Lösungen Differenzialrechnung zur Vorbereitung der Klassenarbeit III

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**
	Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades: $f(x)=x^3+x^2-4x-1$
a)	Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion $f'(x)$
b)	Leiten Sie die Funktion $f'(x)$ nochmal ab, so dass daraus die Funktion $f''(x)$ entsteht.
c)	Berechnen Sie die fehlenden Werte der Wertetabelle.
d)	Zeichnen Sie die Graphen von $f(x);f'(x)$ und $f''(x)$ in das vorgegebene Koordinatensystem.

A1	Ausführliche Lösungen
a)	$f'(x)=3x^2+2x-4$
b)	$f''(x)=6x+2$

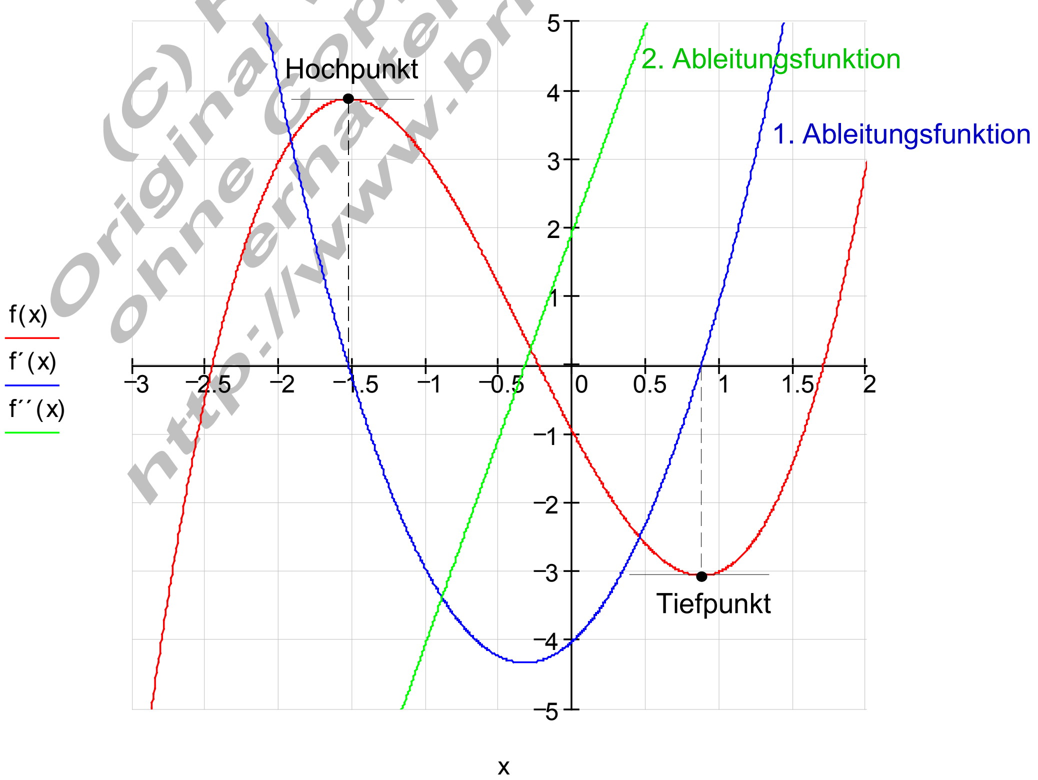
c)

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$	-7	$-0,38$	3	$3,88$	3	$1,13$	-1	$-2,63$	-3	$-1,38$	3
$f'(x)$	17	$9,75$	4	$-0,25$	-3	$-4,25$	-4	$-2,25$	1	$5,75$	12
$f''(x)$	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14

A1	Ausführliche Lösung

d)

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4 \qquad f''(x) := 6x + 2$



A2.1	**Aufgabe**		
	Gegeben ist folgende Funktion:		$f(x)=2x^3-6x$
	a)	Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.	
	b)	Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.	
	c)	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.	
	d)	Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.	

A2.1 Ausführliche Lösung

a) $f(x)=2x^3-6x$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrie, da nur ungerade Exponenten vorkommen.

Es gilt: $f(-x)=-f(x)$

A2.1 Ausführliche Lösung

b) $f(x)=2x^3-6x \Rightarrow f'(x)=6x^2-6$

Punkte mit waagerechter Tangente.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6=0\,|+6$$
$$\Leftrightarrow 6x^2=6\,|:6$$
$$\Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x_1=1;x_2=-1$$

An den Stellen $x_1=1$ und $x_2=-1$ gibt es waagerechte Tangenten.

Berechnung der $y-$Koordinaten

$$f(x_1)=f(1)=2\cdot 1^2-6\cdot 1=-4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(1\,|-4)}}$$
$$f(x_2)=f(-1)=2\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1\,|\,4)}}$$

A2.1 Ausführliche Lösung

c) Achsenschnittpunkte von $f(x)=2x^3-6x$

$P_y: f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$

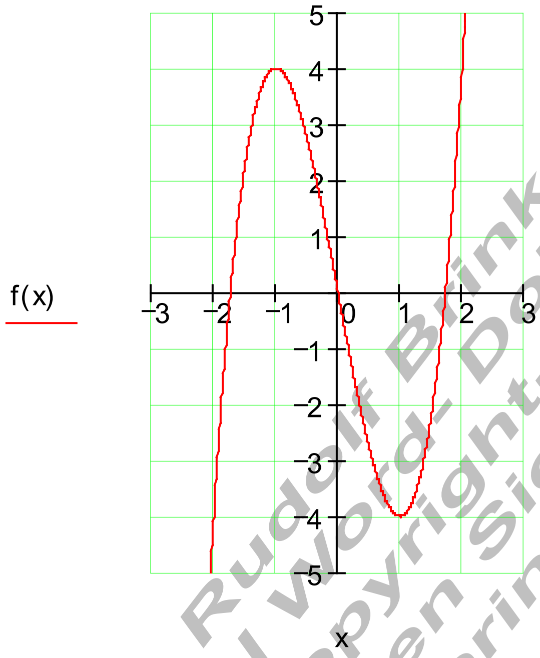
Nullstellen

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-6x=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(2x^2-6\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$
$$2x^2-6=0\,|+6$$
$$\Leftrightarrow 2x^2=6\,|:2$$
$$\Leftrightarrow x^2=3 \Rightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(0\,|\,0)\,;\,P_{x2}\left(\sqrt{3}\,|\,0\right)\,;\,P_{x3}\left(-\sqrt{3}\,|\,0\right)}}$$

