Lösungen zur Binomialverteilung I

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	Ein ***Bernoulli-Experiment*** ist ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat. Die Ergebnisse werden Erfolg (Treffer) oder Misserfolg (kein Treffer) genannt. Die ***Trefferwahrscheinlichkeit*** ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer (p). Eine ***Bernoullikette*** entsteht, wenn dasselbe Bernoulli-Experiment mehrmals nacheinander ausgeführt wird. Die ***Länge einer Bernoullikette*** gibt an, wie oft das einzelne Experiment nacheinander ausgeführt wird.

E2	Ergebnisse	
	a)	Bernoullikette; n = 3; Treffer: 6; p = 1/6.
	b)	Keine Bernoullikette.
	c)	Keine Bernoullikette.
	d)	Bernoullikette; n = 4; Treffer: weiß p = 3/10; Treffer: rot p = 7/10.
	e)	Keine Bernoullikette.
	f)	Bernoullikette; n = 8; Treffer: Zahl 3; p = 0,25.
	g)	Bernoullikette; Treffer: 3; p = 0,25; Kettenlänge maximal 5.

E3	Ergebnisse	
	$P(A) = P(X = 3) = \frac{8}{81} \approx \underline{\underline{0{,}0988}}$	$P(B) = P(X \geq 3) = \frac{1}{9} = \underline{\underline{0{,}\overline{1}}}$
	$P(C) = P(X \leq 1) = \frac{48}{81} \approx \underline{\underline{0{,}5926}}$	$P(D) = P(X \leq 3) = \frac{80}{81} \approx \underline{\underline{0{,}9877}}$

E4	Ergebnis
	$P(A) = P(X = 1) = \underline{\underline{0{,}4096}}\,;\, P(B) = P(X = 0) = \underline{\underline{0{,}32768}}\,;\, P(C) = P(X \geq 2) = \underline{\underline{0{,}26272}}$

E5	Ergebnis	
	$P(A) = P(X = 2) \approx \underline{\underline{0{,}3747}}$	$P(B) = P(X \leq 3) \approx \underline{\underline{0{,}9424}}$

E6	Ergebnis
	Die Münze muss **mindestens 7 mal** geworfen werden, um mit einer Sicherheit von mindestens 99% mindestens einmal Kopf zu erhalten.

E7	Ergebnis
	Man muss **mindestens 13 mal** würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens eine 6 zu werfen.

E8	**Ergebnisse**		
	A:	Man wirft genau 10 mal die 6.	$P(A)=P(X=10)\approx 0{,}137$
	B:	Man wirft mindestens 10 mal die 6.	$P(B)=P(X\geq 10)\approx 0{,}554$
	C:	Man wirft höchstens 10 mal die 6.	$P(C)=P(X\leq 10)\approx 0{,}583$
	D:	Die Anzahl der geworfenen Sechser liegt zwischen 6 und 12 einschließlich.	$P(D)=P(6\leq X\leq 12)\approx 0{,}759$
	E:	Man wirft mehr als 4 und weniger als 15 Sechser.	$P(E)=P(5\leq X\leq 14)\approx 0{,}915$
	F:	Die Augenzahl ist in weniger als 25 Fällen ungerade.	$P(F)=P(X\leq 24)\approx 0{,}078$
	G:	Die Augenzahl ist in mehr als 30 Fällen gerade.	$P(G)=P(X\geq 31)\approx 0{,}449$
	H:	Es treten mehr als 25 und weniger als 35 ungerade Augenzahlen auf.	$P(H)=P(26\leq X\leq 34)\approx 0{,}754$

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**
	Erklären Sie die Begriffe Bernoulli-Experiment, Trefferwahrscheinlichkeit, Bernoullikette und Länge einer Bernoullikette.

A1	**Ausführliche Lösung**
	Ein ***Bernoulli-Experiment*** ist ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat. Die Ergebnisse werden Erfolg (Treffer) oder Misserfolg (kein Treffer) genannt. Die ***Trefferwahrscheinlichkeit*** ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer (p). Eine ***Bernoullikette*** entsteht, wenn dasselbe Bernoulli-Experiment mehrmals nacheinander ausgeführt wird. Die ***Länge einer Bernoullikette*** gibt an, wie oft das einzelne Experiment nacheinander ausgeführt wird. Beispiel: Eine Münze wird 100 mal nacheinander geworfen. Der Münzwurf ist ein Bernoulli-Experiment, es gibt zwei Ergebnisse, Zahl und Kopf. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist $p = 0,5$. Da der Münzwurf 100 mal wiederholt wird, spricht man bei diesem Experiment von einer Bernoullikette. Die Länge dieser Bernoullikette beträgt $n = 100$.

