Lösungen Differenzial- und Integralrechnung zur Vorbereitung einer Klassenarbeit II

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	Extremwerte:	$P_{Max}\left(0 \mid -8\right); P_{Min1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right); P_{Min2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right)$
	Fläche zwischen den Graphen:	$A = \lvert -32 \rvert = 32\ \text{FE}$
	Der Graph:	Siehe „Ausführliche Lösungen“

E2	Ergebnisse		
	a)	Funktionsgleichung von F(x):	$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$
	b)	Die gekennzeichnete Fläche :	$A \approx 4{,}955 + 2{,}522 \approx 7{,}477$

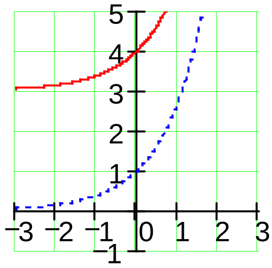
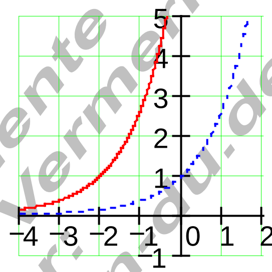
E3	Ergebnisse		
	a)	Fenstermaße und Fensterfläche	$h = \frac{8}{3} \approx 2{,}667\,\text{m} \quad b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2{,}309\,\text{m}$ $A = h \cdot b = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6{,}158\,\text{m}^2$
	b)	Restliche Giebelfläche:	$A_{Rest} = \frac{32}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 4{,}508\ \text{m}^2$

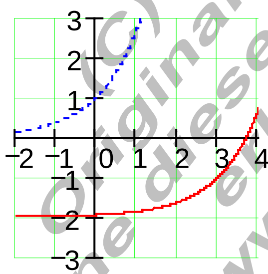
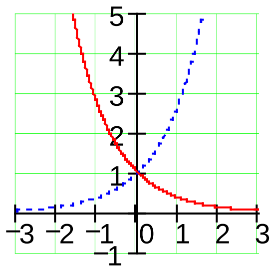
E4	Ergebnis
	$A = \left\lvert \int_0^3 \left(2x^2 - 6x\right) dx \right\rvert = 9\,\text{FE}$

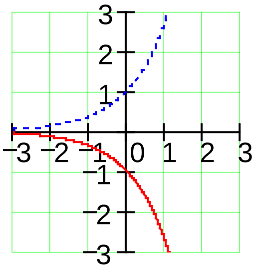
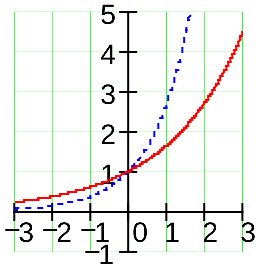
E5	Ergebnis
	$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{13}{3}\,\text{FE}$

E6	Ergebnisse			
	a)	$f(x) = e^{-x} \quad P_y(0 \mid 1)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ Keine Nullstelle Die e- Funktion wurde an der y- Achse gespiegelt.	b)	$f(x) = e^{x} - 1$ $P_y(0 \mid 0) \quad P_x(0 \mid 0)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ Die e- Funktion wurde um eine Einheit nach unten verschoben.

E6	Ergebnisse			
	c)	$f(x)=e^{x-1}+1 \quad P_y\left(0 \mid e^{-1}+1\approx 1{,}386\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ Keine Nullstelle Die e- Funktion wurde um eine Einheit nach rechts und um eine Einheit nach oben verschoben.	d)	$f(x)=-e^{x+1}+1$ $P_y\left(0 \mid -e^{1}+1\approx -1{,}718\right) \quad P_x(-1 \mid 0)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ Die e- Funktion wurde an der x-Achse gespiegelt, um eine Einheit nach links und um eine Einheit nach oben verschoben.