A2.1	Ausführliche Lösung
d)	$f(x)=2x^3-6x$ $x=2 \quad \Rightarrow f(2)=2\cdot 2^3-6\cdot 2=4$ $x=-2 \Rightarrow f(-2)=-f(2)=-4$ wegen Punktsymmetrie

x	−2	−1,73	−1	0	1	1,73	2
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4

A2.1	Ausführliche Lösung
d)	

A2.2	**Aufgabe**
Gegeben ist folgende Funktion:	$f(x)=2x^3+6x^2-4$
a)	Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.
b)	Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.
c)	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
d)	Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.

A2.2	Ausführliche Lösung
a)	$f(x)=2x^3+6x^2-4 \Rightarrow$ Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade Exponenten oder nur ungerade Exponenten gibt.

A2.2	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(x)=2x^3+6x^2-4 \Rightarrow f'(x)=6x^2+12x$ Punkte mit waagerechter Tangente. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+12x=0$ $\Leftrightarrow x(6x+12)=0 \Rightarrow x_1=0$ $6x+12=0 \mid -12$ $\Leftrightarrow 6x=-12 \mid :6$ $\Leftrightarrow x_2=-2$ An den Stellen $x_1=0$ und $x_2=-2$ gibt es waagerechte Tangenten. Berechnung der y – Koordinaten $f(x_1)=f(0)=-4 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0 \mid -4)}}$ $f(x_2)=f(-2)=2(-2)^3+6(-2)^2-4=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-2 \mid 4)}}$

A2.2	Ausführliche Lösung	
	c)	Achsenschnittpunkte von $f(x)=2x^3+6x^2-4$ $P_y : f(0)=-4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid -4)}}$ Nullstellen $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+6x^2-4=0$ Eine Nullstelle wird durch probieren gefunden $x=1 \Rightarrow f(1)=2\cdot 1^3+6\cdot 1^2-4=4$ $x=-1 \Rightarrow f(-1)=2\cdot(-1)^3+6\cdot(-1)^2-4=0$ Nullstelle bei $x_1=-1$ Polynomreduzierung durch Horner-Schema $\begin{array}{cccccc} & & 2 & 6 & 0 & -4 \\ x=-1 & \downarrow & & \underline{-2} & \underline{-4} & \underline{4} \\ & & 2 & 4 & -4 & 0 \end{array}$ Reduziertes Polynom: $2x^2+4x-4=0 \mid :2$ $\Leftrightarrow x^2+2x-2=0$ $p=2\,;\, q=-2 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+2=3 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{3}$ $x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left\vert \begin{array}{l} x_2=-1+\sqrt{3} \\ x_3=-1-\sqrt{3} \end{array} \right.$ $\underline{\underline{P_{x1}(-1 \mid 0)\,;\, P_{x2}(-1+\sqrt{3} \mid 0)\,;\, P_{x3}(-1-\sqrt{3} \mid 0)}}$ bzw. $P_{x1}(-1 \mid 0)\,;\, P_{x2}(0,73 \mid 0)\,;\, P_{x3}(-2,73 \mid 0)$

A2.2 Ausführliche Lösung

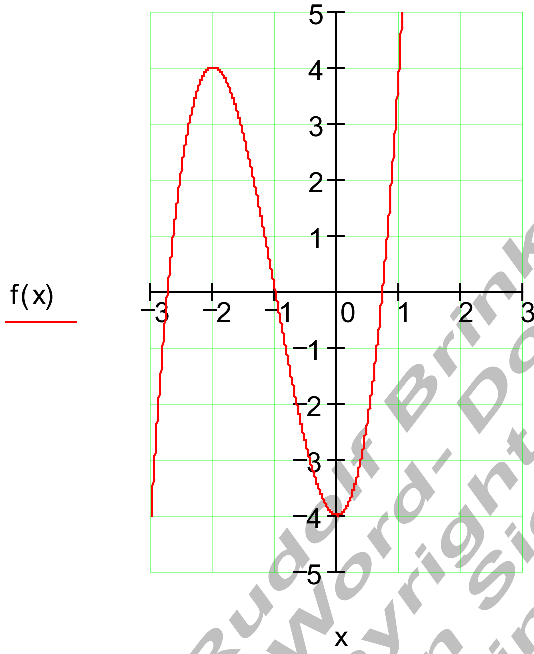
d) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$

$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 4 = -4$

x	−3	−2,73	−2	−1	0	0,73	1
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4

A2.2 Ausführliche Lösung

d)



A2.3 Aufgabe

Gegeben ist folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$

a) Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.

b) Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.

c) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.

d) Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.

A2.3 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie, da nur gerade Exponenten vorkommen.

