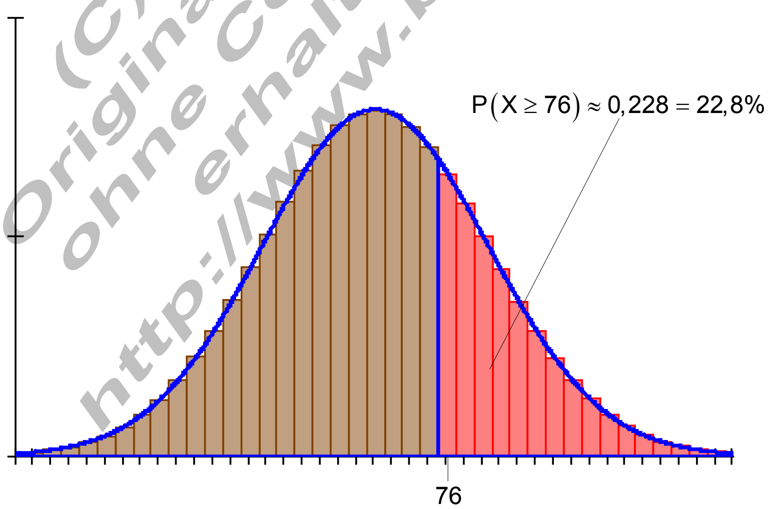
Lösungen zur Binomialverteilung IV

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten.	
	a)	$n = 160$ und $p = 0,45$ bestimmen Sie $P(X \geq 76)$
	b)	$n = 200$ und $p = 0,63$ bestimmen Sie $P(X \leq 110)$
	c)	$n = 250$ und $p = 0,26$ bestimmen Sie $P(X < 60)$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$n = 160 \qquad p = 0,45 \qquad P(X \geq 76)$
		$\mu = n \cdot p = 160 \cdot 0,45 = 72$
		$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{72 \cdot 0,55} = \sqrt{39,6} \approx 6,293 > 3$
		$[...\{69...72...75\}\{76...160\}]$
		$P(X \geq 76) = \frac{1}{2}\left[1 - P(69 \leq X \leq 75)\right]$
		$P(69 \leq X \leq 75) = P(68,5 \leq X \leq 75,5)$
		$r = 3,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{3,5}{6,293} \Rightarrow r \approx 0,56 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0,56$
		$P(69 \leq X \leq 75) \approx 0,425$
		$P(X \geq 76) = \frac{1}{2}[1 - 0,425] \approx \underline{\underline{0,288}}$

A1	a)	
		

A1 **Ausführliche Lösung**

b) $n = 200 \qquad p = 0{,}63 \qquad P(X \le 110)$

$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}63 = 126$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{126 \cdot 0{,}37} = \sqrt{46{,}62} \approx 6{,}828 > 3$

$[\{0 \ldots 110\}\{111 \ldots 126 \ldots 141\} \ldots]$

$P(X \le 110) = \frac{1}{2}\left[1 - P(111 \le X \le 141)\right]$

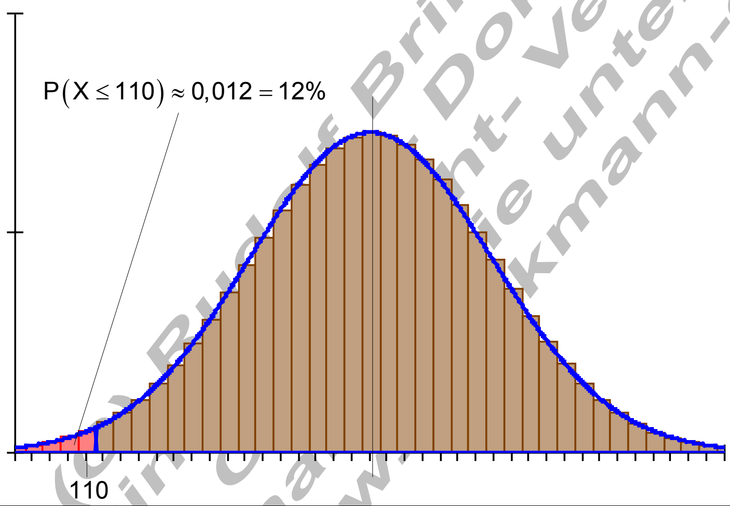
$P(111 \le X \le 141) = P(110{,}5 \le X \le 141{,}5)$

$r = 15{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{15{,}5}{6{,}828} \Rightarrow r \approx 2{,}27 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 2{,}27$

$P(111 \le X \le 141) \approx 0{,}977$

$P(X \le 110) = \frac{1}{2}[1 - 0{,}977] \approx \underline{\underline{0{,}012}}$

A1 b)



