Lösungen zur Binomialverteilung II

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Eine Familie hat 6 Kinder. Die Wahrscheinlichkeit ein Mädchen zu gebären betrage p = 0,5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, das unter den 6 Kindern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 Mädchen sind und zeichnen Sie das Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:	
	A:	Genau die Hälfte der Kinder sind Mädchen.
	B:	Höchstens die Hälfte der Kinder sind Mädchen.
	C:	Mindestens die Hälfte der Kinder sind Mädchen.

A1 Ausführliche Lösung

Das Problem kann als 6- stufiger Bernoulli- Versuch betrachtet werden mit n = 6 und p = 0,5. Gesucht ist P(X = k) für k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

$$P(X=0)=\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=1\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{64}=\underline{\underline{0,015625}}$$

$$P(X=1)=\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=6\cdot\frac{1}{64}=\frac{6}{64}=\underline{\underline{0,09375}}$$

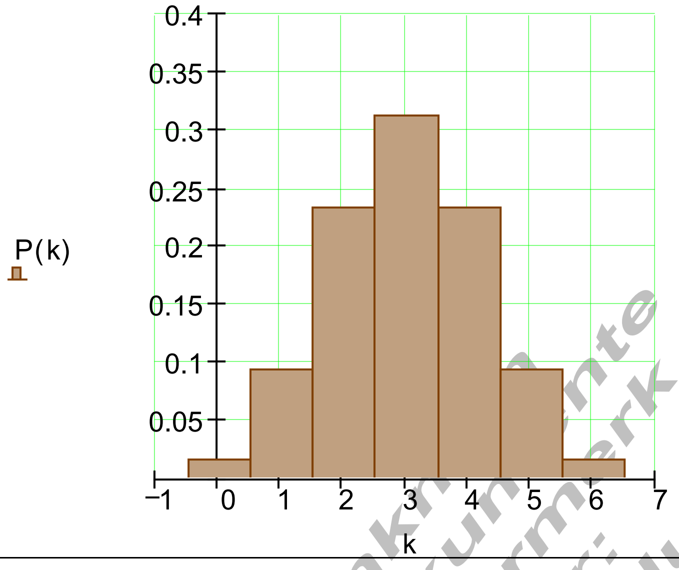
$$P(X=2)=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=15\cdot\frac{1}{64}=\frac{15}{64}=\underline{\underline{0,234375}}$$

$$P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=20\cdot\frac{1}{64}=\underline{\underline{0,3125}}$$

$$P(X=4)=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=15\cdot\frac{1}{64}=\frac{15}{64}=\underline{\underline{0,234375}}$$

$$P(X=5)=\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=6\cdot\frac{1}{64}=\frac{6}{64}=\underline{\underline{0,09375}}$$

$$P(X=6)=\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=1\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{64}=\underline{\underline{0,015625}}$$

A1	**Ausführliche Lösung**
	Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung 

A1	**Ausführliche Lösung**
	$P(A) = P(X = 3) = \underline{\underline{0{,}3125}}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern genau drei Mädchen sind. $P(B) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ $= \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{15}{64} + \frac{20}{64} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} = \underline{\underline{0{,}65625}}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern höchstens drei Mädchen sind. $P(C) = P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$ $= \frac{20}{64} + \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} = \underline{\underline{0{,}65625}}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern mindestens drei Mädchen sind.

A2	**Aufgabe**	
	Eine Münze wird 5 mal geworfen. p sei 0,5.	
	a)	Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X: Anzahl der Wappen.
	b)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man (1) höchstens 3 mal Wappen? (2) weniger als 3 mal Wappen? (3) mindestens 1 mal Wappen? (4) mehr als einmal Wappen?