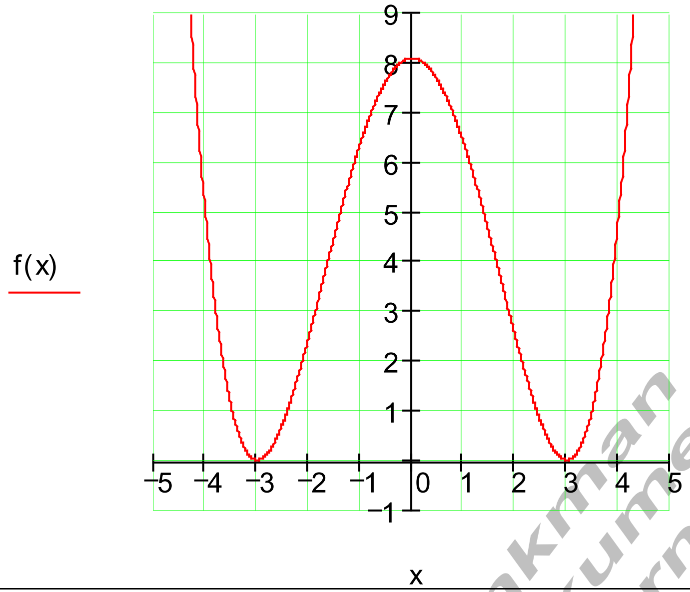
Es gilt: $f(-x) = f(x)$

A2.3	Ausführliche Lösung
	b) $f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x$ Punkte mit waagerechter Tangente. $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x=0$ $\Leftrightarrow x\left(\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}\right)=0\Rightarrow x_1=0$ $\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}=0\mid+\frac{18}{5}$ $\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^2=\frac{18}{5}\mid:\frac{4}{10}$ $\Leftrightarrow x^2=9\Rightarrow x_{2/3}=\pm3$ An den Stellen $x_1=0$ und $x_2=3$ und $x_3=-3$ gibt es waagerechte Tangenten. Berechnung der $y-$Koordinaten $f(x_1)=f(0)=\frac{81}{10}\Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(0\mid\frac{81}{10}\right)}}$ bzw. $P_1(0\mid 8{,}1)$ $f(x_2)=f(3)=\frac{1}{10}\cdot3^4-\frac{9}{5}\cdot3^2+\frac{81}{10}=0\Rightarrow\underline{\underline{P_2(3\mid0)}}$ $f(x_2)=f(-3)=f(3)=0$ wegen Achsensymmetrie $\Rightarrow\underline{\underline{P_3(-3\mid0)}}$

A2.3	Ausführliche Lösung	
	c)	Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$ $P_y: f(0)=\frac{81}{10}\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,\middle\|\,\frac{81}{10}\right)}}$ bzw. $P_y(0\,\|\,8{,}1)$ Nullstellen $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}=0$ Substitution: $x^2=z$ $\Leftrightarrow \frac{1}{10}z^2-\frac{9}{5}z+\frac{81}{10}=0\,\|\cdot 10$ $\Leftrightarrow z^2-18z+81=0$ $p=-18\ ;\ q=81\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=81-81=0$ $z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ | $z_1=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x_{1/2}=\pm3$ $z_2=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x_{3/4}=\pm3$ $\underline{\underline{P_{x1/3}(3\,\|\,0)\ ;\ P_{x2/4}(-3\,\|\,0)}}$ Beides sind doppelte Nullstellen. Das bedeutet, der Graph berührt an diesen Stellen die x- Achse. Solche Berührungspunkte sind immer auch Punkte mit waagerechter Tangente.

A2.3	Ausführliche Lösung	
	d)	$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$ $x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{10}\cdot1^4-\frac{9}{5}\cdot1^2+\frac{81}{10}=6{,}4$ $x=-1\Rightarrow f(-1)=f(1)=6{,}4$ wegen Achsensymmetrie $x=2\Rightarrow f(2)=\frac{1}{10}\cdot2^4-\frac{9}{5}\cdot2^2+\frac{81}{10}=2{,}5$ $x=-2\Rightarrow f(-2)=f(2)=2{,}5$ wegen Achsensymmetrie $x=4\Rightarrow f(4)=\frac{1}{10}\cdot4^4-\frac{9}{5}\cdot4^2+\frac{81}{10}=4{,}9$ $x=-4\Rightarrow f(-4)=f(4)=4{,}9$ wegen Achsensymmetrie

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
f(x)	4,9	0	2,5	6,4	8,1	6,4	2,5	0	4,9

A2.3	Ausführliche Lösung	
	d)	

A2.4	**Aufgabe**	
	Gegeben ist folgende Funktion:	$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3$
	a)	Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.
	b)	Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.
	c)	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
	d)	Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.

A2.4	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3 \Rightarrow$ Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade Exponenten oder nur ungerade Exponenten gibt.

A2.4 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3 \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2$$

Punkte mit waagerechter Tangente.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$$

$$\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}=0 \mid +\frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x=\frac{12}{5} \mid : \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow x_3=3$$

An den Stellen $x_{1/2}=0$ und $x_3=3$ gibt es waagerechte Tangenten.

Berechnung der y – Koordinaten

$$f(x_1)=f(x_2)=f(0)=0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0\mid 0)}}$$

$$f(x_3)=f(3)=\frac{1}{5}\cdot 3^4-\frac{4}{5}\cdot 3^3=-5{,}4 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(3\mid -5{,}4)}}$$

A2.4 Ausführliche Lösung

c)

Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3$

$$P_y: f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\mid 0)}}$$

Nullstellen

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3=0$$

$$\Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2/3}=0$$

$$\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0 \mid +\frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x=\frac{4}{5} \mid \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow x=4 \Rightarrow x_4=4$$

$$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0\mid 0)\,;\,P_{x4}(4\mid 0)}}$$

A2.4 Ausführliche Lösung

d)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{5} \cdot 1^4 - \frac{4}{5} \cdot 1^3 = -0,6$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{5} \cdot (-1)^4 - \frac{4}{5} \cdot (-1)^3 = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{5} \cdot 2^4 - \frac{4}{5} \cdot 2^3 = -3,2$$

