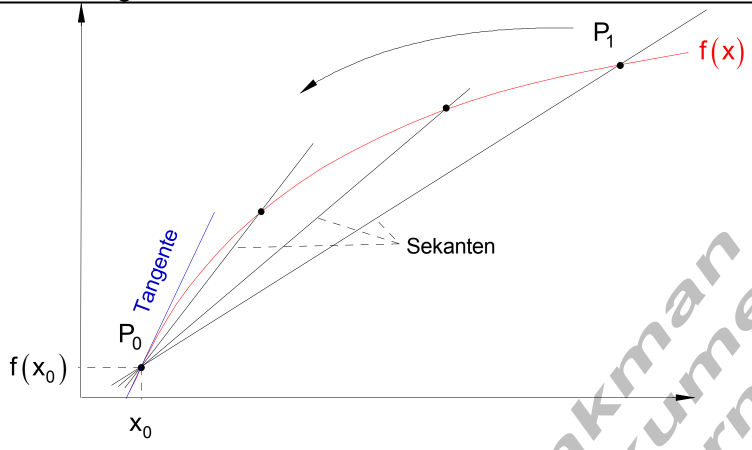
# Aufgaben Differenzialrechnung zur Vorbereitung der Klassenarbeit VI Ergebnisse

| E1 | Ergebnisse | |
|---|---|---|
| | a) | Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt. |
| | b) |  Bewegt man den Punkt $P_1$ immer weiter auf $P_0$ zu, so ändert sich die Sekantensteigung.<br><br>Je mehr man sich dem Punkt $P_0$ nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung. |
| | c) | Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle $x_0$ ist die Steigung der Tangente im Punkt P ( $x_0$ \| $f(x_0)$ ) und somit auch die Steigung des Graphen von f(x) in diesem Punkt. |
| | d) | Die Ableitungsfunktion f'(x) heißt deshalb Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von f(x) repräsentiert. |

| E2 | Ergebnisse | |
|---|---|---|
| | a) | $f'(x)=3 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$ |
| | b) | $f'(x)=15x^2-3 \qquad f''(x)=30x \qquad f'''(x)=30$ |
| | c) | $f'(x)=9x^2+4x+1 \qquad f''(x)=18x+4 \qquad f'''(x)=18$ |
| | d) | $f'(x)=24x^2+24x+6 \qquad f''(x)=48x+24 \qquad f'''(x)=48$<br>Siehe ausführliche Lösung. |
| | e) | $f'(x)=-4x^3+2 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$ |
| | f) | $f'(x)=4x^3-9 \qquad f''(x)=12x^2 \qquad f'''(x)=24x$ |
| | g) | $f'(x)=-3cx^2-a-b-c^3-1 \qquad f''(x)=-6cx \qquad f'''(x)=-6c$<br>Siehe ausführliche Lösung. |
| | h) | $f'(x)=12x^2-4x+5 \qquad f''(x)=24x-4 \qquad f'''(x)=24$ |
| | i) | $f'(x)=20x^3-12x^2+6x-2 \qquad f''(x)=60x^2-24x+6 \qquad f'''(x)=120x-24$ |
| | j) | $f'(x)=-4x^3 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$<br>Siehe ausführliche Lösung. |

**E3** Ergebnisse

a) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

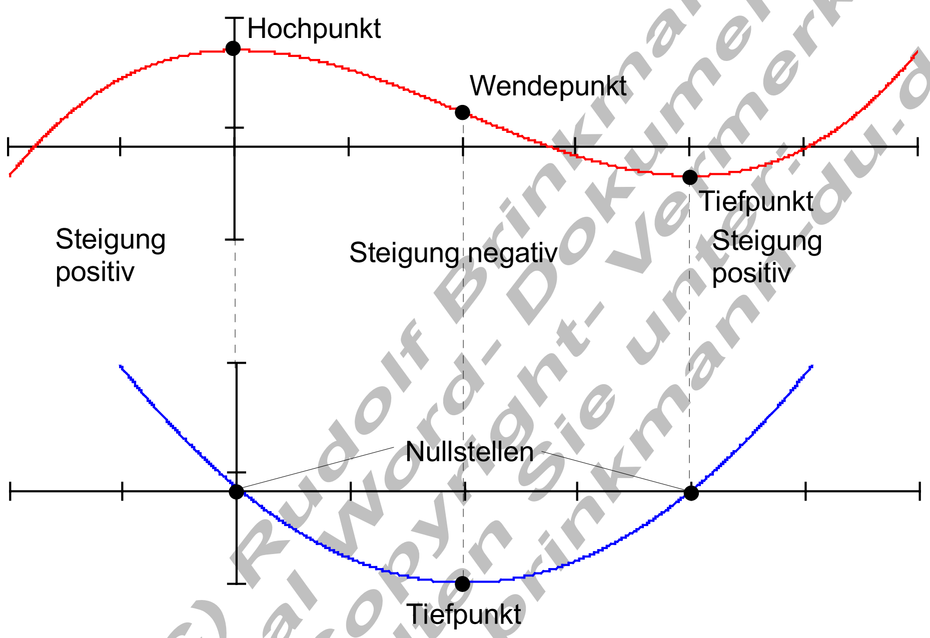
b) $f''(x) = 6x + 2$

c)

| x | –3 | –2,5 | –2 | –1,5 | –1 | –0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –7 | –0,38 | 3 | 3,88 | 3 | 1,13 | –1 | –2,63 | –3 | –1,38 | 3 |
| $f'(x)$ | 17 | 9,75 | 4 | –0,25 | –3 | –4,25 | –4 | –2,25 | 1 | 5,75 | 12 |
| $f''(x)$ | –16 | –13 | –10 | –7 | –4 | –1 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 |

d) Siehe ausführliche Lösung

**E4** Ergebnis






**E5** Ergebnisse

a) $f'(x) = 3 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

b) $f'(x) = 15x^2 - 3 \qquad f''(x) = 30x \qquad f'''(x) = 30$

c) $f'(x) = 9x^2 + 4x + 1 \qquad f''(x) = 18x + 4 \qquad f'''(x) = 18$

d) $f'(x) = -4x^3 + 2 \qquad f''(x) = -12x^2 \qquad f'''(x) = -24x$

e) $f'(x) = 4x^3 - 9 \qquad f''(x) = 12x^2 \qquad f'''(x) = 24x$

f) $f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \qquad f''(x) = 24x - 4 \qquad f'''(x) = 24$

