Lösungen Differenzial- und Integralrechnung zur Vorbereitung einer Klassenarbeit I

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	Der Flächeninhalt des gekennzeichneten Dreiecks beträgt $A = \frac{32}{1+e} \approx \underline{\underline{8,606\ FE}}$

E2	Ergebnisse	
	Die Achsenschnittpunkte:	$P_y\left(0 \mid -3\right) \qquad P_x\left(\ln(4) \approx 1,39 \mid 0\right)$
	Der Tiefpunkt (relatives Minimum):	$P_{Min}\left(\ln(2) \approx 0,69 \mid -4\right)$
	Der Wendepunkt:	$P_w\left(0 \mid -3\right)$
	Die gekennzeichnete Fläche beträgt:	$A = \left\lvert -\frac{9}{2} \right\rvert = \frac{9}{2}\,FE = 4,5\ FE$

E3	Ergebnisse		
	a)	Siehe ausführliche Lösungen.	
	b)	Relatives Minimum:	$P_{Min}\left(\ln(2) \approx 0,693 \mid \sqrt{2} \approx 1,414\right)$
	c)	Die unter a) gekennzeichnete Fläche:	$A = 1\ FE$

E4	Ergebnisse		
	a)	Fenstermaße und Fensterfläche	$h = \frac{8}{3} \approx 2,667\,m \quad b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2,309\,m$ $A = h \cdot b = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6,158\,m^2$
	b)	Restliche Giebelfläche:	$A_{Rest} = \frac{32}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 4,508\ m^2$

E5	Ergebnisse		
	a)	Schnittpunkt mit der y- Achse:	$P_y\left(0 \mid e^2 + 1 \approx 8,389\right)$
	b)	Gleichung der Geraden g(x): Asymptote von f(x).	$g(x) = \frac{1}{4}x + 1$
	c)	Tiefpunkt (rel. Min.):	$P_{Min}\left(2 + \ln(4) \approx 3,386 \mid \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4) \approx 2,097\right)$
	d)	Die gekennzeichnete Fläche:	$A = e^2 - \frac{1}{4} \approx 7,139$
	e)	Änderung des Flächenwerts auf:	$A = \lim\limits_{b \to \infty}\left[e^2 - e^{2-b}\right] = e^2 \approx 7,389$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

E6	Ergebnisse		
	a)	Die Wachstumsfunktion:	$N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{1}{48} \cdot \ln(20) \cdot t}$
	b)	Verdoppelungszeit:	$t = \frac{48 \cdot \ln(2)}{\ln(20)} \approx 11{,}106$
	c)	Mittelwert:	$mw = \frac{3000}{\ln(20)} \left(20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) \approx 146569{,}767$
	d)	Siehe ausführliche Lösungen	

E7	Ergebnisse		
	a)	Siehe ausführliche Lösungen.	
	b)	Die Funktionsgleichung:	$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$
	c)	Stärkste Abnahme der Dosierung:	Nach 8 Stunden (Wendestelle)
	d)	Verabreichte Menge:	Ca. 67 mg (Milligramm)

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung
	$f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x}$ 1. Berechnung der Achsenschnittpunkte Schnittpunkt mit der y – Achse: $f(0)=(2-0)e^{\frac{1}{2}\cdot 0}=2e^{0}=2\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\mid 2)}}$ Schnittpunkt mit der x – Achse: $f(x)=0\Leftrightarrow (2-x)e^{\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow (2-x)=0\Leftrightarrow x_1=2$ Der Faktor $e^{\frac{1}{2}x}$ wird nicht Null, also $\underline{\underline{P_{x1}(2\mid 0)}}$

A1	Ausführliche Lösung
	2. Gerade durch die Achsenschnittpunkte $P_y(0\mid 2)$ und $P_{x1}(2\mid 0)$ $g(x)=a_1x+a_0 \quad a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-2}{2-0}=-1\Rightarrow g(x)=-x+a_0$ Punktprobe: $P_y(0\mid 2)$ $g(0)=2\Leftrightarrow -0+a_0=2\Rightarrow a_0=2$ $\Rightarrow \underline{\underline{g(x)=-x+2}}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A1	Ausführliche Lösung