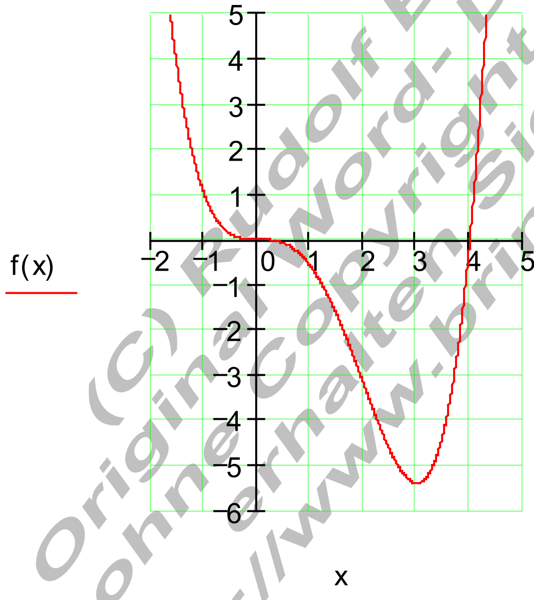
$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{5} \cdot (-2)^4 - \frac{4}{5} \cdot (-2)^3 = 9,6$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = \frac{1}{5} \cdot 5^4 - \frac{4}{5} \cdot 5^3 = 25$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$9,6$	1	0	$-0,6$	$-3,2$	$-5,4$	0	25

A2.4 Ausführliche Lösung

d)



Bemerkung:

An der Stelle x = 0 hat der Graph von f(x) zwar eine waagerechte Tangente, es liegt dort aber weder ein Hochpunkt, noch ein Tiefpunkt vor.

Das bedeutet, Stellen mit waagerechten Tangenten müssen nicht zwangsläufig Extrempunkte sein. Aber Extrempunkte haben immer waagerechte Tangenten.

A3.1	**Aufgabe**	
	Eine ganzrationale Funktion verläuft durch folgende 4 Punkte:	$P_1(-1\mid 7);P_2(-2\mid 6);P_3(3\mid 1);P_4(-3\mid -2)$
	a)	Berechnen Sie die Funktionsgleichung.
	b)	Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.
	c)	Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.
	d)	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
	e)	Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.

A3.1 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$P_1(-1\mid 7)\Rightarrow f(-1)=-1\cdot a_3+1\cdot a_2-1\cdot a_1+1\cdot a_0=7$$

$$P_2(-2\mid 6)\Rightarrow f(-2)=-8\cdot a_3+4\cdot a_2-2\cdot a_1+1\cdot a_0=6$$

$$P_3(3\mid 1)\Rightarrow f(3)=27\cdot a_3+9\cdot a_2+3\cdot a_1+1\cdot a_0=1$$

$$P_4(-3\mid -2)\Rightarrow f(-3)=-27\cdot a_3+9\cdot a_2-3\cdot a_1+1\cdot a_0=-2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	$\vert\cdot(-1)$
0	4	8	28	−6	$\vert:4$
0	−2	8	−26	−9	$\vert:(-2)$
1	−1	1	−1	7	
0	1	−3	7	1	
0	1	2	7	−1,5	III − II
0	1	−4	13	4,5	IV − II
1	−1	1	−1	7	
0	1	−3	7	1	
0	0	5	0	−2,5	
0	0	−1	6	3,5	

$$5a_2=-2,5\mid:5$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2=-0,5=-\frac{1}{2}}$$

$$-a_2+6a_3=3,5$$

$$\Leftrightarrow 0,5+6a_3=3,5\mid-0,5$$

$$\Leftrightarrow 6a_3=3\mid:6$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_3=0,5=\frac{1}{2}}$$

$$a_1-3a_2+7a_3=1$$

$$\Leftrightarrow a_1+1,5+3,5=1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1=1-1,5-3,5=-4}$$

$$a_0-a_1+a_2-a_3=7$$

$$\Leftrightarrow a_0+4-0,5-0,5=7$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_0=7-4+0,5+0,5=4}$$

$$\underline{\underline{f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4}}$$

A3.1 Ausführliche Lösung

b) $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4\Rightarrow$ Es liegt keine Symmetrie vor,

da es weder nur gerade Exponenten oder nur ungerade Exponenten gibt.

A3.1	Ausführliche Lösung
	c) $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4$ Punkte mit waagerechter Tangente. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2-x-4=0 \mid :\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}=0$ $p=-\frac{2}{3};\ q=-\frac{8}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{9}+\frac{24}{9}=\frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$ $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\quad x_1=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=\frac{6}{3}=2$, $\quad x_2=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}$ An den Stellen $x_1=2$ und $x_2=-4/3$ gibt es waagerechte Tangenten. Berechnung der y-Koordinaten $f(x_1)=f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^2-4\cdot 2+4=-2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(2\mid -2)}}$ $f(x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+4=\frac{196}{27}$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(-\frac{4}{3}\approx -1{,}33 \mid \frac{196}{27}\approx 7{,}26\right)}}$

A3.1	Ausführliche Lösung

d)

Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$

$P_y: f(0)=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|4)}}$

Nullstellen

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4=0$

$$\begin{array}{ccccc|l} & 1/2 & -1/2 & -4 & 4 & \\ x=1 & \downarrow & \underline{1/2} & \underline{0} & -4 & \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ist Nullstelle} \\ & 1/2 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

Restpolynom: $\frac{1}{2}x^2-4=0 \,|+4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=4 \,|\cdot 2$

$\Leftrightarrow x^2=8 \Rightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{8}$

$\underline{\underline{P_{x1}(1|0)\,;\,P_{x2}\left(\sqrt{8}\approx 2{,}83\,|\,0\right)\,;\,P_{x3}\left(-\sqrt{8}\approx -2{,}83\,|\,0\right)}}$