| E6.1 | Ergebnisse | |
|---|---|---|
| | a) | Punktsymmetrie, da nur ungerade Exponenten vorkommen |
| | b) | Punkte mit waagerechter Tangente:<br>$P_1(1 \mid -4)\,;P_2(-1 \mid 4)$ |
| | c) | Achsenschnittpunkte:<br>$P_y(0 \mid 0)\,;P_{x1}(0 \mid 0)\,;P_{x2}\left(\sqrt{3} \approx 1{,}73 \mid 0\right);P_{x3}\left(-\sqrt{3} \approx -1{,}73 \mid 0\right)$ |
| | d) | Siehe ausführliche Lösungen |

| E6.2 | Ergebnisse | |
|---|---|---|
| | a) | Keine Symmetrie |
| | b) | Punkte mit waagerechter Tangente:<br>$P_1(0 \mid -4)\,;P_2(-2 \mid 4)$ |
| | c) | Achsenschnittpunkte:<br>$P_y(0 \mid -4)\,;P_{x1}(-1 \mid 0)\,;P_{x2}\left(-1+\sqrt{3} \approx 0{,}73 \mid 0\right);P_{x3}\left(-1-\sqrt{3} \approx -2{,}73 \mid 0\right)$ |
| | d) | Siehe ausführliche Lösungen |

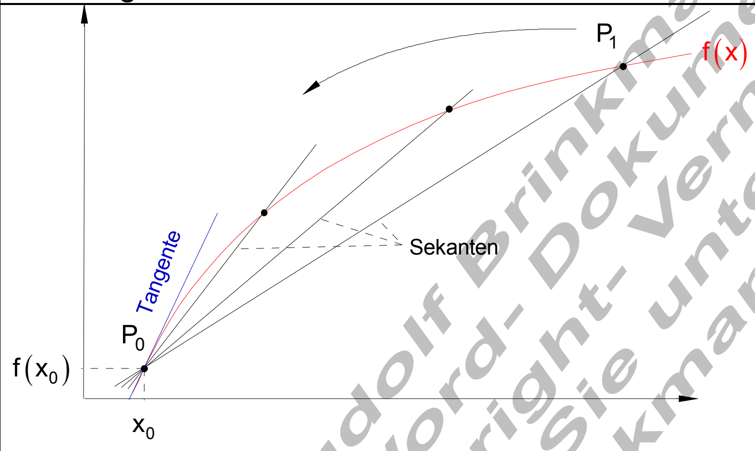
| E6.3 | Ergebnisse | |
|---|---|---|
| | a) | Achsensymmetrie, da nur gerade Exponenten vorkommen |
| | b) | Punkte mit waagerechter Tangente:<br>$P_1\left(0 \,\middle|\, \frac{81}{10} = 8{,}1\right);P_2(3 \mid 0)\,;P_3(-3 \mid 0)$ |
| | c) | Achsenschnittpunkte:<br>$P_y\left(0 \,\middle|\, \frac{81}{10} = 8{,}1\right);P_{x1/3}(3 \mid 0)\,;P_{x2/4}(-3 \mid 0)$ |
| | d) | Siehe ausführliche Lösungen |

| E6.4 | Ergebnisse | |
|---|---|---|
| | a) | Keine Symmetrie |
| | b) | Punkte mit waagerechter Tangente:<br>$P_{1/2}(0 \mid 0)\,;P_3\left(3 \,\middle|\, -\frac{27}{5} = -5{,}4\right)$ |
| | c) | Achsenschnittpunkte:<br>$P_y(0 \mid 0)\,;P_{x1/2/3}(0 \mid 0)\,;P_{x4}(4 \mid 0)$ |
| | d) | Siehe ausführliche Lösungen |

| E7 | Ergebnisse | |
|---|---|---|
| | a) | Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y – Achse, da nur gerade Exponenten auftreten. |
| | b) | $P_{min1}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46 \mid 0\right) \quad P_{min2}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46 \mid 0\right) \quad P_{max}(0 \mid 4{,}5)$ |
| | c) | $P_{w1}(2 \mid 2) \Rightarrow t_1(x) = -2x+6 \quad P_{w2}(-2 \mid 2) \Rightarrow t_2(x) = 2x+6$ |
| | d) | $P_y(0 \mid 4{,}5) \quad P_{x1/2}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46 \mid 0\right) \quad P_{x3/4}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46 \mid 0\right)$ |
| | e) | Wertetabelle siehe „Ausführliche Lösung“. |
| | f) | Graph siehe „Ausführliche Lösung“. |

## Ausführliche Lösungen

| A1 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Theoriefragen. | |
| | a) | Was verstehen Sie unter der Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt? |
| | b) | Beschreiben Sie anschaulich (Skizze) und mit Worten, wie man bei einem Graphen von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung gelangt. |
| | c) | Welche Bedeutung hat die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle $x_0$? |
| | d) | Warum nennt man die Ableitungsfunktion auch Steigungsfunktion? |

| A1 | Ausführliche Lösungen | | |
|---|---|---|---|
| | a) | Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt. | |
| | b) |   | Bewegt man den Punkt $P_1$ immer weiter auf $P_0$ zu, so ändert sich die Sekantensteigung.<br><br>Je mehr man sich dem Punkt $P_0$ nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung. |
| | c) | Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle $x_0$ ist die Steigung der Tangente im Punkt P ( $x_0$ \| f($x_0$) ) und somit auch die Steigung des Graphen von f(x) in diesem Punkt. | |
| | d) | Die Ableitungsfunktion f'(x) heißt deshalb Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von f(x) repräsentiert. | |

| A2a | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Leiten Sie dreimal ab. | $f(x) = 3x + 4$ |

| A2a | **Ausführliche Lösung** |
|---|---|
| | $f(x) = 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$<br>Die Ableitung einer Konstanten Funktion ist Null. Damit sind auch alle weiteren Ableitungen Null. |

| A2b | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Leiten Sie dreimal ab. | $f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$ |

| A2b | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | $f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3 = 5x^3 - 3x - 4$<br>$\Rightarrow f'(x) = 15x^2 - 3 \qquad f''(x) = 30x \qquad f'''(x) = 30$<br>Es ist sinnvoll vor dem Ableiten den Funktionsterm zu vereinfachen. |

| A2c | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Leiten Sie dreimal ab. | $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ |

| A2c | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$<br>$\Rightarrow f'(x) = 9x^2 + 4x + 1 \qquad f''(x) = 18x + 4 \qquad f'''(x) = 18$ |

| A2d | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Leiten Sie dreimal ab. | $f(x) = (2x + 1)^3$ |