A2	**Aufgabe**	
	Bei welchen der folgenden Zufallsexperimente handelt es sich um Bernoulliketten? Geben Sie, wenn möglich, die Trefferwahrscheinlichkeit p und die Länge n der Bernoullikette an.	
	a)	Ein Würfel wird dreimal geworfen und die Anzahl der Sechsen notiert.
	b)	Ein Würfel wird dreimal geworfen und die Augensumme notiert.
	c)	Aus einer Urne mit 3 weißen und 7 roten Kugeln wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis die erste rote Kugel erscheint.
	d)	Aus einer Urne mit 3 weißen und 7 roten Kugeln wird 4-mal mit Zurücklegen jeweils eine Kugel gezogen.
	e)	Bei einem Glücksrad erscheint in 50% aller Fälle eine 1, in jeweils 25% der Fälle eine 2 bzw. eine 3. Das Rad wird 4-mal gedreht und die Ziffern als 4-stellige Zahl notiert.
	f)	Das Glücksrad aus (e) wird achtmal gedreht. Jedes Mal, wenn die 3 erscheint, erhält man 10 Cent.
	g)	Das Glücksrad aus (e) wird so oft gedreht, bis die 3 erscheint, höchstens jedoch fünfmal.

A2	**Ausführliche Lösungen**	
	a)	Es handelt sich um ***eine Bernoullikette*** der Länge $n = 3$. Als Treffer bezeichnet man das Ereignis 6. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist in jeder Stufe gleich $p = 1/6$.

A2	b)	Es handelt sich um ***keine Bernoullikette***, da es in jeder Stufe 6 verschiedene Ergebnisse geben kann. { 1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }. Für eine Bernoullikette dürften es nur zwei sein.

A2	c)	Es handelt sich um ***keine Bernoullikette***, da die Kugeln nicht zurückgelegt werden und sich dadurch die Wahrscheinlichkeit von Stufe zu Stufe ändert. Für eine Bernoullikette muss die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer in jeder Stufe gleich sein.

A2	d)	Es handelt sich um ***eine Bernoullikette*** der Länge n = 4. Die Wahrscheinlichkeit für Treffer ***weiß*** ist durch das Zurücklegen konstant p = 3/10, für Treffer ***rot*** p = 7/10.

A2	e)	Es handelt sich um ***keine Bernoullikette***, da es in jeder Stufe drei Ergebnisse geben kann { 1 ; 2 ; 3 }. Für eine Bernoullikette darf es nur zwei Ergebnisse pro Stufe geben.

A2	f)	Es handelt sich um ***eine Bernoullikette*** der Länge n = 8. Als Treffer wird die Zahl 3 mit p = 0,25 festgelegt. In jeder Stufe bleibt die Wahrscheinlichkeit konstant.

A2	g)	Es handelt sich um ***eine Bernoullikette*** mit nichtfestgelegter Länge. Als Treffer wird die Zahl 3 mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,25 festgelegt. Die maximale Kettenlänge beträgt 5.

A3	**Aufgabe**			
	Ein Glücksrad hat 3 gleich große Sektoren mit den Symbolen Kreis, Kreuz und Stern. Es wird viermal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?			
	A:	Es tritt dreimal Stern auf.	B:	Es tritt mindestens dreimal Stern auf.
	C:	Es tritt höchstens einmal Stern auf.	D:	Es tritt höchstens dreimal Stern auf.

A3	**Ausführliche Lösungen**	
	A:	$P(A)=P(X=3)=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=4\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{81}\approx\underline{\underline{0,0988}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau dreimal Stern auftritt, ist 0,0988.

A3	B:	$P(B)=P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)$ $=\frac{8}{81}+\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{8}{81}+1\cdot\frac{1}{81}\cdot 1=\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}=\underline{\underline{0,\bar{1}}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens dreimal Stern auftritt, ist 0,1111....