A3.1	Ausführliche Lösung

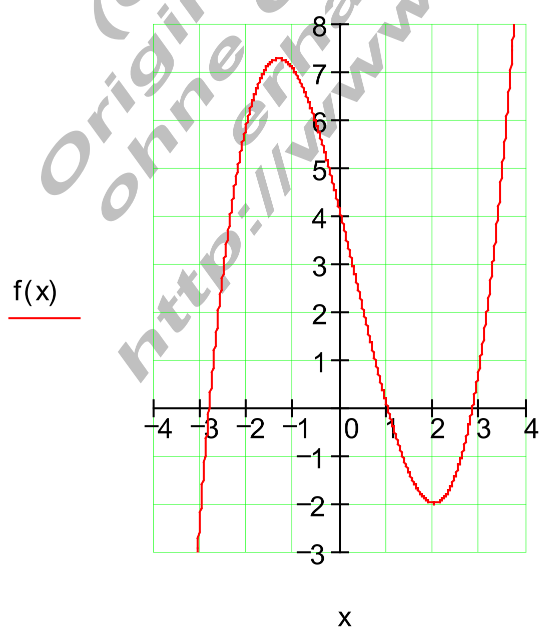
e)

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	1	2	2,83	3
f(x)	−2	0	6	7,26	7	4	0	−2	0	1

A3.1	Ausführliche Lösung

e)



A3.2	**Aufgabe**		
	Eine ganzrationale Funktion verläuft durch folgende 4 Punkte:		$P_1(1\,|\,6)\,;P_2(3\,|\,-4)\,;P_3\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{45}{8}\right);P_4\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,-\frac{77}{8}\right)$
	a)	Berechnen Sie die Funktionsgleichung.	
	b)	Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.	
	c)	Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.	
	d)	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.	
	e)	Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.	

A3.2 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(1|6) \quad \Rightarrow f(1) = 1\cdot a_3 + 1\cdot a_2 + 1\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 6$

$P_2(3|-4) \quad \Rightarrow f(3) = 27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 + 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -4$

$P_3\left(-\frac{1}{2}\,|\,\frac{45}{8}\right) \quad \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\cdot a_3 + \frac{1}{4}\cdot a_2 - \frac{1}{2}\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = \frac{45}{8}$

$P_3\left(-\frac{3}{2}\,|\,-\frac{77}{8}\right) \quad \Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}\cdot a_3 + \frac{9}{4}\cdot a_2 - \frac{3}{2}\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -\frac{77}{8}$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	$\vert\cdot 8$
1	3	9	27	–4	$\vert\cdot 8$
1	–1/2	1/4	–1/8	45/8	$\vert\cdot 8$
1	–3/2	9/4	–27/8	–77/8	$\vert\cdot 8$
8	8	8	8	48	
8	24	72	216	–32	II – I
8	–4	2	–1	45	III – I
8	–12	18	–27	–77	IV – I
8	8	8	8	48	$\vert:8$
0	16	64	208	–80	$\vert:4$
0	–12	–6	–9	–3	$\vert:3$
0	–20	10	–35	–125	$\vert:5$
1	1	1	1	6	
0	4	16	52	–20	$\vert:4$
0	–4	–2	–3	–1	III + II
0	–4	2	–7	–25	IV + II
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	–5	
0	0	14	49	–21	$\vert:7$
0	0	18	45	–45	$\vert:9$
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	–5	
0	0	2	7	–3	
0	0	2	5	–5	IV – III
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	–5	
0	0	2	7	–3	
0	0	0	–2	–2	

$-2a_3 = -2 \,|:(-2)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 + 7a_3 = -3$

$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \,|-7$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \,|:2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$

$a_1 + 4a_2 + 13a_3 = -5$

$\Leftrightarrow a_1 - 20 + 13 = -5 \,|+7$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$

$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6 \,|+2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$

$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$

A3.2	Ausführliche Lösung
b)	$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow$ Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade Exponenten oder nur ungerade Exponenten gibt.

A3.2 Ausführliche Lösung

c)

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$

Punkte mit waagerechter Tangente.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 2 = 0 \,|:3$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$p = -\frac{10}{3};\ q = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{9} - \frac{6}{9} = \frac{19}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{19}{9}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 3{,}12 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 0{,}214 \end{array} \right.$$

An den Stellen $x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}$ und $x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}$

gibt es waagerechte Tangenten.

Berechnung der y – Koordinaten

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(3{,}12) \approx -4{,}06 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3{,}12 \,|\, -4{,}06)}}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(0{,}214) \approx 8{,}21 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_2(0{,}214 \,|\, 8{,}21)}}$$

A3.2 Ausführliche Lösung

d) Achsenschnittpunkte von $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

$P_y : f(0) = 8 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 8)}}$

Nullstellen

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc|l} & 1 & -5 & 2 & 8 & \\ x = 1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{-4} & \underline{-2} & \\ & 1 & -4 & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -5 & 2 & 8 & \Rightarrow x_1 = -1 \text{ ist Nullstelle} \\ x = -1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{6} & \underline{-8} & \\ & 1 & -6 & 8 & 0 & \end{array}$$

Restpolynom: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$p = -6 \; ; \; q = 8 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$