3. Wendepunkt

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (2-x);\, u' = -1;\, v = e^{\frac{1}{2}x};\, v' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = -1\cdot e^{\frac{1}{2}x} + (2-x)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \left[-1+\frac{1}{2}(2-x)\right]e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x} = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}x;\, u' = -\frac{1}{2};\, v = e^{\frac{1}{2}x};\, v' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x} = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right);\, u' = -\frac{1}{4};\, v = e^{\frac{1}{2}x};\, v' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_w = -2}}$$

$$f'''(x_w) = f'''(-2) = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}(-2)\right)e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{1}{4e} \neq 0$$

$\Rightarrow x_w = -2$ ist Wendestelle

$$y_w = f(x_w) = f(-2) = (2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{W\left(-2\,|\,\frac{4}{e}\right)}}$$

(c) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A1 Ausführliche Lösung

4. Die Wendetangente

$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)$

$t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$ mit $x_w = -2$ wird

$$f'(x_w) = f'(-2) = -\frac{1}{2}(-2) \cdot e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{1}{e}$$

$$f(x_w) = f(-2) = (2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{e}(x+2) + \frac{4}{e} = \underline{\underline{\frac{1}{e}x + \frac{6}{e}}}$$

A1 Ausführliche Lösung

5. Schnittpunkte der Wendetangente mit der x-Achse und $g(x) = -x + 2$

$t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -6$ Nullstelle der Wendetangente

$$t(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = -x + 2 \Leftrightarrow x_s = \underline{\underline{\frac{2e-6}{1+e}}}$$

$y_s = g(x_s) = -\frac{2e-6}{1+e} + 2 = \frac{6-2e}{1+e} + 2 = \underline{\underline{\frac{8}{1+e}}}$ ist die Höhe des Dreiecks

A1 Ausführliche Lösung

6. Berechnung der Dreiecksfläche

Höhe des Dreiecks: $h = y_s = \frac{8}{1+e}$

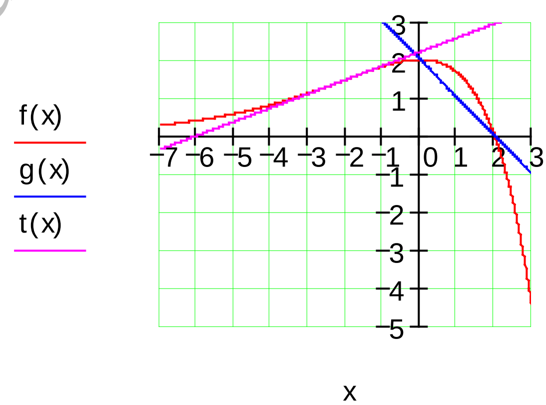
Fläche: $A = \frac{g \cdot h}{2}$

mit g als Abstand von

$x = -6$ bis $x = 2 \Rightarrow g = 8$

$$A = \frac{8 \cdot \frac{8}{1+e}}{2} = 4 \cdot \frac{8}{1+e}$$

$$= \frac{32}{1+e} \approx \underline{\underline{8{,}606\ FE}}$$



(c) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne diesen Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

A2	Ausführliche Lösung
	1. Achsenschnittpunkte $f(x) = e^{2x} - 4\cdot e^{x}$ Schnittpunkt mit der y – Achse: $y_s = f(0) = e^{0} - 4\cdot e^{0} = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid -3)}}$ Schnittpunkt mit der x – Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4\cdot e^{x} = 0$ (Exponentialgleichung) Lösungsansatz durch logarithmieren $e^{2x} - 4\cdot e^{x} = 0 \mid +4\cdot e^{x}$ $\Leftrightarrow e^{2x} = 4\cdot e^{x} \mid \ln(\ )$ beide Seiten logarithmieren $\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(4\cdot e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 2x\cdot\ln(e) = \ln(4) + x\ln(e)$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(4) + x \mid -x$ $\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1{,}39 \Rightarrow$ Nullstelle: $\underline{\underline{P_x(\ln(4) \mid 0)\text{ bzw. }P_x(1{,}39 \mid 0)}}$

