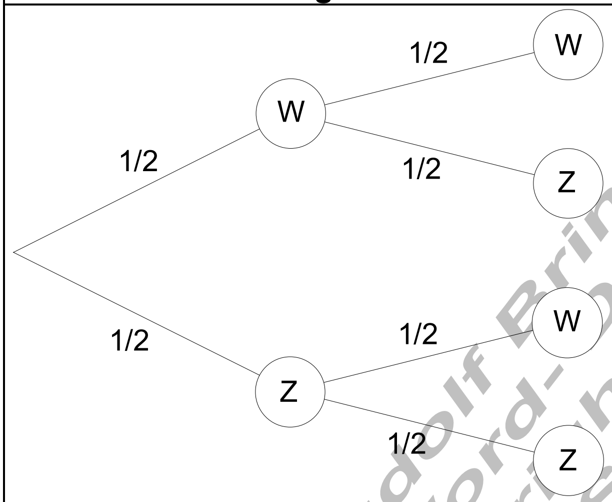
Lösungen Mehrstufige Zufallsversuche I

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Eine Münze wird zweimal geworfen. Zeichnen Sie das Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:	
	a)	A: Genau einmal Wappen.
	b)	B: Mindestens einmal Wappen.
	c)	C: Höchstens einmal Wappen.

A1 Ausführliche Lösung



$P(WW) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$

$P(WZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$

$P(ZW) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$

$P(ZZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$

A1 Ausführliche Lösung

a) A: Genau einmal Wappen.

$P(A) = P(\{WZ\}) + P(\{ZW\}) = 0,25 + 0,25 = \underline{\underline{0,5}}$

A1 Ausführliche Lösung

b) B: Mindestens einmal Wappen.

$P(B) = P(\{WW; WZ; ZW\}) = P(\{WW\}) + P(\{WZ\}) + P(\{ZW\}) = 3 \cdot 0,25 = \underline{\underline{0,75}}$

Oder mit dem Gegenereignis $\overline{B}$: Keinmal Wappen:

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\{ZZ\}) = 1 - 0,25 = \underline{\underline{0,75}}$

A1 Ausführliche Lösung

c) C: Höchstens einmal Wappen.

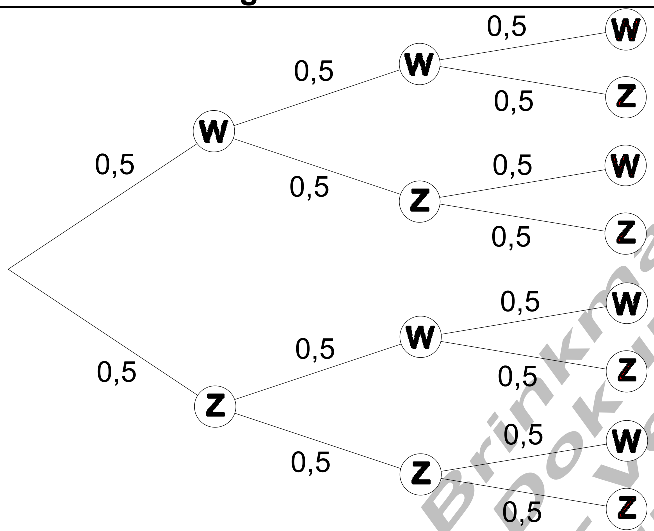
$P(C) = P(\{WZ; ZW; ZZ\}) = P(\{WZ\}) + P(\{ZW\}) + P(\{ZZ\}) = 3 \cdot 0,25 = \underline{\underline{0,75}}$

Oder mit dem Gegenereignis $\overline{C}$: Zweimal Wappen:

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\{WW\}) = 1 - 0,25 = \underline{\underline{0,75}}$

A2	**Aufgabe**			
	Eine Münze wird dreimal geworfen. Zeichnen Sie das Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:			
	a)	A: Mehr als zweimal Wappen.	b)	B: Höchstens zweimal Wappen.
	c)	C: Mindestens einmal Zahl.	d)	D: Genau einmal Wappen.

A2 Ausführliche Lösung



$P(WWW) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$P(WWZ) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$P(WZW) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$P(WZZ) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$P(ZWW) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$P(ZWZ) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$P(ZZW) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$P(ZZZ) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

A2 Ausführliche Lösung

a) A: Mehr als zweimal Wappen.

$$P(A) = P(\{WWW\}) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

A2 Ausführliche Lösung

b) B: Höchstens zweimal Wappen.
Höchstens zweimal Wappen bedeutet keinmal, einmal oder zweimal Wappen. Das Gegenereignis von B lautet: Dreimal Wappen.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\{WWW\}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

A2 Ausführliche Lösung

c) C: Mindestens einmal Zahl.
Mindestens einmal Zahl bedeutet einmal, zweimal oder dreimal Zahl. Das Gegenereignis von C lautet: Keinmal Zahl, das ist aber dreimal Wappen.