A1 **Ausführliche Lösung**

c) $n = 250 \qquad p = 0{,}26 \qquad P(X < 60)$

$\mu = n \cdot p = 250 \cdot 0{,}26 = 65$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{65 \cdot 0{,}74} = \sqrt{48{,}1} \approx 6{,}935 > 3$

$[\{0 \ldots 59\}\{60 \ldots 65 \ldots 70\} \ldots]$

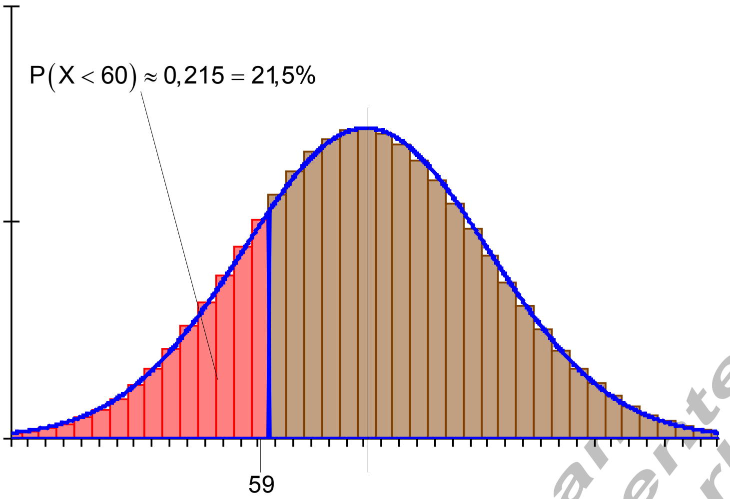
$P(X < 60) = \frac{1}{2}\left[1 - P(60 \le X \le 70)\right]$

$P(60 \le X \le 70) = P(59{,}5 \le X \le 70{,}5)$

$r = 5{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{5{,}5}{6{,}935} \Rightarrow r \approx 0{,}79 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0{,}79$

$P(60 \le X \le 70) \approx 0{,}570$

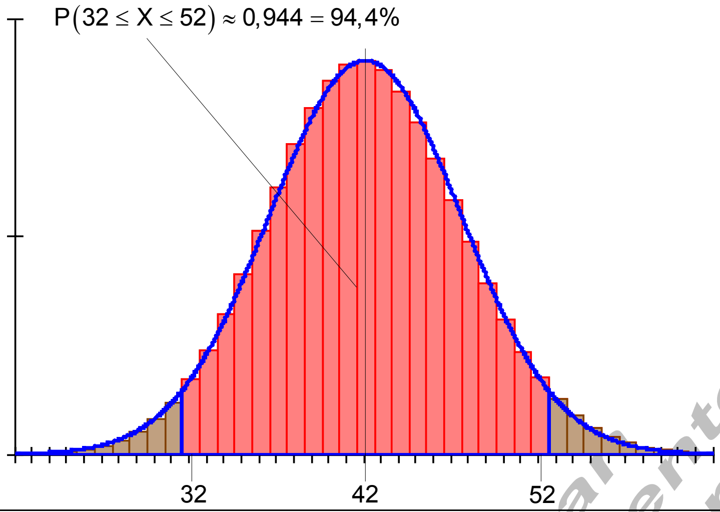
$P(X < 60) = \frac{1}{2}[1 - 0{,}570] \approx \underline{\underline{0{,}215}}$

A1	c)	

A2	Aufgabe	
	Bestimmen Sie die 95%- Umgebung vom Erwartungswert.	
	a)	$n = 150$ und $p = 0,28$
	b)	$n = 250$ und $p = 0,7$
	c)	$n = 392$ und $p = 0,5$

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	$n = 150 \qquad p = 0,28$
		$\mu = n \cdot p = 150 \cdot 0,28 = 42$
		$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{42 \cdot 0,72} = \sqrt{30,24} \approx 5,499 > 3$
		$95\% - \text{Umgebung}: [\ldots\{?\ldots 42 \ldots ?\}\ldots]$
		$z = 1,96 \qquad r = z \cdot \sigma = 1,96 \cdot 5,499 \approx 10,778$
		$\mu - r = 42 - 10,778 \approx 31,22$
		$\mu + r = 42 + 10,778 \approx 52,78$
		Überlegung zur Rundung: Die $95\% -$Umgebung soll symmetrisch zum Erwartungswert liegen. Bie gewohnter Rundung, wäre das Intervall [31...53] zu betrachten. Das würde einem Radius von $r = 11$ entsprechen, damit wäre $P(31 \le X \le 53) > 0,95$. Bei der Wahl von $r = 10$ wird $P(32 \le X \le 52) < 0,95$. Oft geht aus der Aufgabenstellung hervor, wie zu runden ist. In jedem Fall aber ist die tatsächliche Wahrscheinlichkeit der gewählten Umgebung zu bestimmen.
		$P(31 \le X \le 53) = P(30,5 \le X \le 53,5) \Rightarrow r = 11,5$
		$\Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{11,5}{5,499} \Rightarrow r \approx 2,09 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 2,09$
		$P(31 \le X \le 53) \approx \underline{\underline{0,963}}$
		$P(32 \le X \le 52) = P(31,5 \le X \le 52,5) \Rightarrow r = 10,5$
		$\Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{5,499} \Rightarrow r \approx 1,91 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,91$
		$P(32 \le X \le 52) \approx \underline{\underline{0,944}}$