| A2d | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | $f(x) = (2x + 1)^3$<br>1. Lösung durch ausmultiplizieren:<br>$f(x) = (2x + 1)^3 = (2x + 1)\underbrace{(2x + 1)^2}_{\text{1. bin. Formel}} = (2x + 1)(4x^2 + 4x + 1)$<br>$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$<br>$f'(x) = \underline{\underline{24x^2 + 24x + 6}} \qquad f''(x) = \underline{\underline{48x + 24}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{48}}$<br>2. Lösung mit der Kettenregel:<br>$f'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2 = 6(4x^2 + 4x + 1) = \underline{\underline{24x^2 + 24x + 6}}$<br>$f''(x) = 2 \cdot 6(2x + 1) \cdot 2 = 24(2x + 1) = \underline{\underline{48x + 24}}$<br>$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$ |

| A2e | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Leiten Sie dreimal ab. | $f(x) = x - x^4 + 3 + x$ |

| A2e | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | $f(x) = x - x^4 + 3 + x = -x^4 + 2x + 3$ <br> $\Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 2 \qquad f''(x) = -12x^2 \qquad f'''(x) = -24x$ <br> Es ist sinnvoll vor dem Ableiten den Funktionsterm zu vereinfachen. |

| A2f | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Leiten Sie dreimal ab. | $f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$ |

| A2f | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | $f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4 = x^4 - 9x + 1$ <br> $\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 9 \qquad f''(x) = 12x^2 \qquad f'''(x) = 24x$ <br> Es ist sinnvoll vor dem Ableiten den Funktionsterm zu vereinfachen. |

| A2g | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Leiten Sie dreimal ab. | $f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$ |

| A2g | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | $f(x) = \underbrace{a + b + c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$ <br> $f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = \underline{\underline{-3cx^2 \underbrace{- a - b - c^3 - 1}_{\text{Konstante}}}}$ <br> $f''(x) = \underline{\underline{-6cx}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{-6c}}$ |

| A2h | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Leiten Sie dreimal ab. | $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ |

| A2h | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ <br> $\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \qquad f''(x) = 24x - 4 \qquad f'''(x) = 24$ |

| A2i | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Leiten Sie dreimal ab. | $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$ |

| A2i | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$ <br> $\Rightarrow f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ <br> $\Rightarrow f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$ <br> $\Rightarrow f'''(x) = 120x - 24$ |

| A2j | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Leiten Sie dreimal ab. | $f(x)=\left(a^2+x^2\right)\left(a^2-x^2\right)$ |

**A2j** Ausführliche Lösung

$f(x)=\left(a^2+x^2\right)\left(a^2-x^2\right)$

1. Lösung durch ausmultiplizieren (3. binomische Formel):

$f(x)=a^4-x^4 \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-24x}}$

2. Lösung mit der Produktregel (aufwendig):

$f(x)=\underbrace{\left(a^2+x^2\right)}_{u}\underbrace{\left(a^2-x^2\right)}_{v} \Rightarrow u'=2x \quad v'=-2x$

$$f'(x)=u'v+uv'=2x\cdot\left(a^2-x^2\right)+\left(a^2+x^2\right)(-2x)$$

$$=2a^2x-2x^3-2a^2x-2x^3=\underline{\underline{-4x^3}}$$

$f''(x)=\underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-24x}}$

**A3** **Aufgabe**

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades: $f(x)=x^3+x^2-4x-1$

| | |
|---|---|
| a) | Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f'(x) |
| b) | Leiten Sie die Funktion f'(x) noch mal ab, so dass daraus die Funktion f''(x) entsteht. |
| c) | Berechnen Sie die fehlenden Werte der Wertetabelle. |
| d) | Zeichnen Sie die Graphen von f(x) ; f'(x) ; und f''(x) in ein geeignetes Koordinatensystem. |

Wertetabelle:

| x | –3 | –2,5 | –2 | –1,5 | –1 | –0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –7 | –0,38 | | 3,88 | 3 | 1,13 | | –2,63 | –3 | –1,38 | 3 |
| $f'(x)$ | 17 | 9,75 | 4 | –0,25 | | –4,25 | –4 | –2,25 | | 5,75 | 12 |
| $f''(x)$ | –16 | –13 | –10 | –7 | | –1 | 2 | | 8 | 11 | 14 |

**A3** Ausführliche Lösungen

a) $f'(x)=3x^2+2x-4$

b) $f''(x)=6x+2$

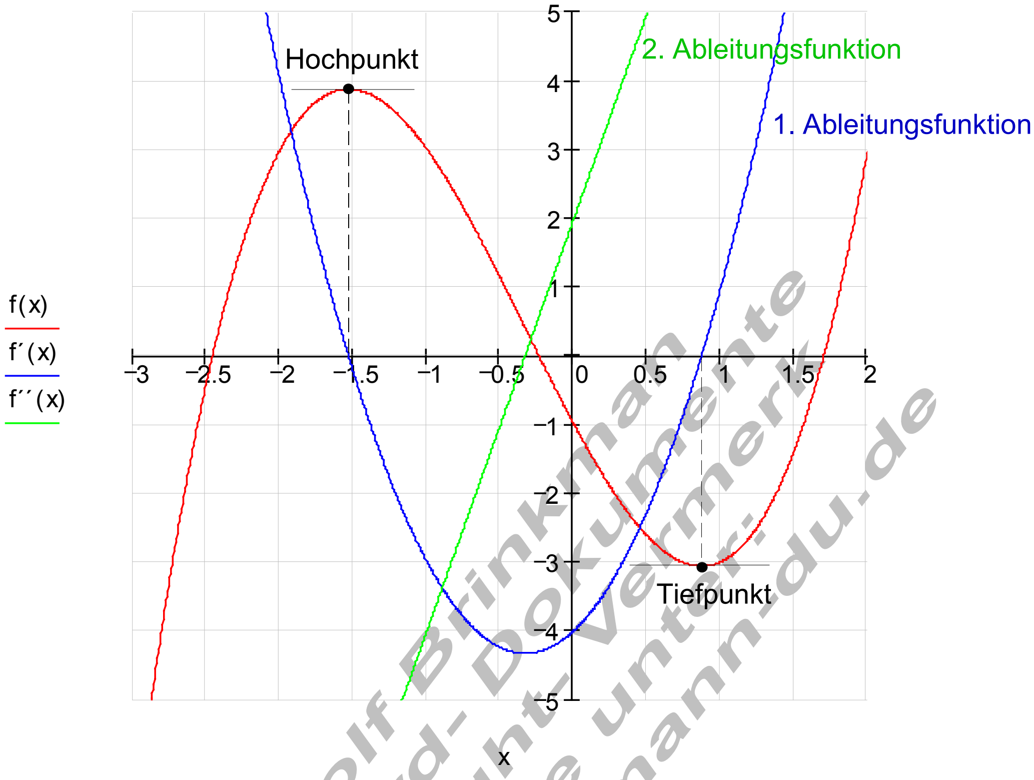
c)

| x | –3 | –2,5 | –2 | –1,5 | –1 | –0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –7 | –0,38 | 3 | 3,88 | 3 | 1,13 | –1 | –2,63 | –3 | –1,38 | 3 |
| $f'(x)$ | 17 | 9,75 | 4 | –0,25 | –3 | –4,25 | –4 | –2,25 | 1 | 5,75 | 12 |
| $f''(x)$ | –16 | –13 | –10 | –7 | –4 | –1 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 |