A3	C:	$P(C)=P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)$ $=\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$ $=1\cdot 1\cdot\frac{16}{81}+4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27}=\frac{16}{81}+\frac{32}{81}=\frac{48}{81}\approx\underline{\underline{0,5926}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens einmal Stern auftritt, ist 0,5926.

A3	D:	$P(D)=P(X\le 3)=P(X\le 4)-P(X=4)=1-P(X=4)$ $=1-\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=1-1\cdot\frac{1}{81}\cdot 1=\frac{81}{81}-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}\approx\underline{\underline{0,9877}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens dreimal Stern auftritt, ist 0,9877.

A4	**Aufgabe**	
	Von einer großen Ladung Apfelsinen sind 20% verdorben. Es werden 5 Stück entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:	
	A:	Eine Apfelsine ist verdorben.
	B:	Alle Apfelsinen sind in Ordnung.
	C:	Mindestens zwei Apfelsinen sind verdorben.

A4	**Ausführliche Lösungen**
	Treffer: Apfelsine ist verdorben. $n=5$; $p=20\%\Rightarrow p=\frac{1}{5}$

A4	A:	$P(A)=P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4=5\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{256}{625}=\frac{1280}{3125}=\frac{256}{625}=\underline{\underline{0,4096}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine Apfelsine verdorben ist, ist 0,4096.

A4	B:	B: Alle Apfelsinen sind in Ordnung, bedeutet, keine Apfelsine ist verdorben. $P(B)=P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5=1\cdot 1\cdot\frac{1024}{3125}=\underline{\underline{0,32768}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Apfelsinen in Ordnung sind, ist 0,32768.

A4	C:	$P(C)=P(X\le 5)-P(X=1)-P(X=0)$ $=1-\frac{1280}{3125}-\frac{1024}{3125}=\frac{3125-1280-1024}{3125}=\frac{821}{3125}=\underline{\underline{0,26272}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Apfelsinen verdorben sind, ist 0,26272.

A5 Aufgabe

Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens beträgt 0,49, für die Geburt eines Jungen 0,51. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit 4 Kindern

A:	genau zwei Mädchen sind?	B:	höchstens 3 Mädchen sind?

A5 Ausführliche Lösungen

A:

$$P(A)=P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{49}{100}\right)^2\cdot\left(\frac{51}{100}\right)^2=6\cdot\left(\frac{49\cdot 51}{100\cdot 100}\right)^2$$

$$=6\cdot\frac{6.245.001}{100.000.000}=\frac{37.470.006}{100.000.000}\approx\underline{\underline{0,3747}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Familie genau zwei Mädchen sind, ist 0,3747.

A5 B:

$$P(B)=P(X\le 3)=P(X\le 4)-P(X=4)=1-P(X=4)=1-\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{49}{100}\right)^4\cdot\left(\frac{51}{100}\right)^0$$

$$=1-1\cdot\left(\frac{49}{100}\right)^4\cdot 1=1-\frac{5.764.801}{100.000.000}=\frac{100.000.000-5.764.801}{100.000.000}$$

$$=\frac{94.235.199}{100.000.000}\approx\underline{\underline{0,9424}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Familie höchstens drei Mädchen sind, ist 0,9424.

A6 Aufgabe

Wie oft muss man eine Münze mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einmal Kopf zu erhalten?

A6 Ausführliche Lösung

Die Wahrscheinlichkeit für Kopf und Zahl sei gleich (p = 0,5).
Das Gegenereignis von mindestens einmal Kopf ist keinmal Zahl.
Es gilt also $P(X\ge 1)\ge 0,99$ bzw. für das Gegenereignis $P(X=0)\le 0,01$

$$P(X=0)=\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0}=1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(X=0)\le 0,01\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n\le 0,01|\ \text{logarithmieren z. B. mit ln}$$

$$\Leftrightarrow n\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)\le\ln(0,01)|:\ln\left(\frac{1}{2}\right)\ \text{(berücksichtigen dass }\ln\left(\frac{1}{2}\right)\text{ negativ ist)}$$

$$\Leftrightarrow n\ge\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\approx 6,64$$

Die Münze muss **mindestens 7 mal** geworfen werden, um mit einer Sicherheit von mindestens 99% mindestens einmal Kopf zu erhalten.

A7	**Aufgabe**
	Wie oft muss man mindestens Würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens eine ***Sechs*** zu bekommen?