A2 a)



A2 **Ausführliche Lösung**

b) $n = 250 \qquad p = 0{,}7$

$\mu = n \cdot p = 250 \cdot 0{,}7 = 175$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{175 \cdot 0{,}3} = \sqrt{52{,}5} \approx 7{,}246 > 3$

$95\% - \text{Umgebung}: [\ldots\{?\ldots 175 \ldots ?\}\ldots]$

$z = 1{,}96 \qquad r = z \cdot \sigma = 1{,}96 \cdot 7{,}246 \approx 14{,}2$

$\mu - r = 175 - 14{,}2 \approx 160{,}8$ Wahl: 161

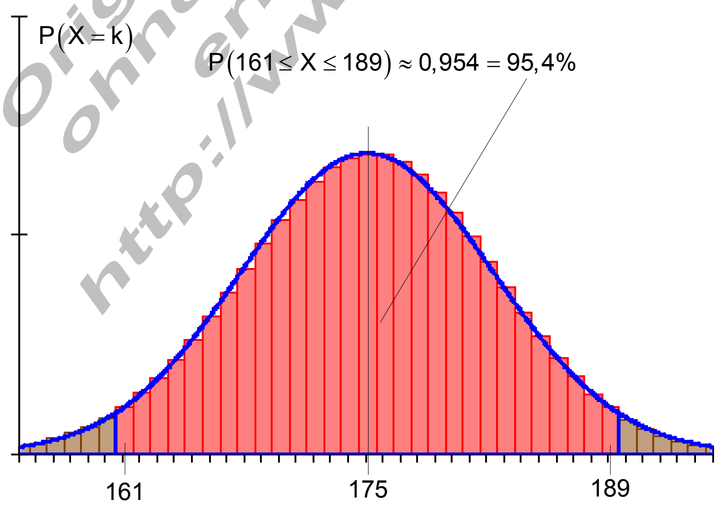
$\mu + r = 175 + 14{,}2 \approx 189{,}2$ Wahl: 189

$P(161 \le X \le 189) = P(160{,}5 \le X \le 189{,}5)$

$r = 14{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{14{,}5}{7{,}246} \Rightarrow r \approx 2{,}00 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 2{,}00$

$P(161 \le X \le 189) \approx \underline{\underline{0{,}954}}$

A2 b)



A2 Ausführliche Lösung

c)

$n = 392 \qquad p = 0,5$

$\mu = n \cdot p = 382 \cdot 0,5 = 196$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{196 \cdot 0,5} = \sqrt{98} \approx 9,899 > 3$

$95\% - \text{Umgebung}: [\ldots\{?\ldots 196 \ldots ?\}\ldots]$

$z = 1,96 \qquad r = z \cdot \sigma = 1,96 \cdot 9,899 \approx 19,40$

$\mu - r = 196 - 19,4 \approx 176,6$ Wahl: 177

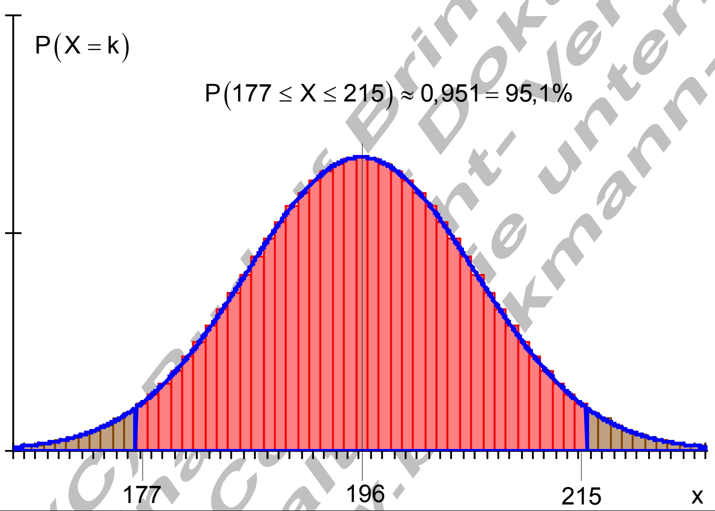
$\mu + r = 196 + 19,4 \approx 215,4$ Wahl: 215

$P(177 \le X \le 215) = P(176,5 \le X \le 215,5)$

$r = 19,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{19,5}{9,899} \Rightarrow r \approx 1,97 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,97$