A2	Ausführliche Lösung
	2. Der Tiefpunkt $f(x) = e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x};\ f'(x) = 2e^{2\cdot x} - 4e^{x};\ f''(x) = 4e^{2\cdot x} - 4e^{x}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2\cdot x} - 4e^{x} = 0$ $\Leftrightarrow 2e^{2\cdot x} = 4\cdot e^{y} \mid :2$ $\Leftrightarrow e^{2\cdot x} = 2\cdot e^{x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\cdot x}\right) = \ln\left(2\cdot e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 2x\cdot\ln(e) = \ln(2) + x\cdot\ln(e)$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(2) + x \Rightarrow x_e = \ln(2)$ ist Stelle mit waagerechter Tangente $f''(x_e) = f''(\ln(2)) = 4\cdot e^{2\cdot\ln(2)} - 4\cdot e^{\ln(2)} = 4\cdot\left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4\cdot e^{\ln(2)}$ mit $e^{\ln(2)} = 2$ wird $f''(\ln(2)) = 4\cdot 2^2 - 4\cdot 2 = 8 > 0 \Rightarrow$ rel Min für $x_e = \ln(2)$ $y_e = f(\ln(2)) = e^{2\cdot\ln(2)} - 4\cdot e^{\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4\cdot e^{\ln(2)} = 2^2 - 4\cdot 2 = -4$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(\ln(2) \mid -4)\text{ bzw }P_{Min}(0{,}69 \mid -4)}}$

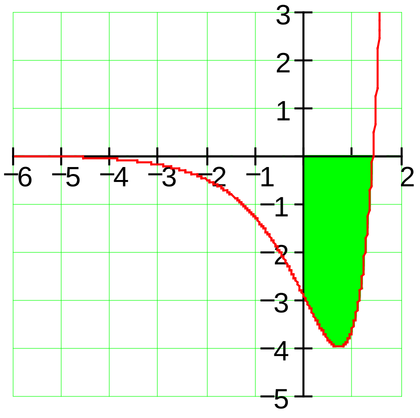
(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A2	Ausführliche Lösung
	3. Der Wendepunkt $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$ $f(x)=e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}$ $\Rightarrow f'(x)=2\cdot e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\,;\,f''(x)=4\cdot e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\,;\,f'''(x)=8\cdot e^{2x}-4\cdot e^{x}$ $f''(x)=0\Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}=0$ $\Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x}=4\cdot e^{x}\,\vert :4$ $\Leftrightarrow e^{2\cdot x}=e^{x}\Rightarrow x_w=0$ denn $2x=x$ geht nur für $x=0$ $f'''(x_w)=f'''(0)=8\cdot e^{0}-4\cdot e^{0}=8\cdot 1-4\cdot 1=4\neq 0\Rightarrow x_w=0$ ist Wendestelle $f(x_w)=f(0)=e^{0}-4\cdot e^{0}=1-4\cdot 1=-3\Rightarrow \underline{\underline{P_w(0\,\vert -3)}}$

A2	Ausführliche Lösung
	4. Fläche $\int\limits_0^{\ln(4)} f(x)\,dx=\int\limits_0^{\ln(4)}\left(e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\right)dx=\int\limits_0^{\ln(4)} e^{2\cdot x}\,dx-4\int\limits_0^{\ln(4)} e^{x}\,dx$ Teilintegral lösen durch Substitutionsverfahren $\int e^{2\cdot x}\,dx$ Substitution: $u(x)=2x\Rightarrow \frac{du}{dx}=2\Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$ $\frac{1}{2}\int e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{u}\Rightarrow \int e^{2\cdot x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2\cdot x}$ und mit $\int e^{x}\,dx=e^{x}$ $\int\limits_0^{\ln(4)} f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2\cdot x}-4e^{x}\right]_0^{\ln(4)}=\left[\frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(4)}-4e^{\ln(4)}\right]-\left[\frac{1}{2}e^{0}-4e^{0}\right]$ $=\left[\frac{1}{2}\cdot 16-4\cdot 4\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot 1-4\cdot 1\right]=-\frac{9}{2}$ $A=\left\vert -\frac{9}{2}\right\vert=\frac{9}{2}\,FE=\underline{\underline{4{,}5\,FE}}$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne diesen Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.mathe-aufgaben-du.de