A3 **Ausführliche Lösung**

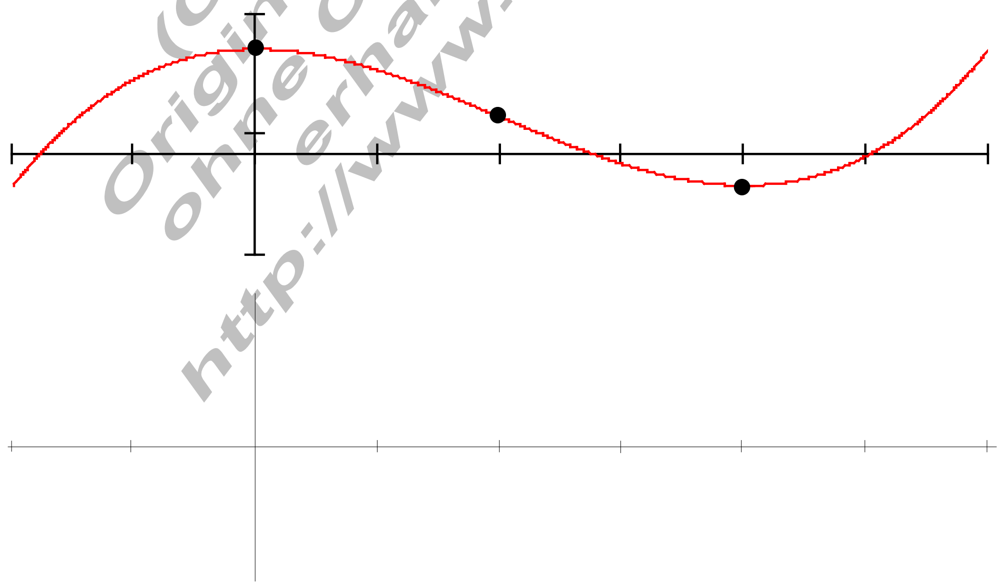
d)

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4 \qquad f''(x) := 6x + 2$

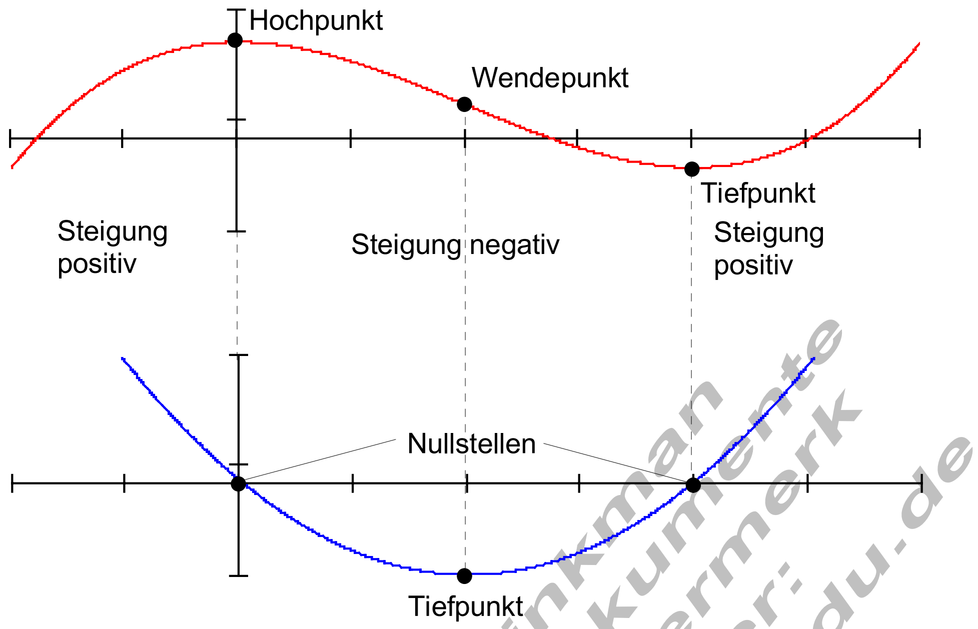



A4 **Aufgabe**

Skizzieren Sie unterhalb des Funktionsgraphen den Graphen der Ableitungsfunktion und markieren Sie in beiden Graphen die charakteristischen Punkte.



**A4** Ausführliche Lösung




Markante Punkte des Graphen von f(x) sind Hochpunkt, Tiefpunkt und der Wendepunkt. Dort, wo f(x) den Hoch- bzw. Tiefpunkt hat, ist der Wert der Ableitungsfunktion Null, da sich an dieser Stelle von f(x) waagerechte Tangenten befinden. Waagerechte Tangente an f(x) bedeutet Steigung von f(x) an diesen Stellen Null. Die Steigung im Wendepunkt ist negativ aber maximal im Intervall zwischen den Extrempunkten. Deshalb hat dort die Ableitungsfunktion ihren Tiefpunkt. Die Funktionswerte der Ableitungsfunktion sind zwischen ihren Nullstellen negativ, außerhalb dieser positiv. Das entspricht genau der Steigung von f(x).

**A5** **Aufgabe**

Leiten Sie folgende Funktionen 3 mal ab.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $f(x) = 3x + 4$ | b) | $f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$ |
| c) | $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ | d) | $f(x) = x - x^4 + 3 + x$ |
| e) | $f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$ | f) | $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ |

| E5 | Ausführliche Lösungen | |
|---|---|---|
| | a) | $f(x)=3x+4=f(x)=3x^1+4 \Rightarrow f'(x)=3\cdot 1\cdot x^0+0=3$ <br> $f'(x)=3 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$ |
| | b) | $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3=5x^3-3x-4=5x^3-3x^1-4$ <br> $\Rightarrow f'(x)=5\cdot 3\cdot x^2-3\cdot 1\cdot x^0-0$ <br> $\Rightarrow f'(x)=15x^2-3 \Rightarrow f''(x)=30x \Rightarrow f'''(x)=30$ |
| | c) | $f(x)=3x^3+2x^2+x+1=3x^3+2x^2+x^1+1$ <br> $\Rightarrow f'(x)=3\cdot 3\cdot x^2+2\cdot 2\cdot x^1+1\cdot x^0+0$ <br> $\Rightarrow f'(x)=9x^2+4x+1 \Rightarrow f''(x)=18x+4 \Rightarrow f'''(x)=18$ |
| | d) | $f(x)=x-x^4+3+x=-x^4+2x^1+3$ <br> $\Rightarrow f'(x)=-4\cdot x^3+2\cdot 1\cdot x^0+0$ <br> $\Rightarrow f'(x)=-4x^3+2 \Rightarrow f''(x)=-12x^2 \Rightarrow f'''(x)=-24x$ |
| | e) | $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4=x^4-9x^1+1$ <br> $\Rightarrow f'(x)=4\cdot x^3-9\cdot 1\cdot x^0+0$ <br> $\Rightarrow f'(x)=4x^3-9 \Rightarrow f''(x)=12x^2 \Rightarrow f'''(x)=24x$ |
| | f) | $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2=4x^3-2x^2+5x^1-2$ <br> $\Rightarrow f'(x)=4\cdot 3\cdot x^2-2\cdot 2\cdot x^1+5\cdot 1\cdot x^0-0$ <br> $\Rightarrow f'(x)=12x^2-4x+5 \Rightarrow f''(x)=24x-4 \Rightarrow f'''(x)=24$ |

| A6.1 | **Aufgabe** | | |
|---|---|---|---|
| | Gegeben ist folgende Funktion: | | $f(x)=2x^3-6x$ |
| | a) | Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten. | |
| | b) | Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten. | |
| | c) | Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte. | |
| | d) | Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen. | |

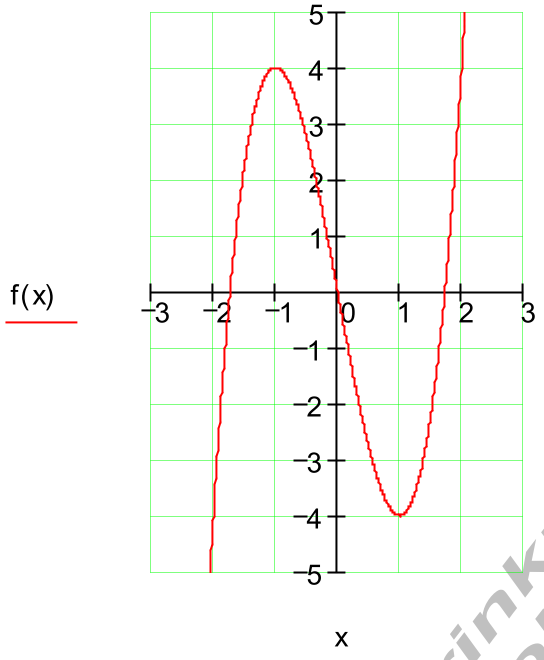
| A6.1 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | a) | $f(x)=2x^3-6x$ <br> $\Rightarrow$ Punktsymmetrie, da nur ungerade Exponenten vorkommen. <br> Es gilt: $f(-x)=-f(x)$ |

| A6.1 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | b) | $f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6$<br>Punkte mit waagerechter Tangente.<br>$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \mid +6$<br>$\Leftrightarrow 6x^2 = 6 \mid :6$<br>$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$<br>An den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ gibt es waagerechte Tangenten.<br>Berechnung der y – Koordinaten<br>$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(1 \mid -4)}}$<br>$f(x_2) = f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1 \mid 4)}}$ |

| A6.1 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | c) | Achsenschnittpunkte von $f(x) = 2x^3 - 6x$<br>$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 0)}}$<br>Nullstellen<br>$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0$<br>$\Leftrightarrow x(2x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$<br>$2x^2 - 6 = 0 \mid +6$<br>$\Leftrightarrow 2x^2 = 6 \mid :2$<br>$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$<br>$\underline{\underline{P_{x1}(0 \mid 0)\,;\,P_{x2}(\sqrt{3} \mid 0)\,;\,P_{x3}(-\sqrt{3} \mid 0)}}$ |

| A6.1 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | d) | $f(x) = 2x^3 - 6x$<br>$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 4$<br>$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -f(2) = -4$ wegen Punktsymmetrie |

| x | −2 | −1,73 | −1 | 0 | 1 | 1,73 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | −4 | 0 | 4 | 0 | −4 | 0 | 4 |

| A6.1 | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| | d)  |



| A6.2 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Gegeben ist folgende Funktion: | $f(x)=2x^3+6x^2-4$ |
| | a) Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten. | |
| | b) Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten. | |
| | c) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte. | |
| | d) Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen. | |

**A6.2 Ausführliche Lösung**

a) $f(x)=2x^3+6x^2-4 \Rightarrow$ Es liegt keine Symmetrie vor,
da es weder nur gerade Exponenten oder nur ungerade Exponenten gibt.

**A6.2 Ausführliche Lösung**

b) $f(x)=2x^3+6x^2-4 \Rightarrow f'(x)=6x^2+12x$

Punkte mit waagerechter Tangente.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+12x=0$

$\Leftrightarrow x(6x+12)=0 \Rightarrow x_1=0$

$6x+12=0 \mid -12$

$\Leftrightarrow 6x=-12 \mid :6$

$\Leftrightarrow x_2=-2$

An den Stellen $x_1=0$ und $x_2=-2$ gibt es waagerechte Tangenten.

Berechnung der $y-$Koordinaten

$f(x_1)=f(0)=-4 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0\mid -4)}}$

$f(x_2)=f(-2)=2(-2)^3+6(-2)^2-4=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-2\mid 4)}}$

| A6.2 | Ausführliche Lösung |
|---|---|

c) Achsenschnittpunkte von $f(x)=2x^3+6x^2-4$

$P_y: f(0)=-4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-4)}}$

Nullstellen

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+6x^2-4=0$

Eine Nullstelle wird durch probieren gefunden

$x=1 \Rightarrow f(1)=2\cdot 1^3+6\cdot 1^2-4=4$

$x=-1 \Rightarrow f(-1)=2\cdot(-1)^3+6\cdot(-1)^2-4=0$ Nullstelle bei $x_1=-1$

Polynomreduzierung durch Horner-Schema

$$\begin{array}{lcccc} & 2 & 6 & 0 & -4 \\ x=-1 & \downarrow & \underline{-2} & \underline{-4} & \underline{4} \\ & 2 & 4 & -4 & 0 \end{array}$$

Reduziertes Polynom: $2x^2+4x-4=0 \,|\, :2$

$\Leftrightarrow x^2+2x-2=0$

$p=2\,;\, q=-2 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+2=3 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{3}$

$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_2=-1+\sqrt{3} \\ x_3=-1-\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\underline{\underline{P_{x1}(-1\,|\,0)\,;\,P_{x2}\left(-1+\sqrt{3}\,|\,0\right);\,P_{x3}\left(-1-\sqrt{3}\,|\,0\right)}}$