A2 Ausführliche Lösung

Das Problem kann als 5- stufiger Bernoulli- Versuch betrachtet werden mit n = 5 und p = 0,5.

a) Gesucht ist P(X = k) für k = 0, 1, 2, 3, 4, 5

k	$P(X=k)$
0	$\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0}=1\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$
1	$\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}=\frac{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}$
2	$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}$
3	$\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}$
4	$\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}$
5	$\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-5}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot1=1\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

A2 Ausführliche Lösung

b)

(1) Höchstens 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X\le3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0,8125}}$$

(2) Weniger als 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X<3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}=\frac{16}{32}=\underline{\underline{0,5}}$$

(3) Mindestens 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X\ge1)=\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=\underline{\underline{0,96875}}$$

(4) Mehr als 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X>1)=\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0,8125}}$$

A3 Aufgabe

Eine Münze wird 20 mal geworfen.

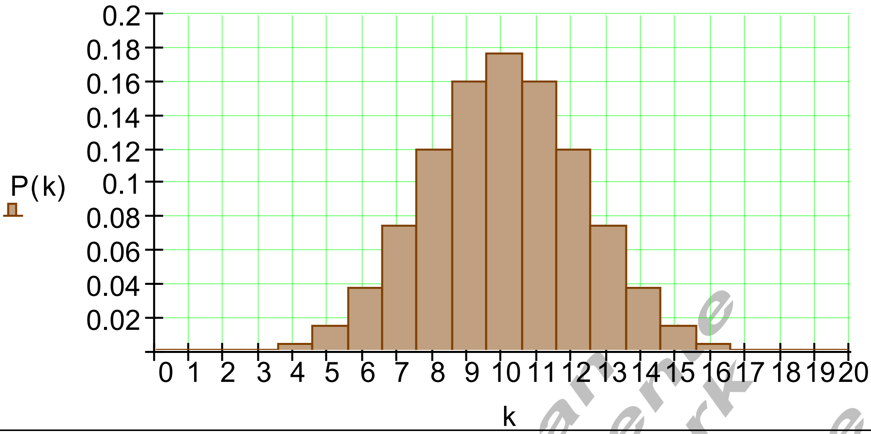
a) Zeichnen Sie das Histogramm der Binomialverteilung.

b) Zu bestimmen sind die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:
- (1) Genau 10 mal Wappen.
- (2) Höchstens 15 mal Wappen.
- (3) Mindestens 7 mal Wappen.
- (4) Mindestens 6 und höchstens 16 mal Wappen.

c) Zeichnen Sie das Histogramm der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

A3 Ausführliche Lösung

a) Histogramm der Binomialverteilung für n = 20 und p = 0,5



A3 Ausführliche Lösung

b) (1) Die Wahrscheinlichkeit P(X = 10) kann aus der Tabelle, bzw. aus dem Histogramm abgelesen werden.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis 10 mal Wappen beträgt:

$P(X=10)\approx \underline{\underline{0{,}176}}$

A3 Ausführliche Lösung

b) (2) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: Höchstens 15 mal Wappen, kann nicht unmittelbar abgelesen werden. Dazu müssen die Tabellenwerte der Wahrscheinlichkeiten aufaddiert werden.
P(X = 0) + P(X = 1) + ... + P(X = 15)
Hat man jedoch eine Tabelle in der die Wahrscheinlichkeiten bereits aufaddiert wurden, also eine kumulierte Tabelle, dann kann man die Wahrscheinlichkeit für E daraus sofort ablesen.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$	0	0	0	0,001	0.005	0,015	0,037	0,074	0,12	0,16	0,176
$P(X\le k)$	0	0	0	0,001	0,006	0,021	0,058	0,132	0,252	0,412	0,588

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$P(X=k)$	0,16	0,12	0,074	0,037	0,015	0,005	0,001	0	0	0	
$P(X\le k)$	0,748	0,868	0,942	0,979	0,994	0,999	1	1	1	1	

Bemerkung: Für k < 3 ist die kumulierte Wahrscheinlichkeit natürlich nicht Null. Ebenso sind die Werte für k < 20 auch nicht 1. Sie unterscheiden sich aber kaum noch von diesen Werten, so dass man in den meisten Fällen für praktische Berechnungen die gerundeten Tabellenwerte verwenden kann.

