

Lösungen zur Binomialverteilung III

Ausführliche Lösungen:

A1	Aufgabe
	Eine Münze wird 100 mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf und Zahl ist jeweils $p = 0,5$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
	A: Es wird genau 52 mal Kopf geworfen.
	B: Mindestens 43 mal wird Kopf geworfen.
	C: Mindestens 38 mal und höchstens 56 mal wird Kopf geworfen.
	D: Weniger als 45 mal wird Kopf geworfen.
	E: Mindestens 40 mal und höchstens 60 mal wird Kopf geworfen.
	F: Mehr als 47 mal wird Kopf geworfen.
	G: Mindestens 45 mal und höchstens 55 mal wird Kopf geworfen.
	H: Es wird genau 50 mal die Zahl geworfen.

A1	Ausführliche Lösungen																																																																																				
	Kumulierte Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0,5$																																																																																				
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>k</th> <th>$P(X \leq k)$</th> <th>k</th> <th>$P(X \leq k)$</th> <th>k</th> <th>$P(X \leq k)$</th> <th>k</th> <th>$P(X \leq k)$</th> <th>k</th> <th>$P(X \leq k)$</th> <th>k</th> <th>$P(X \leq k)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>32</td> <td>0,000</td> <td>38</td> <td>0,010</td> <td>44</td> <td>0,136</td> <td>50</td> <td>0,540</td> <td>56</td> <td>0,903</td> <td>62</td> <td>0,994</td> </tr> <tr> <td>33</td> <td>0,000</td> <td>39</td> <td>0,018</td> <td>45</td> <td>0,184</td> <td>51</td> <td>0,618</td> <td>57</td> <td>0,933</td> <td>63</td> <td>0,997</td> </tr> <tr> <td>34</td> <td>0,001</td> <td>40</td> <td>0,028</td> <td>46</td> <td>0,242</td> <td>52</td> <td>0,691</td> <td>58</td> <td>0,956</td> <td>64</td> <td>0,998</td> </tr> <tr> <td>35</td> <td>0,002</td> <td>41</td> <td>0,044</td> <td>47</td> <td>0,309</td> <td>53</td> <td>0,758</td> <td>59</td> <td>0,972</td> <td>65</td> <td>0,999</td> </tr> <tr> <td>36</td> <td>0,003</td> <td>42</td> <td>0,067</td> <td>48</td> <td>0,382</td> <td>54</td> <td>0,816</td> <td>60</td> <td>0,982</td> <td>66</td> <td>1,000</td> </tr> <tr> <td>37</td> <td>0,006</td> <td>43</td> <td>0,097</td> <td>49</td> <td>0,460</td> <td>55</td> <td>0,864</td> <td>61</td> <td>0,990</td> <td>67</td> <td>1,000</td> </tr> </tbody> </table>	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	32	0,000	38	0,010	44	0,136	50	0,540	56	0,903	62	0,994	33	0,000	39	0,018	45	0,184	51	0,618	57	0,933	63	0,997	34	0,001	40	0,028	46	0,242	52	0,691	58	0,956	64	0,998	35	0,002	41	0,044	47	0,309	53	0,758	59	0,972	65	0,999	36	0,003	42	0,067	48	0,382	54	0,816	60	0,982	66	1,000	37	0,006	43	0,097	49	0,460	55	0,864	61	0,990	67	1,000
k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$																																																																										
32	0,000	38	0,010	44	0,136	50	0,540	56	0,903	62	0,994																																																																										
33	0,000	39	0,018	45	0,184	51	0,618	57	0,933	63	0,997																																																																										
34	0,001	40	0,028	46	0,242	52	0,691	58	0,956	64	0,998																																																																										
35	0,002	41	0,044	47	0,309	53	0,758	59	0,972	65	0,999																																																																										
36	0,003	42	0,067	48	0,382	54	0,816	60	0,982	66	1,000																																																																										
37	0,006	43	0,097	49	0,460	55	0,864	61	0,990	67	1,000																																																																										

A1	A: Genau 52 mal Kopf $\{0, \dots, 51, \mathbf{52}, 53, \dots, 100\}$ $P(A) = P(X = 52) = P(X \leq 52) - P(X \leq 51) = 0,691 - 0,618 = \underline{\underline{0,073}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, genau 52 mal Kopf zu werfen ist 0,073.
----	--