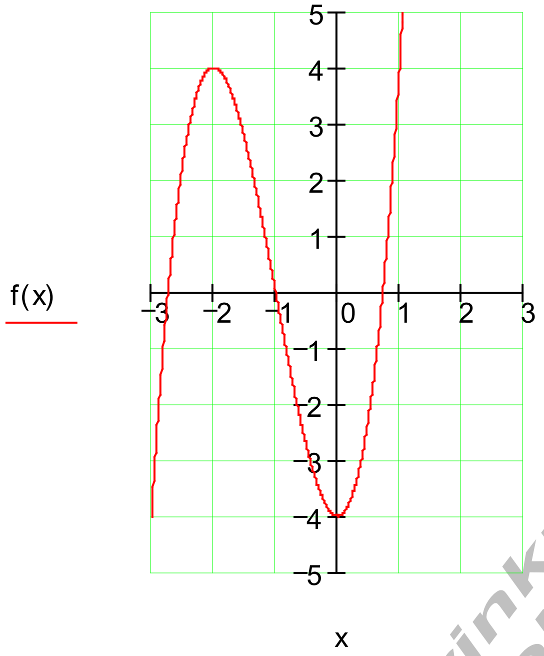
bzw. $P_{x1}(-1\,|\,0)\,;\,P_{x2}(0{,}73\,|\,0)\,;\,P_{x3}(-2{,}73\,|\,0)$

| A6.2 | Ausführliche Lösung |
|---|---|

d) $f(x)=2x^3+6x^2-4$

$x=-3 \Rightarrow f(-3)=2\cdot(-3)^3+6\cdot(-3)^2-4=-4$

| x | −3 | −2,73 | −2 | −1 | 0 | 0,73 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | −4 | 0 | 4 | 0 | −4 | 0 | 4 |

| A6.2 | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| d) |  |



| A6.3 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Gegeben ist folgende Funktion: | $f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$ |
| | a) | Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten. |
| | b) | Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten. |
| | c) | Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte. |
| | d) | Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen. |

A6.3 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie, da nur gerade Exponenten vorkommen.

Es gilt: $f(-x)=f(x)$

**A6.3 Ausführliche Lösung**

**b)**

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x$$

Punkte mit waagerechter Tangente.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}=0\,\Big|+\frac{18}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^2=\frac{18}{5}\,\Big|:\frac{4}{10}$$

$$\Leftrightarrow x^2=9\Rightarrow x_{2/3}=\pm 3$$

An den Stellen $x_1=0$ und $x_2=3$ und $x_3=-3$ gibt es waagerechte Tangenten.

Berechnung der $y-$Koordinaten

$$f(x_1)=f(0)=\frac{81}{10}\qquad\Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(0\,\middle|\,\frac{81}{10}\right)}}\text{ bzw. }P_1(0\,|\,8{,}1)$$

$$f(x_2)=f(3)=\frac{1}{10}\cdot 3^4-\frac{9}{5}\cdot 3^2+\frac{81}{10}=0\Rightarrow\underline{\underline{P_2(3\,|\,0)}}$$

$$f(x_2)=f(-3)=f(3)=0\text{ wegen Achsensymmetrie }\Rightarrow\underline{\underline{P_3(-3\,|\,0)}}$$

**A6.3 Ausführliche Lösung**

**c)**

Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$

$$P_y: f(0)=\frac{81}{10}\Rightarrow\underline{\underline{P_y\left(0\,\middle|\,\frac{81}{10}\right)}}\text{ bzw. }P_y(0\,|\,8{,}1)$$

Nullstellen

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}=0\text{ Substitution: }x^2=z$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{10}z^2-\frac{9}{5}z+\frac{81}{10}=0\,|\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2-18z+81=0$$

$$p=-18\,;\,q=81\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=81-81=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}z_1=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x_{1/2}=\pm 3\\ z_2=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x_{3/4}=\pm 3\end{array}\right.$$

$\underline{\underline{P_{x1/3}(3\,|\,0)\,;\,P_{x2/4}(-3\,|\,0)}}$ Beides sind doppelte Nullstellen.

Das bedeutet, der Graph berührt an diesen Stellen die x- Achse. Solche Berührungspunkte sind immer auch Punkte mit waagerechter Tangente.

**A6.3** Ausführliche Lösung

d)

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{10}\cdot 1^4 - \frac{9}{5}\cdot 1^2 + \frac{81}{10} = 6,4$$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = f(1) = 6,4$ wegen Achsensymmetrie

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{10}\cdot 2^4 - \frac{9}{5}\cdot 2^2 + \frac{81}{10} = 2,5$$

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = f(2) = 2,5$ wegen Achsensymmetrie

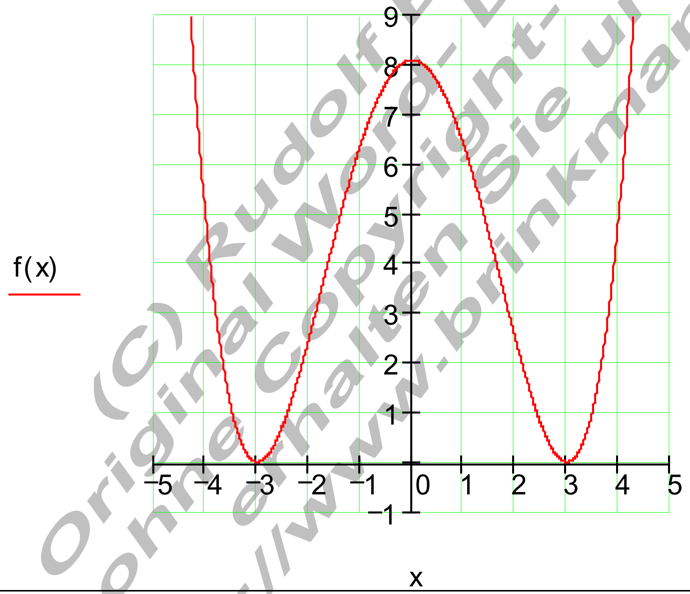
$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{10}\cdot 4^4 - \frac{9}{5}\cdot 4^2 + \frac{81}{10} = 4,9$$

$x = -4 \Rightarrow f(-4) = f(4) = 4,9$ wegen Achsensymmetrie

| x | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 4,9 | 0 | 2,5 | 6,4 | 8,1 | 6,4 | 2,5 | 0 | 4,9 |

**A6.3** Ausführliche Lösung

d)




**A6.4** **Aufgabe**

Gegeben ist folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$

a) Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.

b) Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.

c) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.

d) Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.