$P(177 \le X \le 215) \approx \underline{\underline{0,951}}$

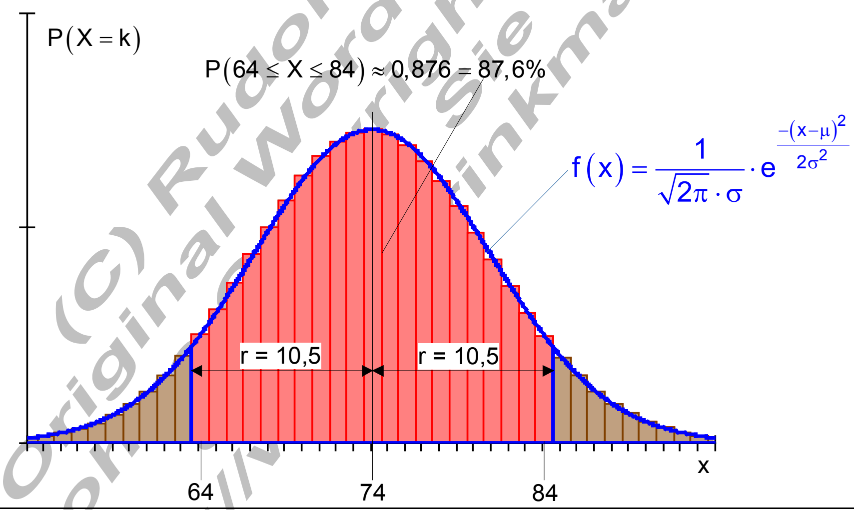
A2 c)



A3	**Aufgabe**	
	Bestimmen Sie folgende Umgebungswahrscheinlichkeiten.	
	a)	$n = 200$ und $p = 0,37$ bestimmen Sie $P(64 \le X \le 84)$
	b)	$n = 300$ und $p = 0,74$ bestimmen Sie $P(210 \le X \le 234)$
	c)	$n = 400$ und $p = 0,17$ bestimmen Sie $P(60 \le X \le 76)$
	d)	$n = 1000$ und $p = 0,28$ bestimmen Sie $P(270 \le X \le 290)$

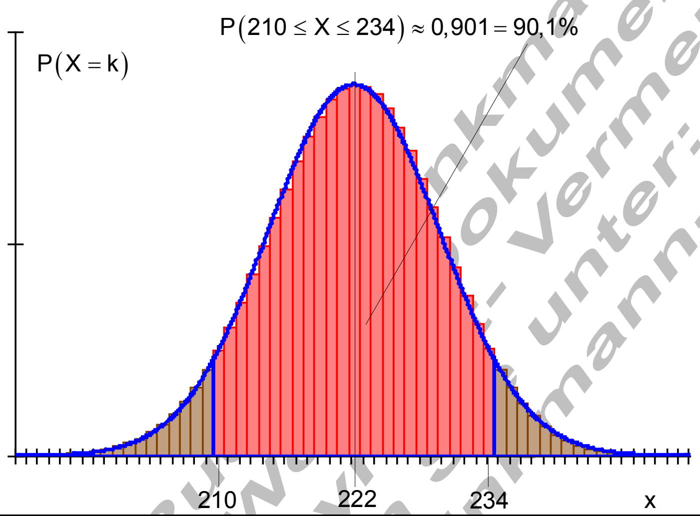
A3	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$n = 200 \qquad p = 0,37 \qquad P(64 \le X \le 84)$ $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,37 = 74$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{74 \cdot 0,63} = \sqrt{46,62} \approx 6,828 > 3$ $[\ldots\{64 \ldots 74 \ldots 84\}\ldots]$ $P(64 \le X \le 84) = P(63,5 \le X \le 84,5)$ $r = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{6,828} \Rightarrow r \approx 1,54 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,54$ $P(64 \le X \le 84) \approx \underline{\underline{0,876}}$

A3 a)