E7	Ergebnisse			
	a)	 $f(x)=e^{x}+3 \quad P_y(0 \mid 4):$ Keine Nullstelle $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3 \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	b)	 $f(x)=e^{x+2} \quad P_y\left(0 \mid e^{2}\approx 7{,}389\right)$ Keine Nullstelle $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

E7	Ergebnisse			
	c)	 $f(x)=e^{x-3}-2$ $P_y\left(0 \mid e^{-3}-2\approx -1{,}95\right)$ $P_x\left(\ln(2)+3\approx 3{,}693 \mid 0\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2 \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	d)	 $f(x)=e^{-x} \quad P_y(0 \mid 1)$ Keine Nullstelle $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

E7	Ergebnisse			
	e)	 $f(x) = -e^x \quad P_y(0 \mid -1)$ Keine Nullstelle $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	f)	 $f(x) = e^{0,5x} \quad P_y(0 \mid 1):$ Keine Nullstelle $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

1. Extremwerte

$f(x)=\frac{5}{4}x^4-3x^2-8$ ist symmetrisch zur y – Achse $\Rightarrow f(-x)=f(x)$

$f'(x)=5x^3-6x\,;\,f''(x)=15x^2-6$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^3-6x=0$

$\Leftrightarrow x\left(5x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow x_1=0\,;\,x_{2/3}=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f''(x_1)=f''(0)=15\cdot 0^2-6=-6<0 \Rightarrow$ rel Max bei $x_1=0$

$f''(x_2)=f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=15\cdot\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-6=15\cdot\frac{6}{5}-6=12>0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_2=\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f''(x_3)=f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=15\cdot\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-6=15\cdot\frac{6}{5}-6=12>0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_3=-\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f(x_1)=f(0)=-8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}(0\,|\,-8)}}$

$f(x_2)=f(x_3)=f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4-3\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-8=-\frac{49}{5}$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right);P_{Min\_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)}}$

A1 Ausführliche Lösung

2. Flächenberechnung

Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4-3x^2-8=0$ Substitution mit $x^2=z$

$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2-3z-8=0 \Leftrightarrow z^2-\frac{12}{5}z-\frac{32}{5}=0 \Rightarrow z_1=4$ bzw. $z_2=-\frac{8}{5}$ (keine Lösung)

$z_1=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2$ bzw. $x_2=2$ sind die Integrationsgrenzen

Flächenintegral:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{3}\left(\frac{5}{4}x^4-3x^2-8\right)dx=\left[\frac{x^5}{4}-x^3-8x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\left[\frac{2^5}{4}-2^3-8\cdot 2\right]-\left[\frac{(-2)^5}{4}-(-2)^3-8\cdot(-2)\right]=-32$$

Die Fläche: $A=\left|-32\right|=\underline{\underline{32\text{ FE}}}$

A1 Ausführliche Lösung

$P_{Max}\left(0\,|\,-8\right)$

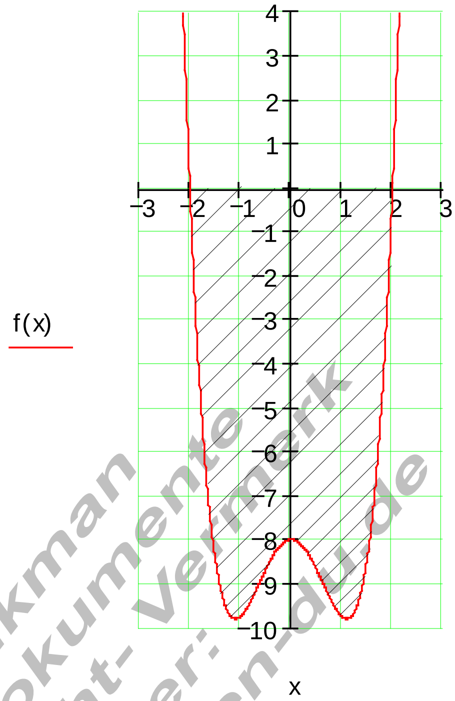
$P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min\_1}\left(-1{,}09\,|\,-9{,}8\right)$

$P_{Min\_1}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min\_1}\left(1{,}09\,|\,-9{,}8\right)$

x	–2,2	–2	–1,5	–1
f(x)	6,76	0	–8,42	–9,75
x	–0,5	0	0,5	1
f(x)	–8,67	–8	–8,67	–9,75
x	1,5	2	2,2	
f(x)	–8,42	0	6,76	



A2 Ausführliche Lösung

a) $f\left(x\right)=-2x^2+x+3$

$I\left(x\right)=\int f\left(x\right)\,dx=\int\left(-2x^2+x+3\right)\,dx=-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+C$

$P\left(-2\,|\,0\right)\Rightarrow I\left(-2\right)=0\Leftrightarrow-\frac{2}{3}\left(-2\right)^3+\frac{1}{2}\left(-2\right)^2+3\cdot\left(-2\right)+C=0$

$\Leftrightarrow\frac{16}{3}+2-6+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{4}{3}$

$F\left(x\right)=I\left(x\right)+C\Rightarrow\underline{\underline{F\left(x\right)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{4}{3}}}$

A2 Ausführliche Lösung

b) Für die Integrationsgrenzen sind die Nullstellen von $F(x)$ zu bestimmen.