**A6.4** Ausführliche Lösung

a)

$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow$ Es liegt keine Symmetrie vor,

da es weder nur gerade Exponenten oder nur ungerade Exponenten gibt.

| A6.4 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | b) | $f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3 \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2$<br>Punkte mit waagerechter Tangente.<br>$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2=0$<br>$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$<br>$\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}=0 \mid +\frac{12}{5}$<br>$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x=\frac{12}{5} \mid :\frac{4}{5}$<br>$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow x_3=3$<br>An den Stellen $x_{1/2}=0$ und $x_3=3$ gibt es waagerechte Tangenten.<br>Berechnung der y – Koordinaten<br>$f(x_1)=f(x_2)=f(0)=0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0\mid 0)}}$<br>$f(x_3)=f(3)=\frac{1}{5}\cdot 3^4-\frac{4}{5}\cdot 3^3=-5{,}4 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(3\mid -5{,}4)}}$ |

| A6.4 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | c) | Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3$<br>$P_y: f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\mid 0)}}$<br>Nullstellen<br>$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3=0$<br>$\Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2/3}=0$<br>$\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0 \mid +\frac{4}{5}$<br>$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x=\frac{4}{5} \mid \cdot 5$<br>$\Leftrightarrow x=4 \Rightarrow x_4=4$<br>$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0\mid 0)\,;\,P_{x4}(4\mid 0)}}$ |

**A6.4 Ausführliche Lösung**

d)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{5} \cdot 1^4 - \frac{4}{5} \cdot 1^3 = -0{,}6$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{5} \cdot (-1)^4 - \frac{4}{5} \cdot (-1)^3 = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{5} \cdot 2^4 - \frac{4}{5} \cdot 2^3 = -3{,}2$$

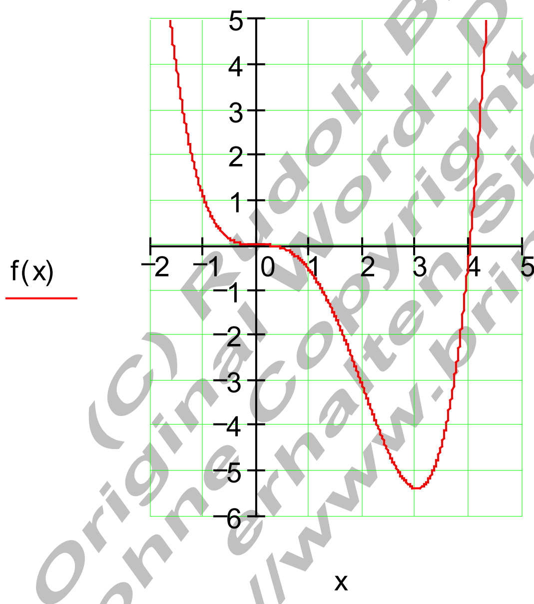
$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{5} \cdot (-2)^4 - \frac{4}{5} \cdot (-2)^3 = 9{,}6$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = \frac{1}{5} \cdot 5^4 - \frac{4}{5} \cdot 5^3 = 25$$

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $9{,}6$ | $1$ | $0$ | $-0{,}6$ | $-3{,}2$ | $-5{,}4$ | $0$ | $25$ |

**A6.4 Ausführliche Lösung**

d)




Bemerkung:

An der Stelle x = 0 hat der Graph von f(x) zwar eine waagerechte Tangente, es liegt dort aber weder ein Hochpunkt, noch ein Tiefpunkt vor.

Das bedeutet, Stellen mit waagerechten Tangenten müssen nicht zwangsläufig Extrempunkte sein. Aber Extrempunkte haben immer waagerechte Tangenten.

| A7 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades: $f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}$ | |
| | a) | Ist der Funktionsgraph symmetrisch? Falls ja, welcher Art ist die Symmetrie? Begründen Sie Ihre Entscheidung. |
| | b) | Berechnen sie die relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte). |
| | c) | Berechnen Sie die Wendepunkte und die Funktionsgleichungen der Wendetangenten. |
| | d) | Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte. |
| | e) | Stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf. |
| | f) | Zeichnen Sie den Graphen möglichst genau in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. (Falls nötig, erweitern Sie dazu Ihre Wertetabelle um einige Punkte. Gezeichnet werden soll im Intervall I = [ -5 ; 5 ] Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.) |

| A7 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | a) | Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y – Achse, da nur gerade Exponenten auftreten. |

**A7 Ausführliche Lösung**

b) Extrempunkte

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=12\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

$x_1=0$ und $x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$ sind Stellen mit waagerechter Tangente.

$$f''(x_1)=f''(0)=-\frac{3}{2}<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''\left(\pm\sqrt{12}\right)=\frac{3}{8}\cdot 12-\frac{3}{2}=\frac{36}{8}-\frac{3}{2}=3>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

$$f(x_1)=f(0)=\frac{9}{2}\qquad f(x_{2/3})=\frac{1}{32}\cdot 144-\frac{3}{4}\cdot 12+\frac{9}{2}=0$$

$$P_{max}(0\,|\,4,5)\qquad P_{min1}\left(-\sqrt{12}\approx-3,46\,|\,0\right)\qquad P_{min2}\left(\sqrt{12}\approx 3,46\,|\,0\right)$$

| A7 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | c) | Wendepunkte und Wendetangenten |
| | | $f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{4}x$ |
| | | $f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm2$ |
| | | $x_{1/2}=\pm2$ sind mögliche Wendestellen. |
| | | $f'''(x_{1/2})=f'''(\pm2)=\frac{3}{4}\cdot(\pm2)\neq0\Rightarrow$ Wendestellen bei $x_{1/2}=\pm2$ |
| | | $f(x_{1/2})=f(\pm2)=\frac{1}{32}\cdot16-\frac{3}{4}\cdot4+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}=2$ |
| | | $P_{W1}(-2\mid2)$ $P_{W2}(2\mid2)$ sind die Wendepunkte. |
| | | Wendetangenten: |
| | | $x_0=-2\Rightarrow f(x_0)=f(-2)=2$ $f'(x_0)=f'(-2)=-\frac{1}{8}\cdot8+\frac{3}{2}\cdot2=2$ |
| | | $t_1(x)=2(x+2)+2=\underline{\underline{2x+6}}$ |
| | | $x_0=2\Rightarrow f(x_0)=f(2)=2$ $f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{8}\cdot8-\frac{3}{2}\cdot2=-2$ |
| | | $t_2(x)=-2(x-2)+2=\underline{\underline{-2x+6}}$ |