A7	**Ausführliche Lösung**
	A: Mindestens eine 6 bei n Würfen. E = { 1; 2 ; 3 ; ... n } p = 1/6 Das Gegenereignis von A lautet: Keine 6 bei n Würfen. $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n=1-1\cdot1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ $P(A)\geq0,9\Leftrightarrow1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\geq0,9\mid-1$ $\Leftrightarrow-\left(\frac{5}{6}\right)^n\geq-0,1\mid\cdot(-1)$ $\Leftrightarrow\left(\frac{5}{6}\right)^n\leq0,1\mid\text{logarithmieren}$ $\Leftrightarrow\ln\left(\frac{5}{6}\right)^n\leq\ln(0,1)\mid\text{umformen}$ $\Leftrightarrow n\cdot\ln\left(\frac{5}{6}\right)\leq\ln(0,1)\mid:\ln\left(\frac{5}{6}\right)\qquad\ln\left(\frac{5}{6}\right)<1$ $\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\approx12,6$ Man muss mindestens 13 mal würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens eine 6 zu werfen.

A8	**Aufgabe**	
	Ein Würfel wird 60 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:	
	A:	Man wirft genau 10 mal die 6.
	B:	Man wirft mindestens 10 mal die 6.
	C:	Man wirft höchstens 10 mal die 6.
	D:	Die Anzahl der geworfenen Sechser liegt zwischen 6 und 12 einschließlich.
	E:	Man wirft mehr als 4 und weniger als 15 Sechser.
	F.	Die Augenzahl ist in weniger als 25 Fällen ungerade.
	G	Die Augenzahl ist in mehr als 30 Fällen gerade.
	H:	Es treten mehr als 25 und weniger als 35 ungerade Augenzahlen auf.

A8 **Ausführliche Lösungen**

Kumulierte Binomialverteilung für $n = 60$ und $p = \frac{1}{6}$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
0	0,000	4	0,020	8	0,312	12	0,810	16	0,984	20	1,000
1	0,000	5	0,051	9	0,446	13	0,885	17	0,993	21	1,000
2	0,001	6	0,108	10	0,583	14	0,935	18	0,997	22	1,000
3	0,006	7	0,196	11	0,708	15	0,966	19	0,999	23	1,000

Kumulierte Binomialverteilung für $n = 60$ und $p = \frac{1}{2}$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
15	0,000	20	0,007	25	0,123	30	0,551	35	0,922	40	0,997
16	0,000	21	0,014	26	0,183	31	0,651	36	0,954	41	0,999
17	0,001	22	0,026	27	0,259	32	0,741	37	0,974	42	0,999
18	0,001	23	0,046	28	0,349	33	0,817	38	0,986	43	1,000
19	0,003	24	0,078	29	0,449	34	0,877	39	0,993	44	1,000

A8 A: Man wirft genau 10 mal die 6.

$$P(A) = P(X = 10) = P(X \le 10) - P(X \le 9) = 0,583 - 0,446 = 0,137$$

A8 B: Man wirft mindestens 10 mal die 6.

$$P(B) = P(X \ge 10) = 1 - P(X \le 9) = 1 - 0,446 = 0,554$$

A8 C: Man wirft höchstens 10 mal die 6.

$P(C) = P(X \le 10) = 0,583$ aus der Tabelle abgelesen

A8 D: Die Anzahl der geworfenen Sechser liegt zwischen 6 und 12 einschließlich.

$$P(D) = P(6 \le X \le 12) = P(X \le 12) - P(X \le 5) = 0,810 - 0,051 = 0,759$$

A8 E: Man wirft mehr als 4 und weniger als 15 Sechser.

$$P(E) = P(5 \le X \le 14) = P(X \le 14) - P(X \le 4) = 0,935 - 0,020 = 0,915$$

A8 F: Die Augenzahl ist in weniger als 25 Fällen ungerade.

$P(F) = P(X \le 24) = 0,078$ aus der Tabelle abgelesen

A8 G: Die Augenzahl ist in mehr als 30 Fällen gerade.

$$P(G) = P(X \ge 31) = 1 - P(X \le 30) = 1 - 0,551 = 0,449$$

A8 H: Es treten mehr als 25 und weniger als 35 ungerade Augenzahlen auf.

$$P(H) = P(26 \le X \le 34) = P(X \le 34) - P(X \le 25) = 0,877 - 0,123 = 0,754$$