A1	B: Mindestens 43 mal Kopf $\{0, \dots, 42, \mathbf{43}, \mathbf{44}, \mathbf{45}, \dots, 100\}$ $P(B) = P(X \geq 43) = P(X \leq 100) - P(X \leq 42) = 1 - 0,067 = \underline{\underline{0,933}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 43 mal Kopf zu werfen ist 0,933.
----	--

A1	C: Mindestens 38 mal und höchstens 56 mal Kopf $\{0, \dots, 37, \mathbf{38}, \dots, \mathbf{56}, 57, \dots, 100\}$ $P(C) = P(38 \leq X \leq 56) = P(X \leq 56) - P(X \leq 37) = 0,903 - 0,006 = \underline{\underline{0,897}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 38 mal und höchstens 56 mal Kopf zu werfen ist 0,897.
----	--

A1	D: Weniger als 45 mal Kopf $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{44}, 45, 46, \dots, 100\}$ $P(D) = P(X \leq 44) = \underline{\underline{0,136}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, weniger als 45 mal Kopf zu werfen ist 0,136.
----	--

A1	E:	Mindestens 40 mal und höchstens 60 mal Kopf $\{0, \dots, 39, \mathbf{40}, \dots, \mathbf{60}, 61, \dots, 100\}$ $P(E) = P(40 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 39) = 0,982 - 0,018 = \underline{\underline{0,964}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 40 mal und höchstens 60 mal Kopf zu werfen ist 0,964.
----	----	---

A1	F:	Mehr als 47 mal Kopf $\{0, \dots, 47, \mathbf{48}, \mathbf{49}, \mathbf{50}, \dots, \mathbf{100}\}$ $P(F) = P(X > 47) = P(X \geq 48) = P(X \leq 100) - P(X \leq 47) = 1 - 0,309 = \underline{\underline{0,691}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, mehr als 47 mal Kopf zu werfen ist 0,691.
----	----	--

A1	G:	Mindestens 45 mal und höchstens 55 mal Kopf $\{0, \dots, 44, \mathbf{45}, \dots, \mathbf{55}, 56, \dots, 100\}$ $P(G) = P(45 \leq X \leq 55) = P(X \leq 55) - P(X \leq 44) = 0,864 - 0,136 = \underline{\underline{0,728}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 45 mal und höchstens 55 mal Kopf zu werfen ist 0,728.
----	----	--

A1	H:	Genau 50 mal Kopf $\{0, \dots, 49, \mathbf{50}, 51, \dots, 100\}$ $P(H) = P(X = 50) = P(X \leq 50) - P(X \leq 49) = 0,540 - 0,460 = \underline{\underline{0,08}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, genau 50 mal Kopf zu werfen ist 0,08.
----	----	---

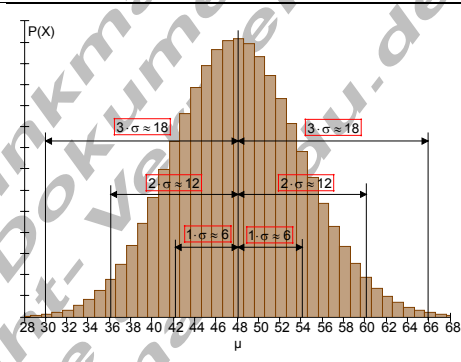
A2	Aufgabe	
	In 50% aller Haushalte in Deutschland sind zwei Autos vorhanden. Für eine Befragung werden 100 Haushalte zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:	
	A:	In weniger als 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden.
	B:	In genau 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden.
	C:	In mehr als 40 Haushalten sind zwei Autos vorhanden.
	D:	In mindestens 40 und höchstens 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden.

A2	Ausführliche Lösungen	
	A:	In weniger als 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden. $\{0, 1, \dots, \mathbf{59}, 60, \dots, 100\}$ $P(A) = P(X \leq 59) = \underline{\underline{0,972}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in weniger als 60 Haushalten zwei Autos vorhanden sind, ist 0,972.