A2 Ausführliche Lösung

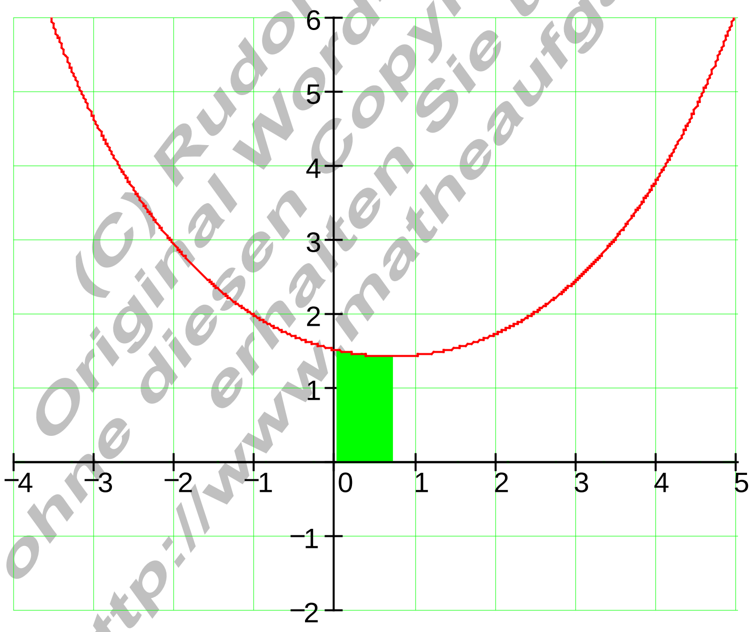


A3 Ausführliche Lösung

a)

Wertetabelle für $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17



(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A3	Ausführliche Lösung	
	b)	Berechnung des relativen Minimums. $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}=0 \mid +\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \mid \cdot 4$ $\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=2e^{-\frac{1}{2}x} \mid \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $\Leftrightarrow e^{x}=2 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow x=\ln(2)$ Extremstelle Extremwert: $f(x_e)=f(\ln(2))=e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln(2)}$ $=2^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ $=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ Tiefpunkt: $\underline{\underline{T\left(\ln(2)\mid\sqrt{2}\right)}}$

(C) Rudolf Brinkman
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A3 Ausführliche Lösung

c) Flächenberechnung:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx=\int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx=\underbrace{\int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I}:\quad \int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx\quad u(x)=-\frac{1}{2}x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}\Rightarrow dx=-2du$$

$$u(0)=0\quad u(\ln(2))=-\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow -2\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(2)} e^u\,du=2\int_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0} e^u\,du=2\left[e^u\right]_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0}=2\left[e^0-e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}\right]$$

$$\mathrm{II}:\quad \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx\quad u(x)=\frac{1}{2}x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Rightarrow dx=2du$$

$$u(0)=0\quad u(\ln(2))=\frac{1}{2}\ln(2)$$

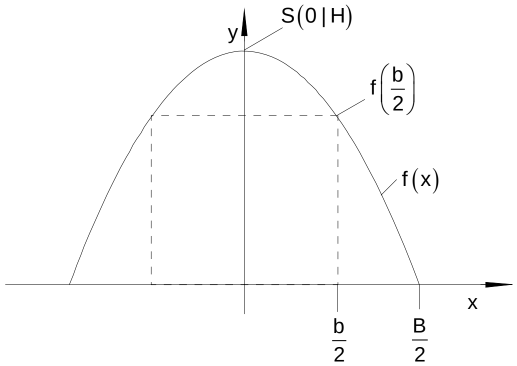
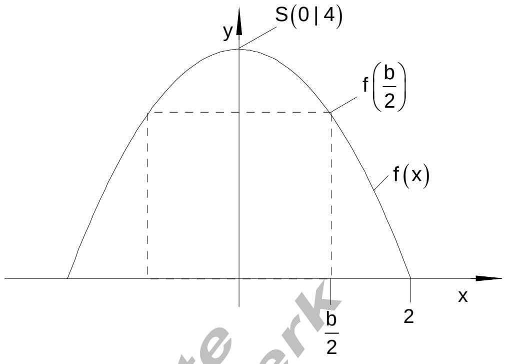
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^u\right)du=\int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^u\right)du=\left[e^u\right]_0^{\frac{1}{2}\ln(2)}=e^{\frac{1}{2}\ln(2)}-e^0$$

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}:\quad 2e^0-2e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}+e^{\frac{1}{2}\ln(2)}-e^0=1-2\cdot 2^{-\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{1}}$$

Die gekennzeichnete Fläche beträgt $\underline{\underline{1\ \text{FE}}}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A4	Ausführliche Lösung	
	Mathematisierung des Problems	
	Allgemein: 	Speziell für B = 4 m, H = 4 m 