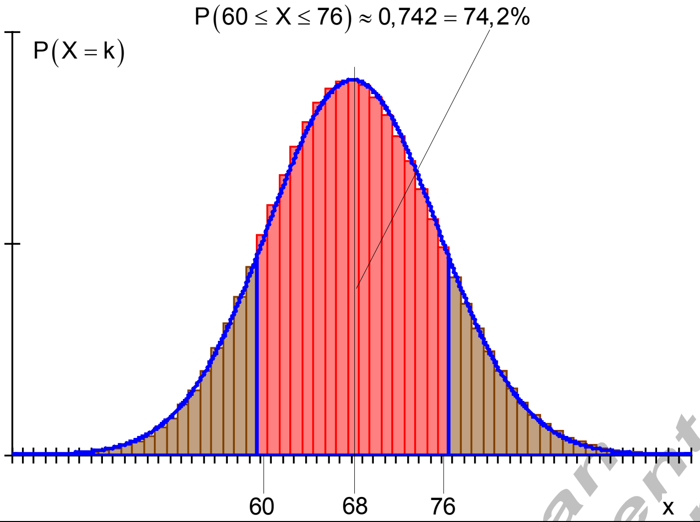


A3	**Ausführliche Lösung**
b)	$n = 300 \qquad p = 0{,}74 \qquad P(210 \le X \le 234)$ $\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}74 = 222$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{222 \cdot 0{,}26} = \sqrt{57{,}72} \approx 7{,}597 > 3$ $[\ldots\{210\ldots222\ldots234\}\ldots]$ $P(210 \le X \le 234) = P(209{,}5 \le X \le 234{,}5)$ $r = 12{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{12{,}5}{7{,}597} \Rightarrow r \approx 1{,}65 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1{,}65$ $P(210 \le X \le 234) \approx \underline{\underline{0{,}901}}$

A3	b)



A3	**Ausführliche Lösung**
c)	$n = 400 \qquad p = 0{,}17 \qquad P(60 \le X \le 76)$ $\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0{,}17 = 68$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{68 \cdot 0{,}83} = \sqrt{56{,}44} \approx 7{,}513 > 3$ $[\ldots\{60\ldots68\ldots76\}\ldots]$ $P(60 \le X \le 76) = P(59{,}5 \le X \le 76{,}5)$ $r = 8{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{8{,}5}{7{,}513} \Rightarrow r \approx 1{,}13 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1{,}13$ $P(60 \le X \le 76) \approx \underline{\underline{0{,}742}}$

A3	c)	

A3	**Ausführliche Lösung**

d)

$n = 1000 \qquad p = 0{,}28 \qquad P(270 \le X \le 290)$

$\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}28 = 280$

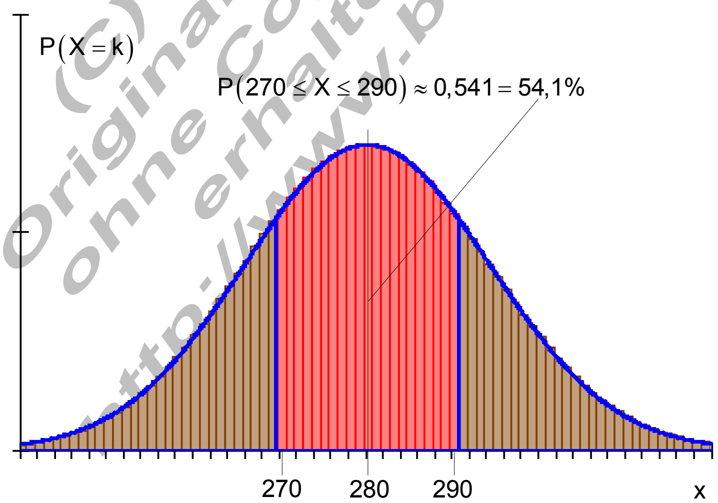
$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{280 \cdot 0{,}72} = \sqrt{201{,}6} \approx 14{,}199 > 3$

$[\ldots\{270\ldots 280 \ldots 290\}\ldots]$

$P(270 \le X \le 290) = P(269{,}5 \le X \le 290{,}5)$

$r = 10{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10{,}5}{14{,}199} \Rightarrow r \approx 0{,}74 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0{,}74$

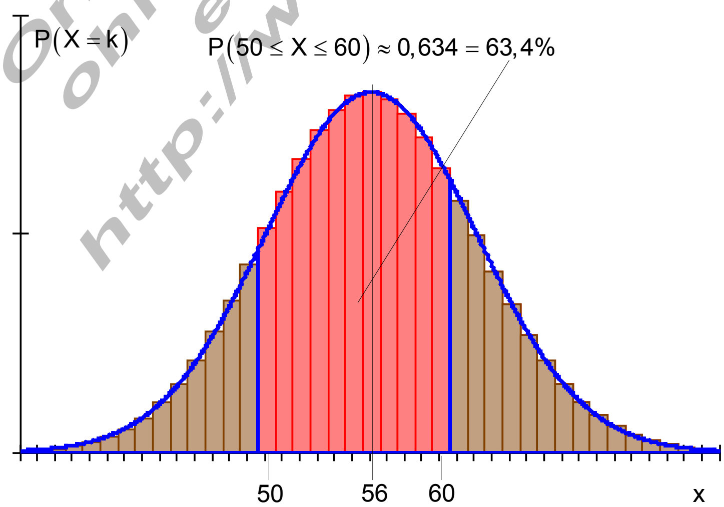
$P(270 \le X \le 290) \approx \underline{\underline{0{,}541}}$

A3	d)	