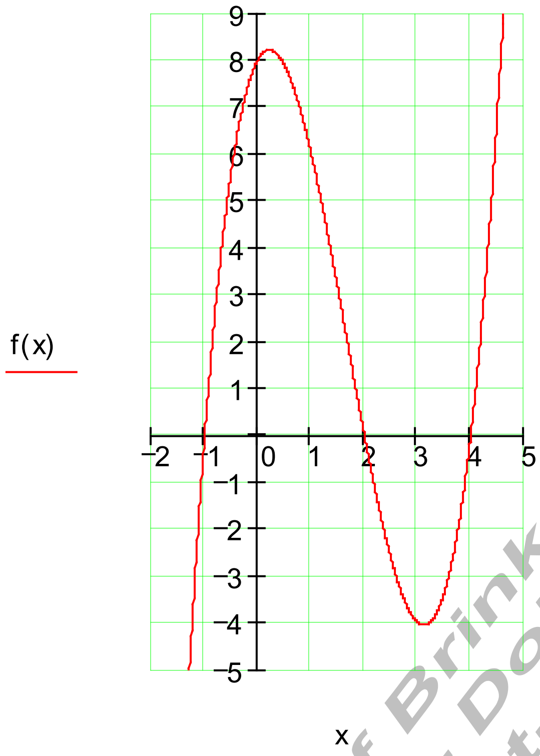
$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 + 1 = 4 \\ x_3 = 3 - 1 = 2 \end{array} \right.$

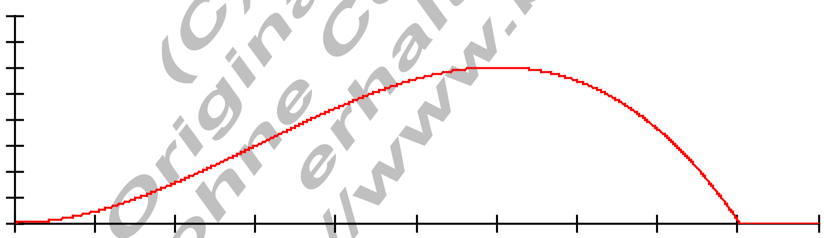
$\underline{\underline{P_{x1}(-1 \mid 0) \; ; \; P_{x2}(4 \mid 0) \; ; \; P_{x3}(2 \mid 0)}}$

A3.2 Ausführliche Lösung

e) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

x	–1,5	–1	–0,5	0	0,21	1	2	3	3,12	4
f(x)	–9,6	0	5,6	8	8,21	6	0	–4	–4,06	0

A3.2	Ausführliche Lösung
	e) 

A4	**Aufgabe**
	Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve des Balls bei einem Freistoß in einem Fußballspiel. $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \, ; x > 0$ 
a)	Welche maximale Höhe erreicht der Ball und wie weit ist er dann vom Abschusspunkt entfernt?
b)	Wie weit vom Abschusspunkt kommt der Ball wieder auf den Boden?
c)	In einer Entfernung von 9 Metern befindet sich die Spielerabwehrmauer, sie ist 2 m hoch. Überfliegt der Ball diese?
d)	Der Ball überfliegt die Torlinie in 2 m Höhe. In welcher Entfernung von der Torlinie wurde der Freistoß ausgeführt?

A4 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x$$

Maximale Höhe des Balls entspricht dem Hochpunkt der Flugbahn, also ist ein Punkt mit waagerechter Tangente.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8} = 0 \mid + \frac{1}{96}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{96}x \mid \cdot 96$$

$$\Leftrightarrow 12 = x \Rightarrow x_2 = 12$$

$$f(12) = -\frac{1}{288}\cdot 12^3 + \frac{1}{16}\cdot 12^2 = 3 \Rightarrow P(12 \mid 3) \text{ ist Hochpunkt}$$

Der Ball erreicht eine maximale Höhe von 3 m und ist dann 12 m vom Abschusspunkt entfernt.

A4 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

Zu bestimmen ist die Nullstelle.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} = 0 \mid + \frac{1}{288}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{288}x \mid \cdot 288$$

$$\Leftrightarrow \frac{288}{16} = x \Rightarrow x_3 = 18$$

Der Ball kommt in einer Entfernung von 18 m vom Abschusspunkt wieder auf den Boden.

A4 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

Gesucht ist die Ballhöhe in einer Entfernung von 9 m vom Abschusspunkt.

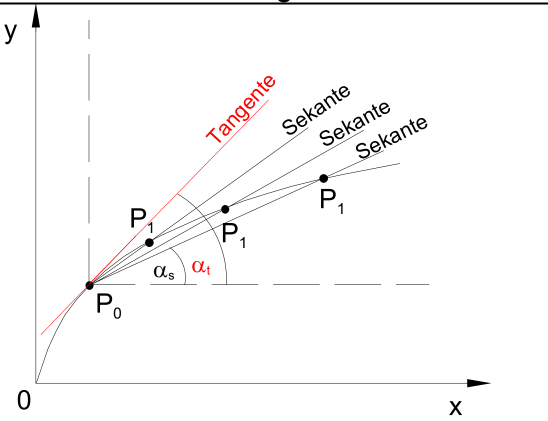
$$f(9) = -\frac{1}{288}\cdot 9^3 + \frac{1}{16}\cdot 9^2 \approx 2{,}53$$

Der Ball überfliegt die 2 m hohe Abwehrmauer in einer Höhe von etwa 2,53 m.

A4	Ausführliche Lösung
d)	$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$ Gesucht ist die Stelle, an der der Ball eine Flughöhe von 2 m hat. $f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2$ Lösung durch probieren. $f(15) \approx 2{,}344$ $f(15{,}5) \approx 2{,}086$ $f(15{,}6) \approx 2{,}028$ $\boxed{f(15{,}65) \approx 1{,}998}$ Der Freistoß wurde in einer Entfernung von etwa 15,65 m von der Torlinie ausgeführt.

5.a	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie für folgende Funktion den Differenzialquotienten und erklären Sie anhand einer Skizze dessen allgemeine Bedeutung.	$f(x) = x^3$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

A5a	Ausführliche Lösung
	$f(x) = x^3 \qquad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ $f(x_0) = x_0^3$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left(3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x}$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} 3x_0^2 + \underbrace{3x_0 \cdot \Delta x}_{\to 0} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\to 0} = 3x_0^2$

A5a	Ausführliche Lösung	
		Legt man den Punkt P_1 näher an P_0, so entspricht die Steigung der neuen Sekante schon eher der Steigung der Funktion im Punkt P_0, die ermittelt werden soll. Führt man dieses Verfahren konsequent fort, und nähert den Punkt P_1 immer mehr dem Punkt P_0 an, so entsteht als Grenzlage eine Gerade, die den Funktionsgraphen nur noch im Punkt P_0 berührt, die ***Tangente*** an den Funktionsgraphen im Punkt P_0. Die Steigung der Tangente entspricht dann genau der Steigung des Funktionsgraphen im Punkt P_0.