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A4 Ausführliche Lösung

a) Ansatz: $f(x) = a_2x^2 + 4$ Scheitelpunktform wegen $S(0|4)$

$$P(2|0) \Rightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow a_2 \cdot 2^2 + 4 = 0 \,|\, -4$$
$$\Leftrightarrow 4a_2 = -4 \,|\, :4$$
$$\Leftrightarrow a_2 = -1$$

Parabelgleichung: $f(x) = -x^2 + 4$

Rechteckfläche: $A = b \cdot h$ mit $h = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{b^2}{4} + 4$

$$\Rightarrow A(b) = b \cdot \left(-\frac{b^2}{4} + 4\right) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b$$

Das Maximum von $A(b)$ ist zu finden (Extremwert)

$$A(b) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b \Rightarrow A'(b) = -\frac{3}{4}b^2 + 4 \Rightarrow A''(b) = -\frac{3}{2}b$$

Notwendige Bedingung für Extremwert:

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 + 4 = 0 \,|\, :-4$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 = -4 \,|\, :\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3} \,|\, \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow |b| = \frac{16}{3} \Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}} \text{ bzw. } b_2 = -\sqrt{\frac{16}{3}}$$

Nur b_1 ist zu verwerten, da es keine negativen Längen gibt.

Überprüfung auf Extremstelle:

$$A''(b_1) = A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

Fensterbreite: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{2{,}309\text{ m}}}$

Fensterhöhe:

$$h = f\left(\frac{b}{2}\right) \text{ mit } \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \text{ und } f(x) = -x^2 + 4$$

$$\text{wird } h = -\left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9} \cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \underline{\underline{\frac{8}{3} \approx 2{,}\overline{6}\text{ m}}}$$

Fensterfläche: $A = h \cdot b = \underline{\underline{\frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6{,}158\text{ m}^2}}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A4 Ausführliche Lösung

b) Restfläche: Fläche unter der Parabel minus Fensterfläche.

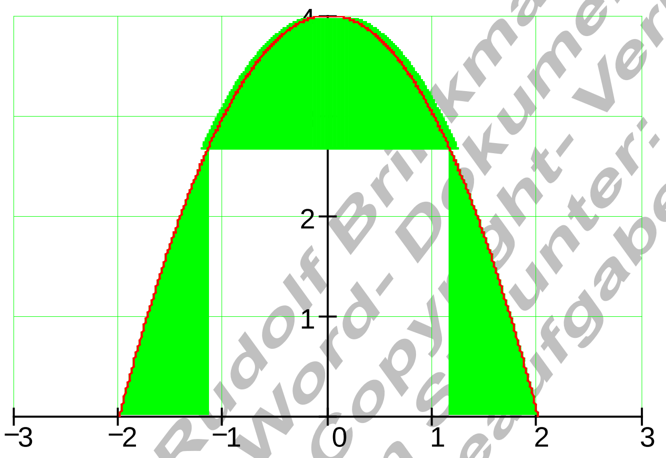
Fläche unter der Parabel:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 2^2+4\cdot 2-\left[-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+4\cdot(-3)\right]$$

$$= -\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8 = 16-\frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,\overline{6}\ \mathrm{m}^2$$

Restfläche: $\frac{32}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{4,508\ \mathrm{m}^2}}$



A5 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1$

Bedingung für den Schnitt mit der y – Achse:

$y_s = f(0) \Leftrightarrow y_s = e^{2-0}+\frac{1}{4}\cdot 0+1 = e^2+1 \approx 8,389$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid e^2+1\right)}}$ bzw. $P_y(0 \mid 8,389)$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne diesen Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

A5 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1$$

$g(x)$ ist die Asymptote von $f(x)$ das bedeutet, der Graph von $f(x)$ strebt für große x – Werte gegen $g(x)$.

$e^{2-x}=e^{-(x-2)}$ strebt für große x – Werte gegen Null, so dass $f(x)$ für große x – Werte nur noch durch den Teilterm $\frac{1}{4}x+1$ bestimmt wird.

