;\, P_4(8 \mid -4)$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

b) Berechnen Sie die Funktionswerte für folgende x- Werte:
$x \in \{0\,;1\,;3\,;5\,;7\}$
und tragen Sie alle bekannten Werte in eine Wertetabelle ein.

c) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
Tiefpunkt: $P_1(2 \mid -4)$ Hochpunkt: $P_3(6 \mid 4)$

A4 Ausführliche Lösung

a) $f(0)=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,4)}}$

$P_2(4\,|\,0) \Rightarrow x_1 = 4$ ist Nullstelle.

Horner-Schema mit $x = 4$

$$\begin{array}{c|cccc|l} & -1/4 & 3 & -9 & 4 & \\ x=4 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{8} & \underline{-4} & \\ & -1/4 & 2 & -1 & 0 & = f(4) \Rightarrow x_1 = 4 \end{array}$$

Restpolynom: $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1 = 0 \,|\cdot(-4) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$

$$p = -8\,;\, q = 4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{12}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 4 + \sqrt{12} \approx 7{,}46 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(4+\sqrt{12} \approx 7{,}46 \,\middle|\, 0\right)}} \\ x_3 = 4 - \sqrt{12} \approx 0{,}53 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x3}\left(4-\sqrt{12} \approx 0{,}53 \,\middle|\, 0\right)}} \end{array} \right.$$

A4 Ausführliche Lösung

b)

			P_1 TP		P_2		P_3 HP		P_4	P_{x2}	P_{x3}
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	7,46	0,53
f(x)	4	–2,25	–4	–2,75	0	2,75	4	2,25	–4	0	0

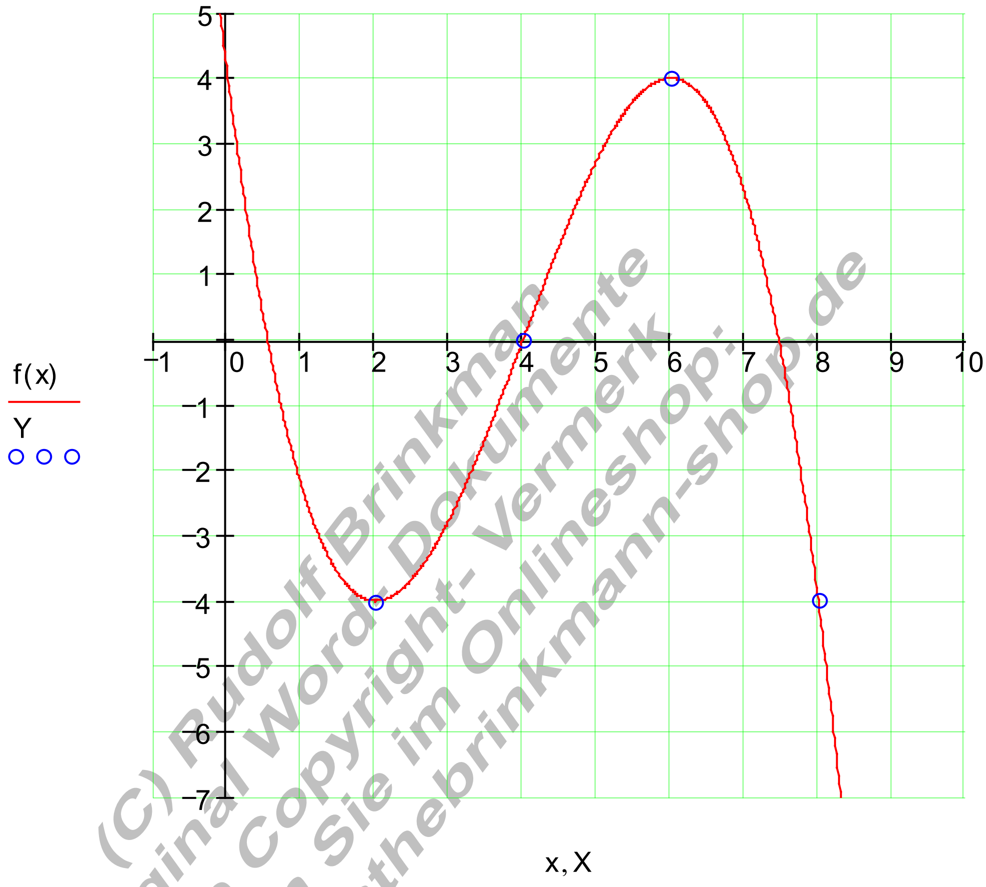
$$\begin{array}{c|cccc|l} & -1/4 & 3 & -9 & 4 & \\ x=1 & \downarrow & \underline{-1/4} & \underline{11/4} & \underline{-25/4} & \\ & -1/4 & 11/4 & -25/4 & -9/4 & = f(1) = -2{,}25 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|l} & -1/4 & 3 & -9 & 4 & \\ x=3 & \downarrow & \underline{-3/4} & \underline{27/4} & \underline{-27/4} & \\ & -1/4 & 9/4 & -9/4 & -11/4 & = f(3) = -2{,}75 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|l} & -1/4 & 3 & -9 & 4 & \\ x=5 & \downarrow & \underline{-5/4} & \underline{35/4} & \underline{-5/4} & \\ & -1/4 & 7/4 & -1/4 & 11/4 & = f(5) = 2{,}75 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|l} & -1/4 & 3 & -9 & 4 & \\ x=7 & \downarrow & \underline{-7/4} & \underline{35/4} & \underline{-7/4} & \\ & -1/4 & 5/4 & -1/4 & 9/4 & = f(7) = 2{,}25 \end{array}$$

A4	Ausführliche Lösung	
	c)	



Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 14.06.11**
SG10 D Gruppe B	**NAME: Lösungen**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1.	Wissensfragen	
	a)	Was wissen Sie im Allgemeinen über die Symmetrie ganzrationaler Funktionen? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2$
	b)	Wodurch wird im Allgemeinen der Verlauf einer ganzrationalen Funktion bestimmt? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 4$
	c)	Was wissen Sie im Allgemeinen über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2$

A1	Ausführliche Lösungen	
	a)	Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann <u>achsensymmetrisch</u>, wenn alle Exponenten in der Funktionsgleichung <u>gerade</u> sind. Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann <u>punktsymmetrisch</u>, wenn alle Exponenten in der Funktionsgleichung <u>ungerade</u> sind. $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2 \Rightarrow$ Achsensymmetrie, da alle Exponenten gerade sind
	b)	Der Verlauf einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt, also durch $a_n x^n$. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 4 \quad n = 3 \text{ (ungerade)} \wedge a_n = -4 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$
	c)	Eine ganzrationale Funktion n ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Ist der Grad n ungerade, so hat sie mindestens eine Nullstelle. $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2$ hat höchstens 4 Nullstellen.

2.	Führen Sie die Polynomdivision durch.
	$\left(3x^3 - 15x^2 - 51x + 63\right) : (x - 1)$

A2 Ausführliche Lösung

$$\left(3x^3 - 15x^2 - 51x + 63\right) : (x - 1) = 3x^2 - 12x - 63$$
$$\underline{-\left(3x^3 - 3x^2\right)}$$
$$-12x^2 - 51x$$
$$\underline{-\left(-12x^2 + 12x\right)}$$
$$-63x + 63$$
$$\underline{-\left(-63x + 63\right)}$$

3.	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen folgender ganzrationaler Funktionen und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.		
a)	$f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 8x$	b)	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 18$

A3 Ausführliche Lösung

a)
$f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 8x$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x^2 + 8x = 0$ den Faktor x ausklammern

$\Leftrightarrow x\left(-4x^2 + 4x + 8\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$-4x^2 + 4x + 8 = 0 \,|\, : (-4)$ quadratische Gleichung

Normalform der quadratischen Gleichung

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$p = -1;\, q = -2 \Rightarrow D == \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Darstellung als Produkt von Linearfaktoren:

$f(x) = -4x(x-2)(x+1)$

A3 Ausführliche Lösung

b)
$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 18 = 0$

Substitution: $x^2 = z \Rightarrow \frac{1}{2}z^2 - \frac{13}{2}x + 18 = 0 \,|\, \cdot (2)$

$\Leftrightarrow z^2 - 13z + 36 = 0$ Normalform der quadratischen Gleichung

$$p = -13;\, q = 36 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{array} \right.$$

$z_1 = 9;\, z_2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3;\, x_{3/4} = \pm 2$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$

4. Die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 4$$

Der Graph verläuft durch die Punkte $P_1(2\,|\,4)$; $P_2(4\,|\,0)$; $P_3(6\,|\,-4)$; $P_4(8\,|\,4)$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

b) Berechnen Sie die Funktionswerte für folgende x- Werte:
$x \in \{0\,;1\,;3\,;5\,;7\}$
und tragen Sie alle bekannten Werte in eine Wertetabelle ein.

c) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
Hochpunkt: $P_1(2\,|\,4)$ Tiefpunkt: $P_3(6\,|\,-4)$

A4 Ausführliche Lösung

a) $f(0) = -4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-4)}}$

$P_2(4\,|\,0) \Rightarrow x_1 = 4$ ist Nullstelle.

Horner-Schema mit $x = 4$

$$\begin{array}{lcccc} & 1/4 & -3 & 9 & -4 \\ x = 4 & \downarrow & \underline{1} & \underline{-8} & \underline{4} \\ & 1/4 & -2 & 1 & 0 = f(4) \Rightarrow x_1 = 4 \end{array}$$

Restpolynom: $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 1 = 0\,|\cdot 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$

$p = -8\,;\, q = 4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{12}$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\; \begin{array}{l} x_2 = 4 + \sqrt{12} \approx 7{,}46 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(4 + \sqrt{12} \approx 7{,}46\,\middle|\,0\right)}} \\ x_3 = 4 - \sqrt{12} \approx 0{,}53 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x3}\left(4 - \sqrt{12} \approx 0{,}53\,\middle|\,0\right)}} \end{array} \right.$$

A4 Ausführliche Lösung

b)

			P_1 HP		P_2		P_3 TP		P_4	P_{x2}	P_{x3}
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	7,46	0,53
$f(x)$	–4	2,25	4	2,75	0	–2,75	–4	–2,25	4	0	0

$$\begin{array}{c|cccc|l} & 1/4 & -3 & 9 & -4 & \\ x=1 & \downarrow & 1/4 & -11/4 & 25/4 & \\ \hline & 1/4 & -11/4 & 25/4 & 9/4 & = f(1) = 2{,}25 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|l} & 1/4 & -3 & 9 & -4 & \\ x=3 & \downarrow & 3/4 & -27/4 & 27/4 & \\ \hline & 1/4 & -9/4 & 9/4 & 11/4 & = f(3) = 2{,}75 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|l} & 1/4 & -3 & 9 & -4 & \\ x=5 & \downarrow & 5/4 & -35/4 & 5/4 & \\ \hline & 1/4 & -7/4 & 1/4 & -11/4 & = f(5) = -2{,}75 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|l} & 1/4 & -3 & 9 & -4 & \\ x=7 & \downarrow & 7/4 & -35/4 & 7/4 & \\ \hline & 1/4 & -5/4 & 1/4 & -9/4 & = f(7) = -2{,}25 \end{array}$$

A4 Ausführliche Lösung

c)