Aufgaben Differenzialrechnung zur Vorbereitung der Klassenarbeit IV

1.	Parabel durch 3 Punkte.	
	a)	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x) der Parabel, die durch folgende Punkte verläuft: $P_1(-4\,|\,-2)\quad P_2(-2\,|\,-4)\quad P_3(2\,|\,4)$
	b)	Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.
	c)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von f(x).
	d)	Zeichnen Sie die Graphen von f(x) und f'(x) in ein Koordinatensystem.

2.	Theoriefragen.	
	a)	Was verstehen Sie unter der Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt?
	b)	Beschreiben Sie anschaulich (Skizze) und mit Worten, wie man bei einem Graphen von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung gelangt.
	c)	Welche Bedeutung hat die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0?
	d)	Warum nennt man die Ableitungsfunktion auch Steigungsfunktion?

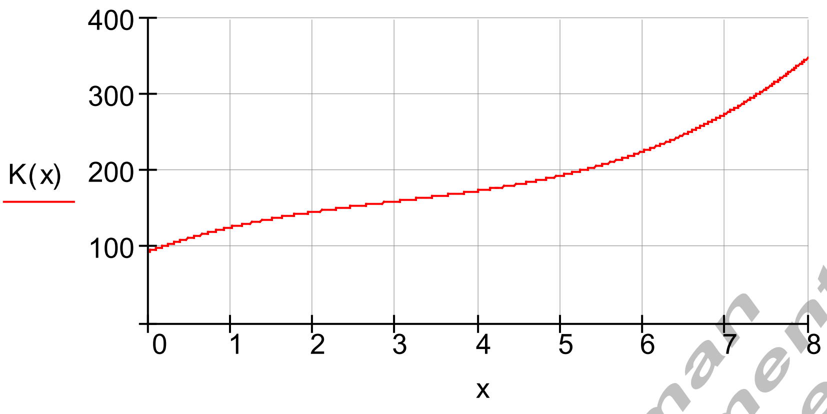
3.	Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+7$	
	a)	Die Gleichungen von Tangente und Normale sollen für $x_0 = 2$ berechnet werden.
	b)	Tangente und Normale bilden mit der x- Achse zusammen ein Dreieck. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

4.	Der Graph einer ganzrationalen Funktion geht durch die Punkte $P_1(-1\,|\,7)\quad P_2(-2\,|\,6)\quad P_3(3\,|\,1)\quad P_4(-3\,|\,-2)$ Berechnen Sie die Funktionsgleichung, die Extrempunkte, den Wendpunkt und die Achsenschnittpunkte. Stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen so genau wie möglich in ein geeignetes Koordinatensystem. Falls Ihnen zum Zeichnen Punkte fehlen, so berechnen Sie diese.

5.	Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades: $f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}$	
	a)	Ist der Funktionsgraph symmetrisch? Falls ja, welcher Art ist die Symmetrie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
	b)	Berechnen sie die relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte).
	c)	Berechnen Sie die Wendepunkte und die Funktionsgleichungen der Wendetangenten.
	d)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
	e)	Stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf.
	f)	Zeichnen Sie den Graphen möglichst genau in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. (Falls nötig, erweitern Sie dazu Ihre Wertetabelle um einige Punkte. Gezeichnet werden soll im Intervall I = [-5 ; 5] Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.)
	g)	Machen Sie eine Aussage über das Monotonieverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für monoton steigend, bzw. monoton fallend an.
	h)	Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für Rechts- bzw. Linkskrümmung an.
	i)	Bestimmen Sie die Randpunkte des Definitionsbereiches.

6. Die Kostenfunktion K(x) eines Krankenhauses stellt den Zusammenhang zwischen der Patientenzahl x und den Gesamtkosten dar.
x = 1 bedeutet 100 Patienten, y = 1 bedeutet 1000 € / Tag.

$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$



a) Übertragen Sie die Kostenfunktion in Ihr Heft.
Die Ableitung der Kostenfunktion bezeichnet man als ***Differenzialkosten*** oder auch als ***Grenzkosten***. Sie beschreibt die Kostenzunahme in Abhängigkeit von der Patientenzahl. (Steigung von K(x)).
Bestimmen Sie K'(x) und zeichnen Sie den Graphen in das Koordinatensystem.

b) Für welche Patientenzahl ist die Kostenzunahme am geringsten?
Berechnen Sie diesen Wert.

7. Die Gesamtkosten eines Betriebes werden bei einer maximalen Ausbringungsmenge von 10 ME beschrieben durch K(x).
Der Verkaufspreis pro ME beträgt 28 GE.

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$

a) Bestimmen Sie die Ableitung der Kostenfunktion (Differenzialkostenfunktion oder Grenzkostenfunktion) und zeichnen Sie den Graphen.
Beschreiben Sie den Graphen.

b) Berechnen Sie die minimalen Differenzialkosten

c) Beweisen Sie, dass die Differenzialkosten für jede Ausbringungsmenge positiv sind.

d) In welchem Bereich kann man mit Gewinn rechnen?

e) In welchem Bereich nimmt der Gewinn zu?

8. Ein Stein wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben geworfen.

Für den Weg gilt: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$

Für die Geschwindigkeit: $v(t) = s'(t)$

a) Nach welcher Zeit t ist die Geschwindigkeit des Steins Null?

b) Berechnen Sie die maximale Steighöhe.

9. Der Graph einer ganzrationalen Funktion geht durch die Punkte

$P_1(-1|-16)$ $P_2(2|11)$ $P_3(4|-11)$ $P_4(6|-9)$

Berechnen Sie die Funktionsgleichung, die Extrempunkte, Wendpunkt, Wendetangente und die Achsenschnittpunkte. Stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen so genau wie möglich in ein geeignetes Koordinatensystem. Machen Sie eine Symmetriebetrachtung und untersuchen Sie Krümmungsverhalten, Monotonie und Randpunkte des Definitionsbereiches.