Die Funktionsgleichung der Asymptote ist somit $\underline{\underline{g(x)=\frac{1}{4}x+1}}$

A5 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1 \Rightarrow f'(x)=-e^{2-x}+\frac{1}{4} \Rightarrow f''(x)=e^{2-x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -e^{2-x}+\frac{1}{4}=0 \mid +e^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}=e^{2-x} \mid \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\left(e^{2-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1)-\ln(4)=2-x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(4)=2-x$$

$$\Leftrightarrow x=2+\ln(4) \Rightarrow \text{Extremwert bei } x_e=2+\ln(4)\approx 3{,}386$$

$$f''(x_e)=f''(2+\ln(4))=e^{2-(2+\ln(4))}=e^{2-2-\ln(4)}$$

$$=e^{-\ln(4)}=e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{4}>0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_e=2+\ln(4)\approx 3{,}386$$

$$f(x_e)=f(2+\ln(4))=e^{2-(2+\ln(4))}+\frac{1}{4}(2+\ln(4))+1$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln(4)+1=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\approx 2{,}097$$

Tiefpunkt: $\underline{\underline{T\left(2+\ln(4) \mid \frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\right)}}\approx(3{,}386 \mid 2{,}097)$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokument
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A5	Ausführliche Lösung	
	d)	Die gekennzeichnete Fläche liegt zwischen den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0\,;x_e]$ $A=\int_0^{x_e}[f(x)-g(x)]\,dx$ mit $f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1$ und $g(x)=\frac{1}{4}x+1$ wird $f(x)-g(x)=e^{2-x}$ und damit $A=\int_0^{x_e}e^{2-x}\,dx$ Substitution: $u=2-x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-1\Leftrightarrow dx=-du$ $x_e=2+\ln(4)$ untere Grenze: $u(0)=2$ obere Grenze : $u(x_e)=2-(2+\ln(4))=-\ln(4)$ $A=-\int_2^{-\ln(4)}e^u\,du=\int_{-\ln(4)}^{2}e^u\,du=\left[e^u\right]_{-\ln(4)}^{2}=e^2-e^{-\ln(4)}=\underline{\underline{e^2-\frac{1}{4}\approx 7{,}139}}$

A5	Ausführliche Lösung	
	e)	Die gekennzeichnete Fläche liegt zwischen den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0\,;\infty]$ $A=\int_0^{\infty}[f(x)-g(x)]\,dx$ mit $f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1$ und $g(x)=\frac{1}{4}x+1$ wird $f(x)-g(x)=e^{2-x}$ und damit $A=\int_0^{\infty}e^{2-x}\,dx$ ist ein uneigentliches Integral $\Rightarrow A=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^{b}e^{2-x}\,dx$ Substitution: $u=2-x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-1\Leftrightarrow dx=-du$ untere Grenze: $u(0)=2$ obere Grenze : $u(b)=2-b$ $A=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\int_2^{2-b}e^u\,du\right)=\lim\limits_{b\to\infty}\int_{2-b}^{2}e^u\,du=\lim\limits_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{2-b}^{2}=\lim\limits_{b\to\infty}\left[e^2-e^{2-b}\right]$ $=\underline{\underline{e^2\approx 7{,}389}}$ Denn $\lim\limits_{b\to\infty}e^{2-b}=\lim\limits_{b\to\infty}e^{-(b-2)}=0$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokument ohne diesen Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

A6	Ausführliche Lösung	
	a)	Ansatz für die Wachstumsfunktion: $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$ mit $N_0 = 5000$ Nach 48 Stunden gilt: $N_{48} = N_0 \cdot e^{48 \cdot k}$ mit $N_{48} = 100000$ Der Wachstumsfaktor k soll bestimmt werden. $N_{48} = N_0 \cdot e^{48 \cdot k} \mid : N_0$ $\Leftrightarrow \frac{N_{48}}{N_0} = e^{48 \cdot k} \mid \ln$ $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right) = \ln\left(e^{48 \cdot k}\right) = 48k \mid : 48$ $\Leftrightarrow \frac{1}{48} \cdot \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right) = k$ mit Zahlen wird $k = \frac{1}{48} \cdot \ln\left(\frac{100000}{5000}\right) = \frac{1}{48} \cdot \ln(20)$ Der Wachstumsfaktor: $k = \frac{1}{48} \cdot \ln(20) \approx 0{,}0624$ Damit wird die Wachstumsfunktion zu: $\underline{\underline{N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{1}{48} \cdot \ln(20) \cdot t}}}$

A6	Ausführliche Lösung	
	b)	Verdoppelung der Anzahl der Bakterien Ansatz: $2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t} \mid : N_0$ $\Leftrightarrow 2 = e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t} \mid \ln$ $\Leftrightarrow \ln(2) = \ln\left(e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t}\right) = \frac{1}{48}\ln(20) \cdot t \mid : \frac{1}{48}\ln(20)$ $\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\frac{1}{48}\ln(20)} = t \Leftrightarrow \underline{\underline{t = \frac{48 \cdot \ln(2)}{\ln(20)} \approx 11{,}106}}$ Jeweils alle 11,106 Stunden verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien.