A4	**Aufgabe**	
	Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender asymmetrischen Umgebungen.	
	a)	$n = 160$ und $p = 0{,}35$ bestimmen Sie $P(50 \le X \le 60)$
	b)	$n = 250$ und $p = 0{,}62$ bestimmen Sie $P(150 \le X \le 165)$
	c)	$n = 270$ und $p = \frac{5}{6}$ bestimmen Sie $P(221 \le X \le 240)$

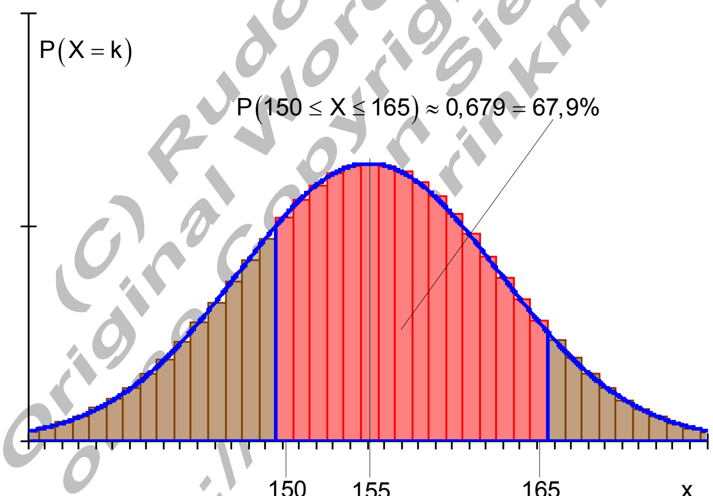
A4	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$n = 160 \quad p = 0{,}35 \quad P(50 \le X \le 60)$
		$\mu = n \cdot p = 160 \cdot 0{,}35 = 56$
		$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{56 \cdot 0{,}65} = \sqrt{36{,}4} \approx 6{,}033 > 3$
		$[\ldots\{50,51\}\ \{52\ldots56\ldots60\}\{61,62\}\ldots]$
		$P(50 \le X \le 60) = \frac{1}{2}\left[P(50 \le X \le 62) + P(52 \le X \le 60)\right]$
		$P(50 \le X \le 62) = P(49{,}5 \le X \le 62{,}5)$
		$r = 6{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{6{,}5}{6{,}033} \Rightarrow r \approx 1{,}08 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1{,}08$
		$P(50 \le X \le 62) \approx 0{,}720$
		$P(52 \le X \le 60) = P(51{,}5 \le X \le 60{,}5)$
		$r = 4{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{4{,}5}{6{,}033} \Rightarrow r \approx 0{,}75 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0{,}75$
		$P(52 \le X \le 60) \approx 0{,}547$
		$P(50 \le X \le 60) = \frac{1}{2}(0{,}720 + 0{,}547) \approx \underline{\underline{0{,}634}}$

A4 a)



A4	**Ausführliche Lösung**
b)	$n = 250 \qquad p = 0{,}62 \qquad P(150 \le X \le 165)$ $\mu = n \cdot p = 250 \cdot 0{,}62 = 155$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{155 \cdot 0{,}38} = \sqrt{58{,}9} \approx 7{,}675 > 3$ $[\ldots\{145\ldots149\}\ \{150\ldots155\ldots160\}\ \{161\ldots165\}\ldots]$ $P(150 \le X \le 165) = \frac{1}{2}\left[P(145 \le X \le 165) + P(150 \le X \le 160)\right]$ $P(145 \le X \le 165) = P(144{,}5 \le X \le 165{,}5)$ $r = 10{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10{,}5}{7{,}675} \Rightarrow r \approx 1{,}37 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1{,}37$ $P(145 \le X \le 165) \approx 0{,}829$ $P(150 \le X \le 160) = P(149{,}5 \le X \le 160{,}5)$ $r = 5{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{5{,}5}{7{,}675} \Rightarrow r \approx 0{,}72 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0{,}72$ $P(150 \le X \le 160) \approx 0{,}528$ $P(150 \le X \le 165) = \frac{1}{2}(0{,}829 + 0{,}528) \approx \underline{\underline{0{,}679}}$

A4 b)



A4 **Ausführliche Lösung**

c)

$n = 270 \qquad p = \frac{5}{6} \qquad P(221 \le X \le 240)$

$\mu = n \cdot p = 270 \cdot \frac{5}{6} = 225$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{225 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt{37{,}5} \approx 6{,}124 > 3$

$[\ldots\{210\ldots220\}\ \{221\ldots225\ldots229\}\ \{230\ \ldots240\}\ldots]$

$P(221 \le X \le 240) = \frac{1}{2}\left[P(210 \le X \le 240) + P(221 \le X \le 229)\right]$

$P(210 \le X \le 240) = P(209{,}5 \le X \le 240{,}5)$

$r = 15{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{15{,}5}{6{,}124} \Rightarrow r \approx 2{,}53 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 2{,}53$