| A7 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | d) | Achsenschnittpunkte |
| | | $f(0)=\frac{9}{2}\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\mid\frac{9}{2}\right)}}$ |
| | | $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}=0$ (biquadratische Gleichung) |
| | | $x^2=z\Rightarrow\frac{1}{32}z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{2}=0\mid\cdot32\Leftrightarrow z^2-24z+144=0$ |
| | | $p=-24$ $q=144$ $\Rightarrow D=144-144=0\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{0}=0$ |
| | | $z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=12\pm0=12$ |
| | | $z_1=x^2\Leftrightarrow12=x^2\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{12}$ $z_2=x^2\Leftrightarrow12=x^2\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{12}$ |
| | | $\underline{\underline{P_{x1/3}\left(\sqrt{12}\approx3,46\mid0\right)}}$ $\underline{\underline{P_{x1/3}\left(-\sqrt{12}\approx-3,46\mid0\right)}}$ |

| A7 | Ausführliche Lösung |
|---|---|

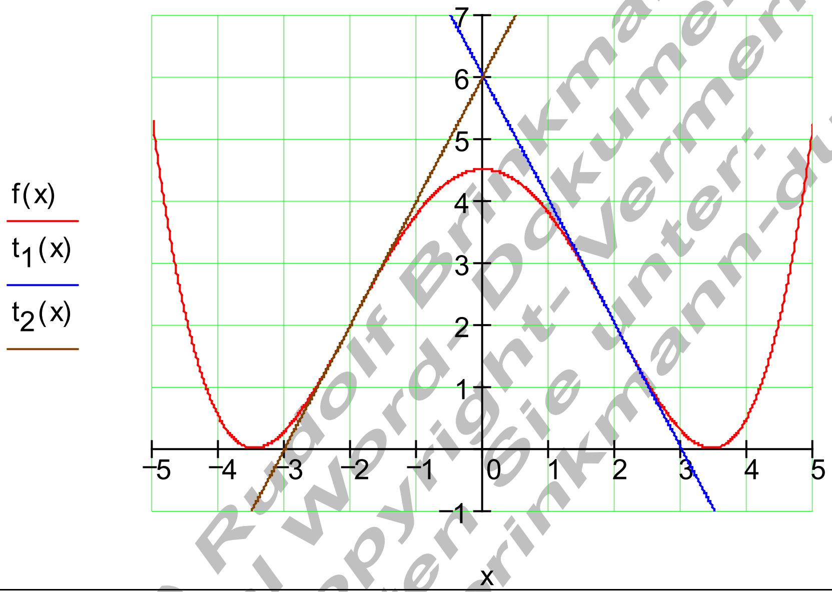
e) Wertetabelle
Funktionswerte wurden mit dem Taschenrechner berechnet.
Aus Symmetriegründen reicht es, nur die Funktionswerte für positive x-Werte zu berechnen.

| x | $-5$ | $-4$ | $-\sqrt{12}\approx -3,46$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5,28 | 0,5 | 0 | 0,28 | 2 | 3,78 | 4,5 |

| x | 1 | 2 | 3 | $\sqrt{12}\approx 3,46$ | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3,78 | 2 | 0,28 | 0 | 0,5 | 5,28 |

| A7 | Ausführliche Lösung |
|---|---|

f)

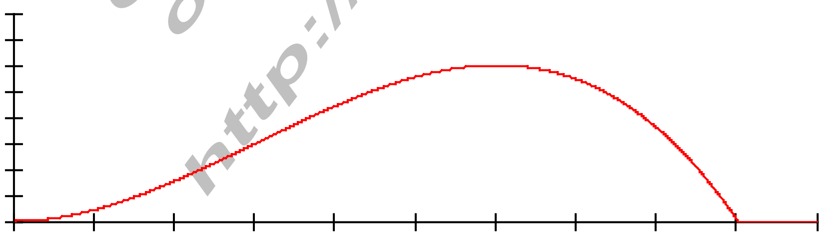





| A8 | **Aufgabe** |
|---|---|

Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve des Balls bei einem Freistoß in einem Fußballspiel.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \; ; \; x > 0$$



a) Welche maximale Höhe erreicht der Ball und wie weit ist er dann vom Abschusspunkt entfernt?

b) Wie weit vom Abschusspunkt kommt der Ball wieder auf den Boden?

c) In einer Entfernung von 9 Metern befindet sich die Spielerabwehrmauer, sie ist 2 m hoch. Überfliegt der Ball diese?

d) Der Ball überfliegt die Torlinie in 2 m Höhe. In welcher Entfernung von der Torlinie wurde der Freistoß ausgeführt?

| A8 | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| a) | $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x$ <br> Maximale Höhe des Balls entspricht dem Hochpunkt der Flugbahn, also ist ein Punkt mit waagerechter Tangente. <br> $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x = 0$ <br> $\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ <br> $-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8} = 0 \mid +\frac{1}{96}x$ <br> $\Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{96}x \mid \cdot 96$ <br> $\Leftrightarrow 12 = x \Rightarrow x_2 = 12$ <br> $f(12) = -\frac{1}{288}\cdot 12^3 + \frac{1}{16}\cdot 12^2 = 3 \Rightarrow P(12 \mid 3)$ ist Hochpunkt <br> Der Ball erreicht eine maximale Höhe von 3 m und ist dann 12 m vom Abschusspunkt entfernt. |

| A8 | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| b) | $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$ <br> Zu bestimmen ist die Nullstelle. <br> $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 0$ <br> $\Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$ <br> $-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} = 0 \mid +\frac{1}{288}x$ <br> $\Leftrightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{288}x \mid \cdot 288$ <br> $\Leftrightarrow \frac{288}{16} = x \Rightarrow x_3 = 18$ <br> Der Ball kommt in einer Entfernung von 18 m vom Abschusspunkt wieder auf den Boden. |

| A8 | Ausführliche Lösung |
|---|---|
| c) | $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$ <br> Gesucht ist die Ballhöhe in einer Entfernung von 9 m vom Abschusspunkt. <br> $f(9) = -\frac{1}{288}\cdot 9^3 + \frac{1}{16}\cdot 9^2 \approx 2{,}53$ <br> Der Ball überfliegt die 2 m hohe Abwehrmauer in einer Höhe von etwa 2,53 m. |

| A8 | Ausführliche Lösung | |
|---|---|---|
| | d) | $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$<br>Gesucht ist die Stelle, an der der Ball eine Flughöhe von 2 m hat.<br>$f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2$<br>Lösung durch probieren.<br>$f(15) \approx 2{,}344$<br>$f(15{,}5) \approx 2{,}086$<br>$f(15{,}6) \approx 2{,}028$<br>$\boxed{f(15{,}65) \approx 1{,}998}$<br>Der Freistoß wurde in einer Entfernung von etwa 15,65 m von der Torlinie ausgeführt. |