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3} \qquad x_1 = -2 \text{ ist bekannt}$$

	$-2/3$	$1/2$	3	$-4/3$
$x_1 = -2$	$\downarrow$	$4/3$	$-22/6$	$4/3$
	$-2/3$	$11/6$	$-2/3$	0

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{2}{3} = 0 \,|: \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{4}x + 1 = 0$$

$$p = -\frac{11}{4};\, q = 1 \Rightarrow D = \frac{57}{64}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 2,319 \\ x_3 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 0,431 \end{array} \right.$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_{x_1}^{x^2} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \right|$$

$$\text{mit } x_1 = -2;\, x_2 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}};\, x_3 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}}$$

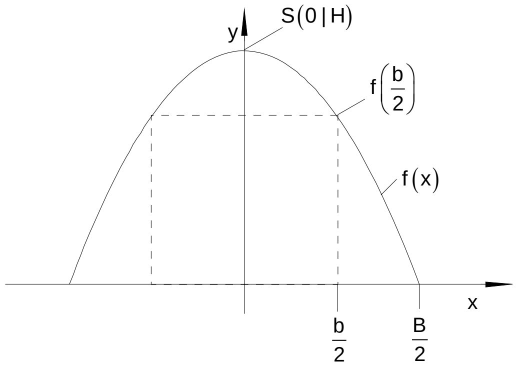
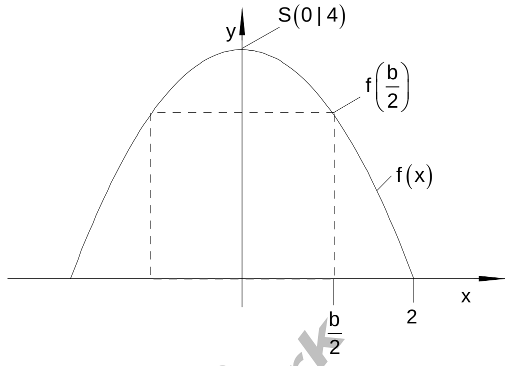
$$A_1 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 \approx -4,995$$

$$A_2 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_2}^{x_3}$$

$$= -\frac{1}{6}x_3^4 + \frac{1}{6}x_3^3 + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_2^4 - \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2 \approx 2,522$$

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx \underline{\underline{7,477}}$$

A3	Ausführliche Lösung	
	Mathematisierung des Problems	
	Allgemein:	Speziell für B = 4 m, H = 4 m
		

A3 Ausführliche Lösung

a) Ansatz: $f(x) = a_2x^2 + 4$ Scheitelpunktform wegen $S(0\,|\,4)$

$$P(2\,|\,0) \Rightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow a_2 \cdot 2^2 + 4 = 0\;|-4$$
$$\Leftrightarrow 4a_2 = -4\;|:4$$
$$\Leftrightarrow a_2 = -1$$

Parabelgleichung: $f(x) = -x^2 + 4$

Rechteckfläche: $A = b \cdot h$ mit $h = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{b^2}{4} + 4$

$$\Rightarrow A(b) = b \cdot \left(-\frac{b^2}{4} + 4\right) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b$$

Das Maximum von $A(b)$ ist zu finden (Extremwert)

$$A(b) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b \Rightarrow A'(b) = -\frac{3}{4}b^2 + 4 \Rightarrow A''(b) = -\frac{3}{2}b$$

Notwendige Bedingung für Extremwert:

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 + 4 = 0\;|:-4$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 = -4\;|:\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3}\;|\sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow |b| = \frac{16}{3} \Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}} \text{ bzw. } b_2 = -\sqrt{\frac{16}{3}}$$

Nur b_1 ist zu verwerten, da es keine negativen Längen gibt.