$P(210 \le X \le 240) \approx 0{,}989$

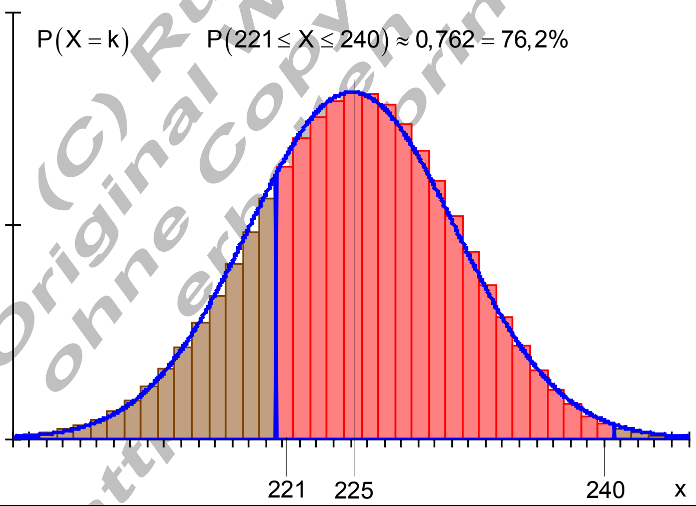
$P(221 \le X \le 229) = P(220{,}5 \le X \le 229{,}5)$

$r = 4{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{4{,}5}{6{,}124} \Rightarrow r \approx 0{,}73 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0{,}73$

$P(221 \le X \le 229) \approx 0{,}535$

$P(221 \le X \le 240) = \frac{1}{2}(0{,}989 + 0{,}535) \approx \underline{\underline{0{,}762}}$

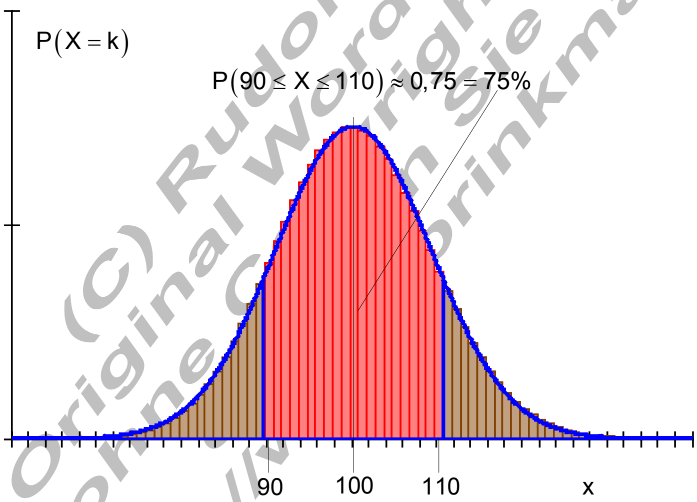
A4 c)



A5	**Aufgabe**
	Ein Würfel wird 600 mal geworfen. (Ereignis die Zahl 6, p = 1/6) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man mindestens 90- mal, höchstens 110- mal die Augenzahl 6?

A5	**Ausführliche Lösung**
	$n = 600 \qquad p = 1/6 \qquad P(90 \le X \le 110)$ $\mu = n \cdot p = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{100 \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{83,\overline{3}} \approx 9{,}129 > 3$ $[...\{90...100...110\}...]$ $P(90 \le X \le 110) = P(89{,}5 \le X \le 110{,}5)$ $r = 10{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10{,}5}{9{,}129} \Rightarrow r \approx 1{,}15 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1{,}15$ $P(90 \le X \le 110) \approx \underline{\underline{0{,}750}}$ Die Wahrscheinlichkeit bei 600 Würfen mindestens 90- mal und höchstens 110- mal die 6 zu werfen ist 0,750.

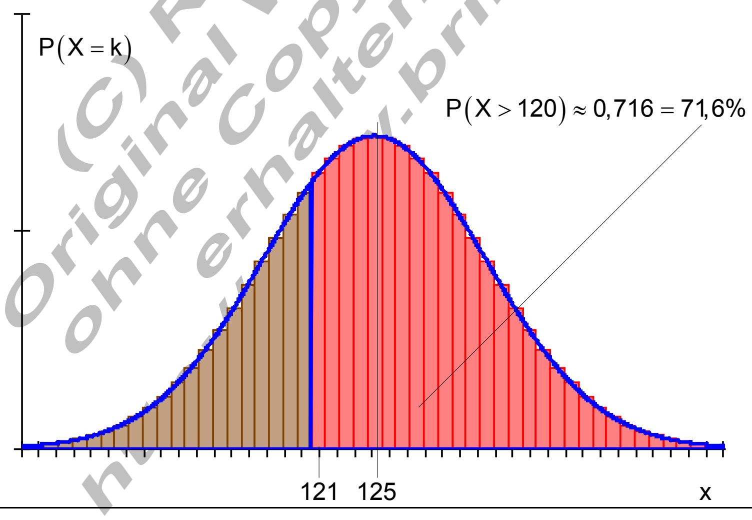
A5



A6	**Aufgabe**	
	Eine Münze wird 250 mal geworfen. Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten.	
	a)	Es erscheint mehr als 120 mal Kopf.
	b)	Es erscheint weniger als 128 mal Kopf.
	c)	Mindestens 115 mal und höchstens 135 erscheint der Kopf.