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne diesen Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

A6	Ausführliche Lösung	
	c)	Mittelwert über die ersten 80 Stunden $m=\frac{1}{80}\int_0^{80}N(t)\,dt=\frac{1}{80}\int_0^{80}N_0\cdot e^{k\cdot t}\,dt=\frac{N_0}{80}\int_0^{80}e^{k\cdot t}\,dt$ Substitution: $u(t)=k\cdot t\Rightarrow\frac{du}{dt}=k\Rightarrow dt=\frac{1}{k}du$ untere Grenze: $u(0)=k\cdot 0=0$ obere Grenze: $u(80)=80k$ $m=\frac{N_0}{80}\left(\frac{1}{k}\int_0^{80k}e^u\,du\right)=\frac{N_0}{80k}\left[e^u\right]_0^{80k}=\frac{N_0}{80k}\left(e^{80k}-1\right)$ mit $N_0=5000$ und $k=\frac{1}{48}\ln(20)$ wird $m=\frac{5000}{\frac{80}{48}\ln(20)}\left(e^{\frac{80}{48}\ln(20)}-1\right)=\frac{5000}{\frac{5}{3}\ln(20)}\left(e^{\frac{5}{3}\ln(20)}-1\right)$ $=\frac{15000}{5\cdot\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)=\underline{\underline{\frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)\approx 146569{,}767}}$ Im Mittel gibt es in den ersten 80 Stunden 146570 Bakterien

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A6 Ausführliche Lösung

d) $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot x} \quad m(x) = m$ ist konstant (siehe Aufgabenteil c)

Wir bilden das Integral,
welches die Fläche zwischen den beiden Graphen darstellt.

$$\int_0^{80} \left(N(x) - m\right) dx = \int_0^{80} \left(N_0 \cdot e^{k \cdot x} - m\right) dx = N_0 \int_0^{80} e^{k \cdot x}\, dx - m \int_0^{80} dx$$

Teilintegral I: $\int_0^{80} e^{k \cdot x}\, dx$ Lösung durch Substitution $u(x) = k \cdot x$

$$\frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k} du$$

untere Grenze: $u(0) = 0$ obere Grenze: $u(80) = 80k$

$$\int_0^{80} e^{k \cdot x}\, dx = \frac{1}{k} \int_0^{80k} e^u\, du = \frac{1}{k}\left[e^u\right]_0^{80k} = \frac{1}{k}\left(e^{80k} - 1\right)$$

Teilintegral II: $\int_0^{80} dx = \left[x\right]_0^{80} = 80$

$$N_0 \int_0^{80} e^{k \cdot x}\, dx - m \int_0^{80} dx = \frac{N_0}{k}\left(e^{80k} - 1\right) - 80m$$

Werte einsetzen:

$$N_0 = 5000\,;\ k = \frac{1}{48}\ln(20)\,;\ m = \frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}} - 1\right)$$

$$\frac{N_0}{k}\left(e^{80k} - 1\right) - 80m = \frac{5000}{\frac{1}{48}\ln(20)}\left(e^{80 \cdot \frac{1}{48}\ln(20)} - 1\right) - \frac{80 \cdot 3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}} - 1\right)$$

$$= \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}} - 1\right) - \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}} - 1\right) = 0$$