5.b	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie für folgende Funktion den Differenzialquotienten und erklären Sie anhand einer Skizze dessen allgemeine Bedeutung.	$f(x)=\frac{1}{3}x^2$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

A5b Ausführliche Lösung

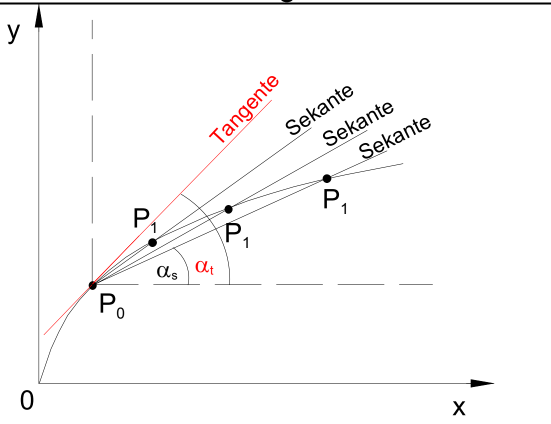
$$f(x)=\frac{1}{3}x^2 \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

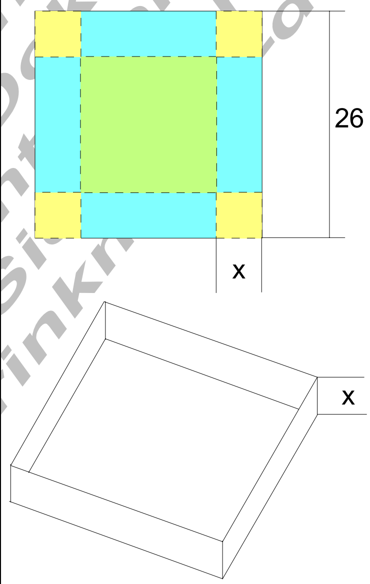
$$f(x_0+\Delta x)=\frac{1}{3}(x_0+\Delta x)^2=\frac{1}{3}\left(x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)$$

$$f(x_0)=\frac{1}{3}x_0^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)-\frac{1}{3}x_0^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{3}\Big(2x_0+\underbrace{\Delta x}_{\to 0}\Big)=\frac{2}{3}x_0$$

A5b	Ausführliche Lösung	
		Legt man den Punkt P_1 näher an P_0, so entspricht die Steigung der neuen Sekante schon eher der Steigung der Funktion im Punkt P_0, die ermittelt werden soll. Führt man dieses Verfahren konsequent fort, und nähert den Punkt P_1 immer mehr dem Punkt P_0 an, so entsteht als Grenzlage eine Gerade, die den Funktionsgraphen nur noch im Punkt P_0 berührt, die ***Tangente*** an den Funktionsgraphen im Punkt P_0. Die Steigung der Tangente entspricht dann genau der Steigung des Funktionsgraphen im Punkt P_0.

A6	**Aufgabe**		
	Aus einem quadratischen Karton der Seitenlänge 26 cm wird durch falten eine Schachtel ohne Deckel mit der Höhe x geformt.		
	a)	Bestimmen Sie einen Funktionsterm, der das Volumen V in Abhängigkeit von x beschreibt.	
	b)	Zeichnen Sie den Graphen und bestimmen Sie das maximale Volumen.	

A6	Ausführliche Lösung	
	a)	Volumen: $V = l \cdot b \cdot h$ $\left.\begin{array}{l} l = 26 - 2x \\ b = 26 - 2x \\ h = x \end{array}\right\vert \Rightarrow V(x) = (26-2x)(26-2x)x = 4x^3 - 104x^2 + 676x$ Das Volumen der Schachtel wird durch den Term einer ganzrationalen Funktion 3. Grades bestimmt. $V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$

A6 Ausführliche Lösung

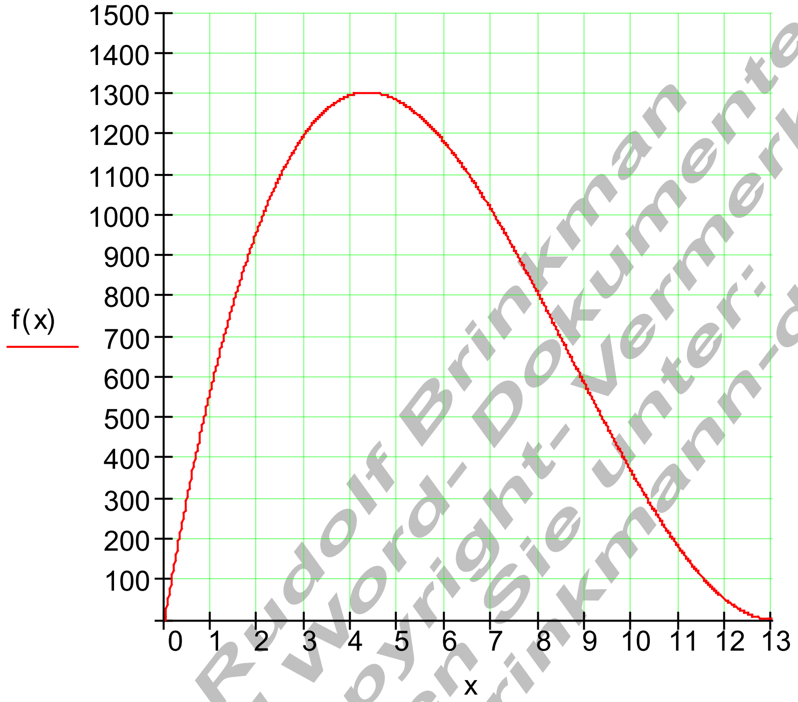
b) $V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$

Wertetabelle:

x	0	2	4	6	8	10	12
f(x)	0	968	1296	1176	800	360	48

A6 Ausführliche Lösung

b)



A6 Ausführliche Lösung

b) Maximales Volumen im Hochpunkt $\Rightarrow$ waagerechte Tangente.