A6	**Ausführliche Lösung**
a)	$n = 250 \quad p = 0{,}5 \quad P(X > 120) = P(X \geq 121)$
	$\mu = n \cdot p = 250 \cdot 0{,}5 = 125$
	$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{125 \cdot 0{,}5} = \sqrt{62{,}5} \approx 7{,}906 > 3$
	$[\ldots\{121\ldots125\ldots129\}\{130\ldots250\}]$
	$P(X \geq 121) = \frac{1}{2}\left[1 + P(121 \leq X \leq 129)\right]$
	$P(121 \leq X \leq 129) = P(120{,}5 \leq X \leq 129{,}5)$
	$r = 4{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{4{,}5}{7{,}906} \Rightarrow r \approx 0{,}57 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0{,}57$
	$P(121 \leq X \leq 129) \approx 0{,}431$
	$P(X > 120) \approx \frac{1}{2}[1 + 0{,}431] \approx \underline{\underline{0{,}716}}$
	Die Wahrscheinlichkeit bei 250 Münzwürfen mehr als 120 mal Kopf zu erhalten ist 0,716

A6 a)



A6 Ausführliche Lösung

b) $n = 250 \qquad p = 0{,}5 \qquad P(X < 128) = P(X \le 127)$

$\mu = n \cdot p = 250 \cdot 0{,}5 = 125$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{125 \cdot 0{,}5} = \sqrt{62{,}5} \approx 7{,}906 > 3$

$[\{0 \ldots 122\}\{123 \ldots 125 \ldots 127\} \ldots]$

$P(X \le 127) = \frac{1}{2}\left[1 + P(123 \le X \le 127)\right]$

$P(123 \le X \le 127) = P(122{,}5 \le X \le 127{,}5)$

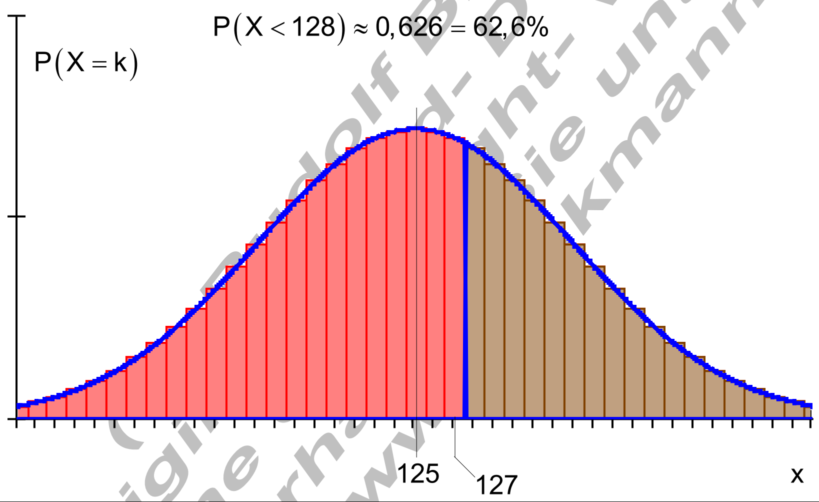
$r = 2{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{2{,}5}{7{,}906} \Rightarrow r \approx 0{,}32 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0{,}32$

$P(123 \le X \le 127) \approx 0{,}251$

$P(X < 128) \approx \frac{1}{2}[1 + 0{,}251] \approx \underline{\underline{0{,}626}}$

Die Wahrscheinlichkeit bei 250 Münzwürfen weniger als 128 mal Kopf zu erhalten ist 0,626.

A6 b)



A6 Ausführliche Lösung

c) $n = 250 \qquad p = 0{,}5 \qquad P(115 \le X \le 135)$

$\mu = n \cdot p = 250 \cdot 0{,}5 = 125$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{125 \cdot 0{,}5} = \sqrt{62{,}5} \approx 7{,}906 > 3$

$[\ldots\{64 \ldots 74 \ldots 84\} \ldots]$

$P(115 \le X \le 135) = P(114{,}5 \le X \le 135{,}5)$

$r = 10{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10{,}5}{7{,}906} \Rightarrow r \approx 1{,}33 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1{,}33$

$P(115 \le X \le 135) \approx \underline{\underline{0{,}816}}$

Die Wahrscheinlichkeit bei 250 Münzwürfen mindestens115 und höchstens 135 mal Kopf zu erhalten ist 0,816.

A6	c)