Überprüfung auf Extremstelle:

$$A''(b_1) = A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

Fensterbreite: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{2{,}309\text{ m}}}$

Fensterhöhe:

$$h = f\left(\frac{b}{2}\right) \text{ mit } \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \text{ und } f(x) = -x^2 + 4$$

$$\text{wird } h = -\left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9} \cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \underline{\underline{\frac{8}{3} \approx 2{,}\overline{6}\text{ m}}}$$

Fensterfläche: $A = h \cdot b = \underline{\underline{\frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6{,}158\text{ m}^2}}$

A3 Ausführliche Lösung

b) Restfläche: Fläche unter der Parabel minus Fensterfläche.

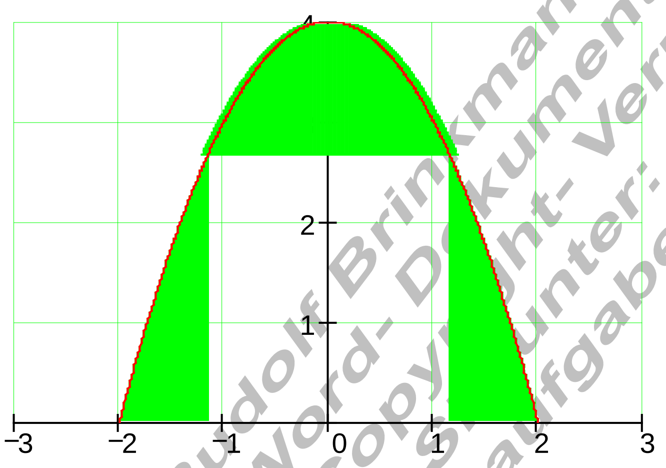
Fläche unter der Parabel:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \left(-x^2+4\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 2^2+4\cdot 2-\left[-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+4\cdot(-3)\right]$$

$$= -\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8 = 16-\frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,\overline{6}\,m^2$$

Restfläche: $\frac{32}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{4,508\,m^2}}$



A4 Ausführliche Lösung

Bestimmung der x – Koordinaten der Schnittpunkte

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x-1=-x^2+4x-1$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x=0$

$\Leftrightarrow x_1=0$ und $x_2=3$ sind die Integrationsgrenzen.

Ansatz: $A=\int_0^3 \left(f(x)-g(x)\right)dx$

mit $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ wird:

$$A=\int_0^3\left(2x^2-6x\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

Da es sich bei einer Fläche zwischen zwei Graphen stets um eine physikalische Fläche handelt, muss das Ergebnis positiv sein.
Das erreichen wir durch Betragsbildung.

$$A=\left|\int_0^3\left(2x^2-6x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=\left|18-27\right|=\left|-9\right|=\underline{\underline{9\,FE}}$$

A5 Ausführliche Lösung

$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$ Tangente durch $P(4\,|\,2)\Rightarrow x_0=4$

$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$

$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ $\quad n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$

$f(x_0)=f(4)=2\,;\,f'(x_0)=f'(4)=-\frac{3}{2}$

$t(x)=-\frac{3}{2}(x-4)+2=\underline{\underline{-\frac{3}{2}x+8}}$

$n(x)=\frac{2}{3}(x-4)+2=\underline{\underline{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}}$

Schnittpunkt der Tangente mit der $x-$Achse:

$t(x)=0\Leftrightarrow x_t=\frac{16}{3}$

Schnittpunkt der Normalen mit der $x-$Achse:

$n(x)=0\Leftrightarrow x_n=1$

Dreieckfläche: $A=\frac{g\cdot h}{2}$ mit $g=x_t-x_n=\frac{16}{3}-1=\frac{13}{3}$

und $h=2\Rightarrow A=\frac{\frac{13}{3}\cdot 2}{2}=\underline{\underline{\frac{13}{3}\text{ FE}}}$

A6 Ausführliche Lösung

a) $f(x)=e^{-x}$

Schnittpunkt $P_y(0\,|\,y_s):\Rightarrow y_s=f(0)=e^{-0}=1\Leftrightarrow P_y(0\,|\,1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to 0}}=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}}=0$

$f(x)=a\cdot e^{b\cdot x}$ hat keine Nullstelle $\Rightarrow f(x)=e^{-x}$ hat ebenfalls keine Nullstelle

Die e- Funktion wurde an der y- Achse gespiegelt.