Die Funktion m(x) = m bildet den Mittelwert der Wachstumsfunktion N(x). Der Teil der Fläche (Fläche I), der unterhalb von m(x) liegt, muss genauso groß sein wie der Teil der Fläche (Fläche II), der oberhalb von m(x) liegt. Das folgt aus dem Mittelwert. Da nun N(x) im Bereich von Fläche I unterhalb von m(x) liegt, ist dort der Wert des Integrals negativ.
Da N(x) im Bereich von Fläche II oberhalb von m(x) liegt, ist dort der Wert des Integrals positiv. Bei Flächengleichheit muss demzufolge der Wert des Integrals über den gesamten Bereich, der gemittelt wurde, gleich Null sein. Obige Rechnung zeigt, das dies der Fall ist.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A7	Ausführliche Lösung	
	a)	Verlaufsbeschreibung: Die Dosierung beginnt mit einem Anfangswert von 1 mg/h. Dann steigt sie monoton an, um nach 4 Stunden den Maximalwert von 5 mg/h zu erreichen. Danach fällt sie, zuerst stärker, dann weniger stark, monoton ab.

A7	Ausführliche Lösung	
	b)	Ansatz: $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ Anfangsdosierung: $n_0 = 1\,mg/h \Rightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ Maximale Dosierung nach $x = 4$ Stunden bedeutet: $f(x)$ hat bei $x = 4$ eine waagerechte Tangente, also $f'(4) = 0$ $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ mit $u = a \cdot x$ und $v = e^{k \cdot x}$ sowie $u' = a$ und $v' = k \cdot e^{k \cdot x}$ $f'(x) = a \cdot e^{k \cdot x} + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x}(1 + k \cdot x)$ $f'(4) = 0 \Leftrightarrow a \cdot e^{4k}(1 + 4 \cdot k) = 0$ $\Leftrightarrow 1 + 4 \cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ Extremwert nach $x = 4$ Stunden: $f(4) = 5$ $f(4) = 5 \Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 4} = 5$ $\Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-1} = 5 \Leftrightarrow a = e$ Funktionsgleichung der Dosierung: $\underline{\underline{f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A7	Ausführliche Lösung

c) Die Änderungsrate der Dosierung wird durch die erste Ableitung beschrieben. Ihr Maximum ist an der Wendestelle.

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

Erste Ableitung:

$$f'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot x \text{ und } v = e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$\text{sowie } u' = e \text{ und } v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'(x) = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{e}{4}x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\left(1 - \frac{1}{4}x\right)$$

Zweite Ableitung:

$$f''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 1 - \frac{1}{4}x$$

$$\text{sowie } u' = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v' = -\frac{1}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 8 \text{ Bedingung für Wendestelle}$$

Dritte Ableitung:

$$f'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 2 - \frac{1}{4}x$$

$$\text{sowie } u' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v' = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = u' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x) + \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (3 - \frac{1}{4}x)$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \frac{1}{16}e \cdot e^{-2} \cdot (3 - \frac{1}{4}8) = \frac{1}{16}e^{-1} \neq 0$$

$\Rightarrow x_w = 8$ ist Wendestelle von $f(x)$

Die Abnahme der Dosierung ist nach x = 8 Stunden am stärksten.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

A7 Ausführliche Lösung

d) Die Menge des verabreichten Medikamentes entspricht der Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse, denn $mg/h \cdot h = mg$.
Dabei wird eine Infusionszeit von 24 Stunden zugrunde gelegt.

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow \text{Menge} = M = \int_0^{24} f(x)\,dx = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) dx$$

Aufteilung des Integrals in $I = \int_0^{24} 1dx$ und in $II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$

so dass gilt: $M = I + e \cdot II$

$$I = \int_0^{24} 1dx = [x]_0^{24} = 24$$

$II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ Lösung durch partielle integration mit $\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$

$$u(x) = x; v'(x) = e^{-\frac{1}{4}x}; u'(x) = 1; v(x) = \int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

Zwischenrechnung:

$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ Lösung durch Substitution: $u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Rightarrow dx = -4\,du$

$$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -4\int e^u\,du = -4e^u = -4e^{-\frac{1}{4}x} = v$$

$$\int x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = x \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) - \int 1 \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x})\,dx = -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 4\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

$$= -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - 16e^{-\frac{1}{4}x} = -4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)$$

$$\Rightarrow II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = \left[-4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)\right]_0^{24} = -4e^{-6}(24+4) - [-4 \cdot 4] = -112e^{-6} + 16$$

$$\Rightarrow M = I + e \cdot II = 24 + e\left(-112e^{-6} + 16\right) = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66{,}738$$

In 24 Stunden wird eine Medikamentenmenge von ca. 67 mg verabreicht.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de