$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 208x + 676$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 208x + 676 = 0$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ergibt $x_1 = 13; x_2 = 13/3 \approx 4,33$

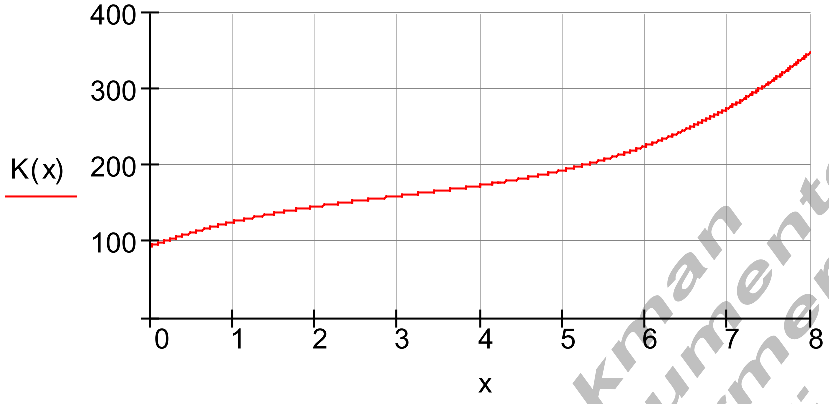
$V\left(\frac{13}{3}\right) \approx 1302$

Bei einer Wahl von $x = 13/3\,\text{cm}$ ist das Volumen der Schachtel maximal.
Es beträgt dann $V \approx 1302\,\text{cm}^3$

A7 Aufgabe

Die Kostenfunktion K(x) eines Krankenhauses stellt den Zusammenhang zwischen der Patientenzahl x und den Gesamtkosten dar.
x = 1 bedeutet 100 Patienten, y = 1 bedeutet 1000 € / Tag.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



a) Übertragen Sie die Kostenfunktion in Ihr Heft.
Die Ableitung der Kostenfunktion bezeichnet man als ***Differenzialkosten*** oder auch als ***Grenzkosten***. Sie beschreibt die Kostenzunahme in Abhängigkeit von der Patientenzahl. (Steigung von K(x)).
Bestimmen Sie K'(x) und zeichnen Sie den Graphen in das Koordinatensystem.

b) Für welche Patientenzahl ist die Kostenzunahme am geringsten? Berechnen Sie diesen Wert.

A7 Ausführliche Lösung

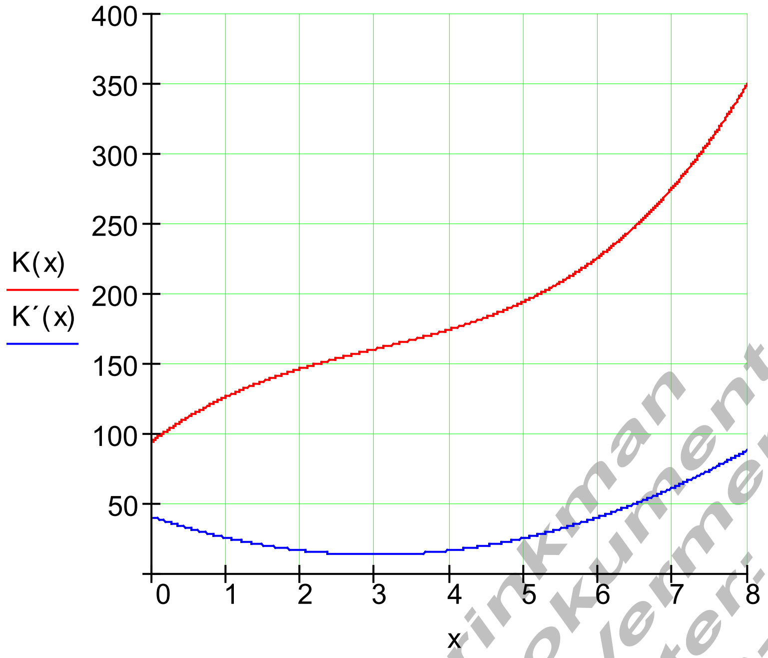
a) $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40	61	88

A7 Ausführliche Lösung

a)



A7 Ausführliche Lösung

b) Der Graph von K'(x) stellt eine Parabel dar, die die Kostenzunahme beschreibt.

Die geringste Kostenzunahme wird über den Scheitelpunkt der Parabel bestimmt.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

Waagerechte Tangente im Scheitelpunkt der Parabel.

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$K'(3) = 13$$

Für eine Patientenzahl von x = 3 (300 Patienten) ist die Kostenzunahme am geringsten. K'(3) = 13 bedeutet 130 € / Tag.

Oder anders ausgedrückt: Kommt zu den 300 Patienten einer dazu, so erhöhen sich die täglichen Kosten um 130 €.

Kontrolle:

Mit dem Umrechnungsfaktor 100 für x und 1000 für K(x) gilt:

Ein Patient mehr bei 300 Patienten bedeutet x = 3,01

Die Mehrkosten für einen zusätzlichen Patienten betragen:

K(3,01) – K(3) = 160,13 – 160 = 0,13

Multipliziert man diesen Wert mit 1000, so ergibt das 130 €/Tag.