Höchstens 15 mal bedeutet $P(X\le 15)\approx \underline{\underline{0{,}994}}$

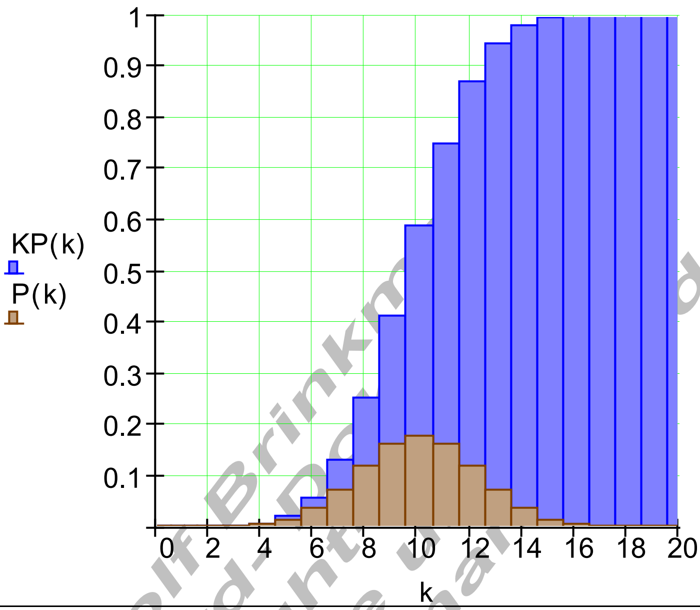
A3 Ausführliche Lösung

b) (3) Mindestens 7 mal bedeutet:

$P(X\ge 7)=P(X=20)-P(X\le 6)\approx 1-0{,}058=\underline{\underline{0{,}942}}$

A3	**Ausführliche Lösung**		
	b)	(4)	Mindestens 6 mal und höchstens 16 mal bedeutet $P(6,7,...16) = P(X \leq 16) - P(X \leq 5) \approx 0{,}999 - 0{,}021 = \underline{\underline{0{,}978}}$

A3	**Ausführliche Lösung**	
	c)	Histogramm der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung



A4	**Aufgabe**
	Ein Multiple- Choice- Test besteht aus 50 Aufgaben mit jeweils 5 Antworten, von denen nur jeweils eine richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man durch bloßes Raten folgende Anzahl von Aufgaben richtig beantworten?
	a) Mehr als 20 Aufgaben.
	b) Mindestens 10 und höchstens 20 Aufgaben.
	c) Weniger als 10 Aufgaben.
	d) Genau 15 Aufgaben.

Die Trefferwahrscheinlichkeit pro Aufgabe ist 1/5 = 0,2.

Da diese Wahrscheinlichkeit bei jeder der 50 Aufgaben besteht, kann der Vorgang als 50 stufiger Bernoulliversuch betrachtet werden.

Der Auszug aus der kumulierten Binomialverteilung mit n = 50 und p = 0,2 soll als Hilfestellung genutzt werden.

k	9	10	11	14	15
$P(X \leq k)$	0,444	0,584	0,711	0,939	0,969
k	16	19	20	21	22
$P(X \leq k)$	0,986	0,999	1	1	1

A4	**Ausführliche Lösungen**	
	a)	$P(X \geq 21) = P(X = 50) - P(X \leq 20) = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$ Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten mehr als 20 Aufgaben richtig zu beantworten ist kleiner als 0,001 (0,1%).

A4	b)	$P(10 \le k \le 20) = P(X \le 20) - P(X \le 9) = 1 - 0,444 = \underline{\underline{0,556}}$ Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten mindestens 10 und höchstens 20 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,556 (55,6%).

A4	c)	$P(X \le 9) = \underline{\underline{0,444}}$ direkt aus der Tabelle ablesbar. Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten weniger als 10 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,444 (44,4%).

A4	d)	$P(X = 15) = P(X \le 15) - P(X \le 14) = 0,969 - 0,939 = \underline{\underline{0,03}}$ Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten genau 15 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,03 (3%).