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\{WWW\}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

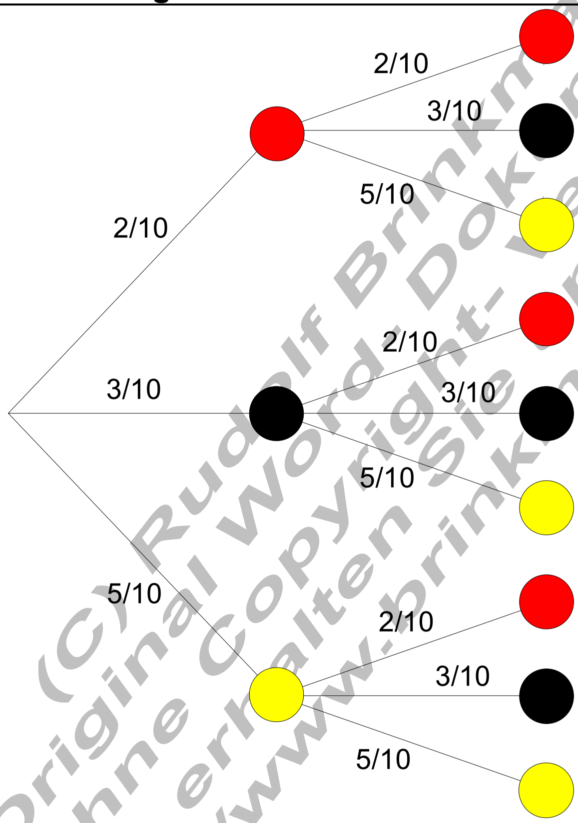
A2 Ausführliche Lösung

d) D: Genau einmal Wappen.

$$P(D) = P(\{WZZ; ZWZ; ZZW\})$$
$$= P(\{WZZ\}) + P(\{ZWZ\}) + P(\{ZZW\}) = 3 \cdot 0{,}125 = 0{,}375$$

A3	**Aufgabe**	
	Eine Urne enthält 2 rote, 3 schwarze und 5 gelbe Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln mit Zurücklegen genommen. Zeichnen Sie das Baumdiagramm, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:	
	a)	A: Beide Kugeln sind gleichfarbig.
	b)	B: Die erste Kugel ist rot und die zweite ist schwarz.
	c)	C: Die zweite Kugel ist rot oder schwarz.
	d)	Wie lautet das Gegenereignis von C und mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt es auf?

A3 Ausführliche Lösung



$$P(rr)=\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{4}{100}$$
$$P(rs)=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{100}$$
$$P(rg)=\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{10}{100}$$
$$P(sr)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{6}{100}$$
$$P(ss)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$$
$$P(sg)=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{15}{100}$$
$$P(gr)=\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{10}{100}$$
$$P(gs)=\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{15}{100}$$
$$P(gg)=\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{25}{100}$$

e_i	rr	rs	rg	sr	ss	sg	gr	gs	gg
P	$\frac{4}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{25}{100}$

A3 Ausführliche Lösung

a) A: Beide Kugeln sind gleichfarbig.

$$P(A)=P(\{rr\})+P(\{ss\})+P(\{gg\})=\frac{4}{100}+\frac{9}{100}+\frac{25}{100}=\frac{38}{100}=\underline{\underline{0{,}38}}$$

A3 **Ausführliche Lösung**

b) B: Die erste Kugel ist rot, und die zweite ist schwarz.

$$P(B) = P(\{rs\}) = \frac{6}{100} = \underline{\underline{0{,}06}}$$

A3 **Ausführliche Lösung**

c) C: Die zweite Kugel ist rot oder schwarz.

$$P(C) = P(\{rr\}) + P(\{rs\}) + P(\{sr\}) + P(\{ss\}) + P(\{gr\}) + P(\{gs\})$$

$$= \frac{4}{100} + \frac{6}{100} + \frac{6}{100} + \frac{9}{100} + \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = \frac{50}{100} = \underline{\underline{0{,}5}}$$

A3 **Ausführliche Lösung**

d) Wie lautet das Gegenereignis von C und mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt es auf?

$\overline{C}$: Die zweite Kugel ist gelb

denn $\overline{C} = S \setminus C = \{(rg);(sg);(gg)\}$

$$\Rightarrow P(\overline{C}) = P(\{rg\}) + P(\{sg\}) + P(\{gg\})$$

$$= \frac{10}{100} + \frac{15}{100} + \frac{25}{100} = \frac{50}{100} = \underline{\underline{0{,}5}}$$

oder $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}5 = \underline{\underline{0{,}5}}$

A4 **Aufgabe**

Ein Test besteht aus vier Fragen. Zu jeder der vier Fragen gibt es drei Antworten, darunter ist nur eine Antwort richtig. Jemand geht völlig unvorbereitet in den Test und kreuzt auf Glück an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er den Test besteht, wenn mindestens drei Fragen richtig angekreuzt sein müssen.