A2	B:	In genau 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden $\{0, \dots, 59, \mathbf{60}, 61, \dots, 100\}$ $P(B) = P(X = 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 59) = 0,982 - 0,972 = \underline{\underline{0,01}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in genau 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden sind, ist 0,01.
----	----	---

A2	C:	In mehr als 40 Haushalten sind zwei Autos vorhanden $\{0, \dots, 40, \mathbf{41}, \mathbf{42}, \dots, \mathbf{100}\}$ $P(C) = P(X > 40) = P(X \geq 41) = P(X \leq 100) - P(X \leq 40) = 1 - 0,028 = \underline{\underline{0,972}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in mehr als 40 Haushalten sind zwei Autos vorhanden sind, ist 0,972.
----	----	---

A2	D:	In mindestens 40 und höchstens 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden $\{0, \dots, 39, \mathbf{40}, \dots, \mathbf{60}, 61, \dots, 100\}$ $P(E) = P(40 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 39) = 0,982 - 0,018 = \underline{\underline{0,964}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in mindestens 40 und höchstens 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden sind, ist 0,964.
----	----	--

A3	Aufgabe	Nebenstehende Grafik zeigt eine Binomialverteilung mit verschiedenen Sigma- Umgebungen.
	a)	Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung.
	b)	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Sigma -Umgebungen: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$
		 <p>Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0,24$.</p>

A3	Ausführliche Lösungen	
	a)	
		Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0,24$ Erwartungswert : $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,24 = \underline{\underline{48}}$ Standardabweichung : $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,24 \cdot 0,76} \approx \underline{\underline{6,04}}$

A3	b)	Wahrscheinlichkeit der einfachen Sigma- Umgebung. Zu bestimmen ist $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - \sigma \approx 48 - 6 = 42$ und $\mu + \sigma \approx 48 + 6 = 54$ und damit $P(42 \leq X \leq 54) = P(X \leq 54) - P(X \leq 41) = 0,859 - 0,140 = \underline{\underline{0,719}}$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,719 (71,9%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [42 ; 54]. Das entspricht etwa der einfachen Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.
----	----	---

A3	<p>b) Wahrscheinlichkeit der doppelten Sigma- Umgebung. Zu bestimmen ist $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - 2\sigma \approx 48 - 12 = 36$ und $\mu + 2\sigma \approx 48 + 12 = 60$ und damit $P(36 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 35) = 0,979 - 0,017 = \underline{0,962}$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,962 (96,2%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [36 ; 60]. Das entspricht etwa der doppelten Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.</p>
----	---

A3	<p>b) Wahrscheinlichkeit der dreifachen Sigma- Umgebung. Zu bestimmen ist $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$ mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - 3\sigma \approx 48 - 18 = 30$ und $\mu + 3\sigma \approx 48 + 18 = 66$ und damit $P(30 \leq X \leq 66) = P(X \leq 66) - P(X \leq 30) = 0,998 - 0,001 = \underline{0,997}$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,997 (99,7%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [30 ; 66]. Das entspricht etwa der dreifachen Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.</p>
----	---

A4	<p>Aufgabe</p> <p>Nebenstehende Grafik zeigt eine Binomialverteilung mit verschiedenen Prozent- Umgebungsradien.</p> <p>Wie groß ist jeweils der Radius, der zu einer 90%, 95% bzw. 99% Umgebung gehört?</p> <p>Drücken Sie den Radius in Einheiten von Sigma aus.</p> $\frac{r}{\sigma} = z \Rightarrow r = z \cdot \sigma$	<p>Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0,24$.</p>
----	---	---

A4	Ausführliche Lösung
Liegt für die Binomialverteilung eine Tabelle mit den kumulierten Wahrscheinlichkeiten vor, lässt sich das Problem durch Einschachtelung lösen. Für die zwei Sigma- Umgebung, (im obigen Beispiel $r = 12$), war die Umgebungswahrscheinlichkeit etwa 96,2%.	

Kumulierte Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0,24$

k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)
28	0,000	35	0,017	42	0,182	49	0,603	56	0,918	63	0,994
29	0,001	36	0,026	43	0,230	50	0,665	57	0,940	64	0,996
30	0,001	37	0,038	44	0,284	51	0,722	58	0,957	65	0,998
31	0,002	38	0,055	45	0,344	52	0,774	59	0,969	66	0,998
32	0,004	39	0,077	46	0,407	53	0,819	60	0,979	67	0,999
33	0,007	40	0,106	47	0,473	54	0,859	61	0,986	68	0,999
34	0,011	41	0,140	48	0,539	55	0,892	62	0,990	69	1,000