A6	Ausführliche Lösung
b)	$f(x) = e^x - 1$ Schnittpunkt $P_y(0 \mid y_s)$: $\Rightarrow y_s = f(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 0)}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x - 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{e^x}_{\to 0} - \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 0 - 1 = -1$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x - 1\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to\infty} - \lim\limits_{x\to\infty} 1 = \infty - 1 = \infty$ Nullstelle : $P_x(x \mid 0)$: $\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \mid +1 \Leftrightarrow e^x = 1 \mid \ln(\;) \Leftrightarrow x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{P_x(0 \mid 0)}}$ Die e- Funktion wurde um eine Einheit nach unten verschoben.

A6	Ausführliche Lösung
c)	$f(x) = e^{x-1} + 1$ Schnittpunkt $P_y(0 \mid y_s) :\Rightarrow y_s = f(0) = e^{-1} + 1 = \frac{1}{e} + 1 \approx 1{,}386$ $\Rightarrow P_y\left(0 \mid \frac{1}{e} + 1 \approx 1{,}386\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1} + 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e} + \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = \frac{1}{e}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{e^x}_{\to 0} + 1 = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{x-1} + 1\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e} + \lim\limits_{x\to\infty} 1 = \frac{1}{e}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to\infty} + 1 = \infty$ Nullstelle : $f(x) = 0$ $\Leftrightarrow e^{x-1} + 1 = 0 \mid -1 \Leftrightarrow e^{x-1} = -1 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e} = -1$ hat keine Lösung, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = e^{x-1} + 1$ hat keine Nullstelle. Die e- Funktion wurde um eine Einheit nach rechts und um eine Einheit nach oben verschoben.

A6 Ausführliche Lösung

d) $f(x) = -e^{x+1} + 1$

Schnittpunkt $P_y(0 \mid y_s)$: $y_s = f(0) = -e^1 + 1 \approx -1{,}718 \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid -e^1 + 1 \approx -1{,}718\right)}}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-e^{x+1} + 1\right) = -\lim_{x \to -\infty} e \cdot e^x + \lim_{x \to -\infty} 1 = -e \cdot \lim_{x \to -\infty} \underbrace{e^x}_{\to 0} + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(-e^{x+1} + 1\right) = -\lim_{x \to \infty} e \cdot e^x + \lim_{x \to \infty} 1 = -e \cdot \lim_{x \to \infty} \underbrace{e^x}_{\to \infty} + 1 = -\infty + 1 = \infty$$

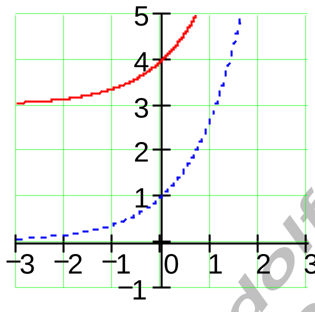
Nullstelle: $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow -e^{x+1} + 1 = 0 \mid +e^{x+1} \Leftrightarrow 1 = e^{x+1} \mid \ln(\ ) \Leftrightarrow 0 = x + 1 \mid -1 \Leftrightarrow -1 = x \Rightarrow \underline{\underline{P_x(-1 \mid 0)}}$

Die e- Funktion wurde an der x- Achse gespiegelt, um eine Einheit nach links und um eine Einheit nach oben verschoben.

A7 Ausführliche Lösung

a)



$f(x) = e^x + 3$

Schnittpunkt $P_y(0 \mid y_s)$:

$y_s = f(0) = e^0 + 3 = 1 + 3 = 4$

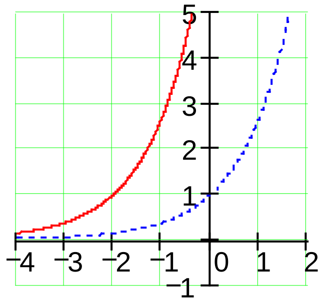
$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 4)}}$

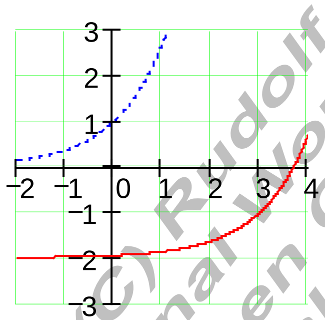
Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + 3 = 0 \mid -3 \Leftrightarrow e^x = -3$ hat keine Lösung,

da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = e^x + 3$ hat keine Nullstelle.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^x + 3\right) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{e^x}_{\to 0} + \lim_{x \to -\infty} 3 = 0 + 3 = 3$$