A4 **Ausführliche Lösung**

Es handelt sich um einen vierstufigen Zufallsversuch (vier Fragen).
Die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort ist 1/3 , die für eine falsche 2/3.

$$P(3\text{ Fragen richtig}) = P(\{rrrr\}) + P(\{rrrf\}) + P(\{rrfr\}) + P(\{rfrr\}) + P(\{frrr\})$$

$$P(\{rrrr\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

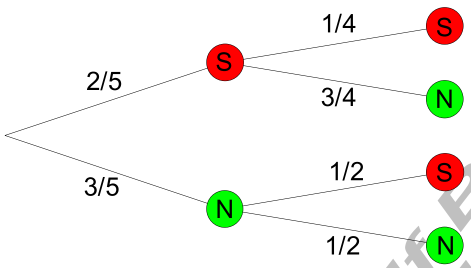
$$P(\{rrrf\}) = P(\{rrfr\}) = P(\{rfrr\}) = P(\{frrr\}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3}$$

$$P(3\text{ Fragen richtig}) = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{8}{3^4} + \frac{1}{3^4} = \frac{9}{3^4} = \underline{\underline{\frac{1}{9} \approx 0{,}11}}$$

A5	**Aufgabe**	
	Fünf Freunde unternehmen eine Kaffeefahrt nach Helgoland und müssen nach der Rückfahrt durch die Zollkontrolle. Obwohl alle angeben, nur die erlaubte Menge Zigaretten und Alkohol eingekauft zu haben, haben Sven und Tim zu viel Zigaretten mitgenommen. Der Zollbeamte wählt zwei von den fünfen aus, um sie zu durchsuchen.	
	a)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Zollbeamte keinen Schmuggler?
	b)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Zollbeamte mindestens einen der beiden Schmuggler?

A5 Ausführliche Lösungen

Modell: In einer Urne befinden sich 3 grüne Kugeln (keine Schmuggler N) und 2 rote Kugeln (Schmuggler S).
Es wird zweimal eine Kugel gezogen ohne zurücklegen.



$$P(SS)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}=0{,}1$$

$$P(SN)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

$$P(NS)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

$$P(NN)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Zollbeamte keinen Schmuggler?
P (NN) = 0,3.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Zollbeamte mindestens einen der beiden Schmuggler?
P(mind. einen S) = P(SS) + P(SN) + P(NS) = 0,1 + 0,3 + 0,3 = 0,7.

A6 Aufgabe

Die Jahrgangsstufe 13 einer gymnasialen Oberstufe besteht aus zwei gleichgroßen Klassen mit insgesamt 40 Schülern. Jeder Schüler erhält für eine Theatervorstellung eine Freikarte. Im Theater werden den Schülern nach dem Zufallsprinzip die Plätze 1 bis 40 zugeordnet.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen auf den ersten 6 Plätzen nur Schüler einer Klasse? (Hinweis: Verwenden Sie ein geeignetes Urnenmodell).

A6 Ausführliche Lösung

Urnenmodell: 20 rote Kugeln (Klasse 1) und 20 grüne Kugeln (Klasse 2).
Sechsmal ziehen ohne zurücklegen.

$$P=P(\{rrrrrr\})+P(\{gggggg\})$$

$P(\{rrrrrr\})=P(\{gggggg\})$ Wahrscheinlichkeiten für beide Klassen gleich

$P(\{rrrrrr\})=\dfrac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15}{40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35}$ Ziehen ohne zurücklegen

$$P=P(\{rrrrrr\})+P(\{gggggg\})=2\cdot\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15}{40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35}=\underline{\underline{0{,}02}}$$

A7	**Aufgabe**
	Ein Glücksrad mit 4 gleichen Segmenten der Farben grün, rot, weiß und blau wird in Drehung versetzt. Ein Spiel ist beendet, wenn das Rad still steht. Eine der vier Farben wird durch einen Zeiger angezeigt. Eine Spielfolge besteht aus 3 Spielen. Wie viele Spielfolgen muss man mindestens durchführen, um mit mehr als 60% Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Spielfolge mit dreimal grün zu erhalten?

A7 Ausführliche Lösung

A: Wenigstens eine Spielfolge mit dreimal grün bei n Spielfolgen.

$P(\{g\}) = \frac{1}{4}$ einmal grün pro Spiel

$\Rightarrow P(\{ggg\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ dreimal grün bei einer Spielfolge

Das Gegenereignis von A lautet:

$\overline{A}$: Keine Spielfolge mit dreimal grün bei n Spielfolgen.

$P(\{\overline{ggg}\}) = 1 - P(\{ggg\}) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$ keine dreimal grün bei einer Spielfolge.

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{63}{64}\right)^n \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{63}{64}\right)^n$$

$$P(A) > 0,6 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{63}{64}\right)^n > 0,6 \mid -1$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{63}{64}\right)^n > -0,4 \mid :(-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{63}{64}\right)^n < 0,4 \mid \ln$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{63}{64}\right)}_{<1} < \ln(0,4) \mid :\ln\left(\frac{63}{64}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,4)}{\ln\left(\frac{63}{64}\right)} \approx \underline{\underline{58,18}}$$

Es muss mindestens 59 mal gespielt werden um wenigstens eine Spielfolge mit dreimal grün zu erhalten.