A4	<p>Für die 90% Wahrscheinlichkeit ist der Umgebungsradius geringer. Ansatz mit $r = 10$.</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th>μ</th> <th>r</th> <th>$\mu - r \leq X \leq \mu + r$</th> <th>$P(X \leq \mu + r) - P(X \leq \mu - r - 1)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>48</td> <td>10</td> <td>$38 \leq X \leq 58$</td> <td>$0,957 - 0,038 = 0,919$</td> </tr> <tr> <td>48</td> <td>9</td> <td>$39 \leq X \leq 57$</td> <td>$0,940 - 0,055 = 0,885$</td> </tr> </tbody> </table> <p>Der gesuchte Radius liegt zwischen den Werten 9 und 10. Da es sich bei der Binomialverteilung um eine diskrete Verteilung handelt, muss man sich für den Radius entscheiden, der der gewünschten Wahrscheinlichkeit am nächsten liegt. In diesem Fall ist das der Radius $r = 9$. Teilt man diesen Wert durch Sigma, dann lässt sich der Radius als vielfaches von Sigma darstellen.</p> $\frac{r}{\sigma} = \frac{9}{6,04} \approx 1,49 \Rightarrow r \approx 1,49 \sigma$ <p>In einer $1,49 \sigma$ Umgebung liegen etwa 88,5% aller Erfolge.</p>	μ	r	$\mu - r \leq X \leq \mu + r$	$P(X \leq \mu + r) - P(X \leq \mu - r - 1)$	48	10	$38 \leq X \leq 58$	$0,957 - 0,038 = 0,919$	48	9	$39 \leq X \leq 57$	$0,940 - 0,055 = 0,885$
μ	r	$\mu - r \leq X \leq \mu + r$	$P(X \leq \mu + r) - P(X \leq \mu - r - 1)$										
48	10	$38 \leq X \leq 58$	$0,957 - 0,038 = 0,919$										
48	9	$39 \leq X \leq 57$	$0,940 - 0,055 = 0,885$										

A4	<p>Für die 95% Wahrscheinlichkeit wird der Ansatz mit $r = 12$ versucht.</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th>μ</th> <th>r</th> <th>$\mu - r \leq X \leq \mu + r$</th> <th>$P(X \leq \mu + r) - P(X \leq \mu - r - 1)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>48</td> <td>12</td> <td>$36 \leq X \leq 60$</td> <td>$0,979 - 0,017 = 0,962$</td> </tr> <tr> <td>48</td> <td>11</td> <td>$37 \leq X \leq 59$</td> <td>$0,969 - 0,026 = 0,943$</td> </tr> </tbody> </table> <p>Der gesuchte Radius liegt zwischen den Werten 11 und 12. Der Radius $r = 11$ liegt der gewünschten Wahrscheinlichkeit am nächsten.</p> $\frac{r}{\sigma} = \frac{11}{6,04} \approx 1,82 \Rightarrow r \approx 1,82 \sigma$ <p>In einer $1,82 \sigma$ Umgebung liegen etwa 94,3% aller Erfolge.</p>	μ	r	$\mu - r \leq X \leq \mu + r$	$P(X \leq \mu + r) - P(X \leq \mu - r - 1)$	48	12	$36 \leq X \leq 60$	$0,979 - 0,017 = 0,962$	48	11	$37 \leq X \leq 59$	$0,969 - 0,026 = 0,943$
μ	r	$\mu - r \leq X \leq \mu + r$	$P(X \leq \mu + r) - P(X \leq \mu - r - 1)$										
48	12	$36 \leq X \leq 60$	$0,979 - 0,017 = 0,962$										
48	11	$37 \leq X \leq 59$	$0,969 - 0,026 = 0,943$										

A4	Für die 99% Wahrscheinlichkeit wird der Ansatz mit $r = 14$ versucht.		
	μ	r	$\mu - r \leq X \leq \mu + r$
	48	14	$34 \leq X \leq 62$
	48	15	$33 \leq X \leq 63$
			$P(X \leq \mu + r) - P(X \leq \mu - r - 1)$
			$0,990 - 0,007 = 0,983$
			$0,994 - 0,004 = 0,99$
Der gesuchte Radius hat den Wert $r = 15$			
$\frac{r}{\sigma} = \frac{15}{6,04} \approx 2,48 \Rightarrow r \approx 2,48 \sigma$			
In einer $2,48 \sigma$ Umgebung liegen etwa 99% aller Erfolge.			

(C) Rudolf Brinkmann
 Original Word-Dokumente
 ohne Copyright-Vermerk
 erhalten Sie unter:
<http://www.brinkmann-du.de>