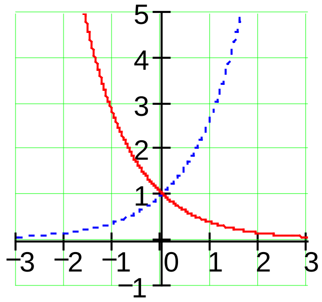
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(e^x + 3\right) = \lim_{x \to \infty} \underbrace{e^x}_{\to \infty} + \lim_{x \to \infty} 3 = \infty + 3 = \infty$$

A7	Ausführliche Lösung	
	b)	
		$f(x) = e^{x+2}$ Schnittpunkt $P_y(0 \mid y_s)$: $y_s = f(0) = e^2 \approx 7{,}389$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid e^2 \approx 7{,}389\right)}}$
		Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = 0 \Leftrightarrow e^2 \cdot e^x = 0$ hat keine Lösung, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = e^{x+2}$ hat keine Nullstelle. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+2} = e^2 \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^x}_{\to 0} = e^2 \cdot 0 = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x+2} = e^2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{e^x}_{\to\infty} = e^2 \cdot \infty = \infty$

A7	Ausführliche Lösung	
	c)	
		$f(x) = e^{x-3} - 2$ Schnittpunkt $P_y(0 \mid y_s)$: $y_s = f(0) = e^{-3} - 2 \approx -1{,}95$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid e^{-3} - 2 \approx -1{,}95\right)}}$
		Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-3} - 2 = 0 \mid +2 \Leftrightarrow e^{x-3} = 2 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow x - 3 = \ln(2) \mid +3 \Leftrightarrow x = \ln(2) + 3 \approx 3{,}693 \Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(\ln(2) + 3 \approx 3{,}693 \mid 0\right)}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{x-3} - 2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^3} - \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = \frac{1}{e^3} \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^x}_{\to 0} - 2 = 0 - 2 = -2$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{x-3} - 2\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^3} - \lim\limits_{x\to\infty} 2 = \frac{1}{e^3} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{e^x}_{\to\infty} - 2 = \infty - 2 = \infty$

A7 Ausführliche Lösung

d)



$f(x) = e^{-x}$

Schnittpunkt $P_y(0 \mid y_s)$:

$y_s = f(0) = e^{-0} = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 1)}}$

Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = 0$ hat keine Lösung,

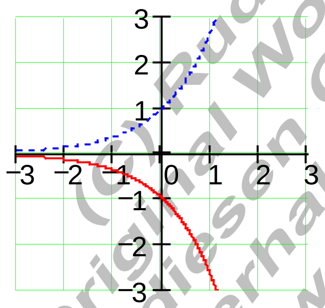
da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = e^{-x}$ hat keine Nullstelle.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to 0}} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to \infty}} = 0$$

A7 Ausführliche Lösung

e)



$f(x) = -e^x$

Schnittpunkt $P_y(0 \mid y_s)$:

$y_s = f(0) = -e^0 = -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid -1)}}$

$f(x) = -e^x$

Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -e^x = 0 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow e^x = 0$ hat keine Lösung,

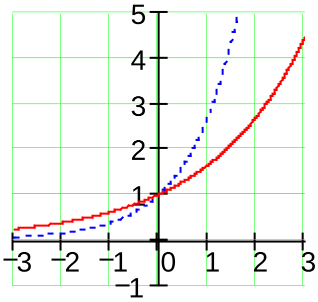
da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = -e^x$ hat keine Nullstelle.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-e^x\right) = -\lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^x}_{\to 0} = -0 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(-e^x\right) = -\lim_{x\to\infty} \underbrace{e^x}_{\to \infty} = -\infty$$

A7 Ausführliche Lösung

f)



$f(x) = e^{0,5x}$

Schnittpunkt $P_y(0 \mid y_s)$:

$y_s = f(0) = e^{0,5\cdot 0} = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 1)}}$

Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 0$ hat keine Lösung,

da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = e^{0,5x}$ hat keine Nullstelle.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{0,5x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\underbrace{e^x}_{\to 0}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{0,5x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\underbrace{e^x}_{\to\infty}} = \infty$$