# Lösungen Training Differentialrechnung I

## Ergebnisse:

| | |
|---|---|
| E1 | Ergebnis: |
| | $P_{Min}(2\vert -4) \qquad P_{Max}(-2\vert 4)$ |

| | |
|---|---|
| E2 | Ergebnis: |
| | $P_{Min}(0\vert 0) \qquad P_{Max}\left(\frac{8}{3}\approx 2,67 \;\middle\vert\; \frac{128}{27}\approx 4,74\right)$ |

| | |
|---|---|
| E3 | Ergebnis: |
| | $P_{Min}(4\vert 0) \qquad P_{Max}\left(\frac{4}{3}\approx 1,33 \;\middle\vert\; \frac{128}{27}\approx 4,74\right)$ |

| | |
|---|---|
| E4 | Ergebnis: |
| | $P_{Min}(-1\vert 0) \qquad P_{Max}\left(\frac{5}{3}\approx 1,67 \;\middle\vert\; \frac{128}{27}\approx 4,74\right)$ |

| | |
|---|---|
| E5 | Ergebnis: |
| | $P_{Min}(4\vert -6) \qquad P_{Max}(-2\vert 6)$ |

| | |
|---|---|
| E6 | Ergebnis: |
| | $P_{Min}(5\vert 0) \qquad P_{Max}\left(\frac{7}{3}\approx 2,33 \;\middle\vert\; \frac{512}{135}\approx 3,79\right)$ |

| | |
|---|---|
| E7 | Ergebnis: |
| | Es gibt keine Extrempunkte. |

| | |
|---|---|
| E8 | Ergebnis: |
| | $P_{Min}(4\vert -4) \qquad P_{Max}(0\vert 4)$ |

| | |
|---|---|
| E9 | Ergebnis: |
| | Es gibt keine Extrempunkte. |

| | |
|---|---|
| E10 | Ergebnis: |
| | $P_{Min}\left(-1+\sqrt{3}\approx 0,732 \;\middle\vert\; -3,797\right) \qquad P_{Max}\left(-1-\sqrt{3} \;\middle\vert\; 3,131\right)$<br>Bemerkung:<br>Treten als Extremstellen Wurzeln auf, so sollten die Extremwerte mit dem Taschenrechner berechnet werden, da der Rechenaufwand sonst zu groß würde. |

(c) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

## Ausführliche Lösungen:

| A1 | Aufgabe | |
|---|---|---|
| | Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls die Extrempunkte. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion und deren beider Ableitungen in ein Koordinatensystem. | $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$ |

A1 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3 \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2-3}_{\text{quadratische Gleichung}}=0 \,|\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2-4=0 \,|+4$$

$$\Leftrightarrow x^2=4 \,|\sqrt{\phantom{x}} \Leftrightarrow |x|=2 \Rightarrow x_1=2 \quad x_2=-2$$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_1)=f''(2)=\frac{3}{2}\cdot 2=3>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=2$$

$$f''(x_2)=f''(-2)=\frac{3}{2}\cdot(-2)=-3<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-2$$

4. Berechnung der Extremwerte:

$$f(x_1)=f(2)=\frac{1}{4}2^3-3\cdot 2=\frac{8}{4}-6=2-6=-4$$

$$f(x_2)=f(-2)=\frac{1}{4}(-2)^3-3\cdot(-2)=-\frac{8}{4}+6=-2+6=4$$

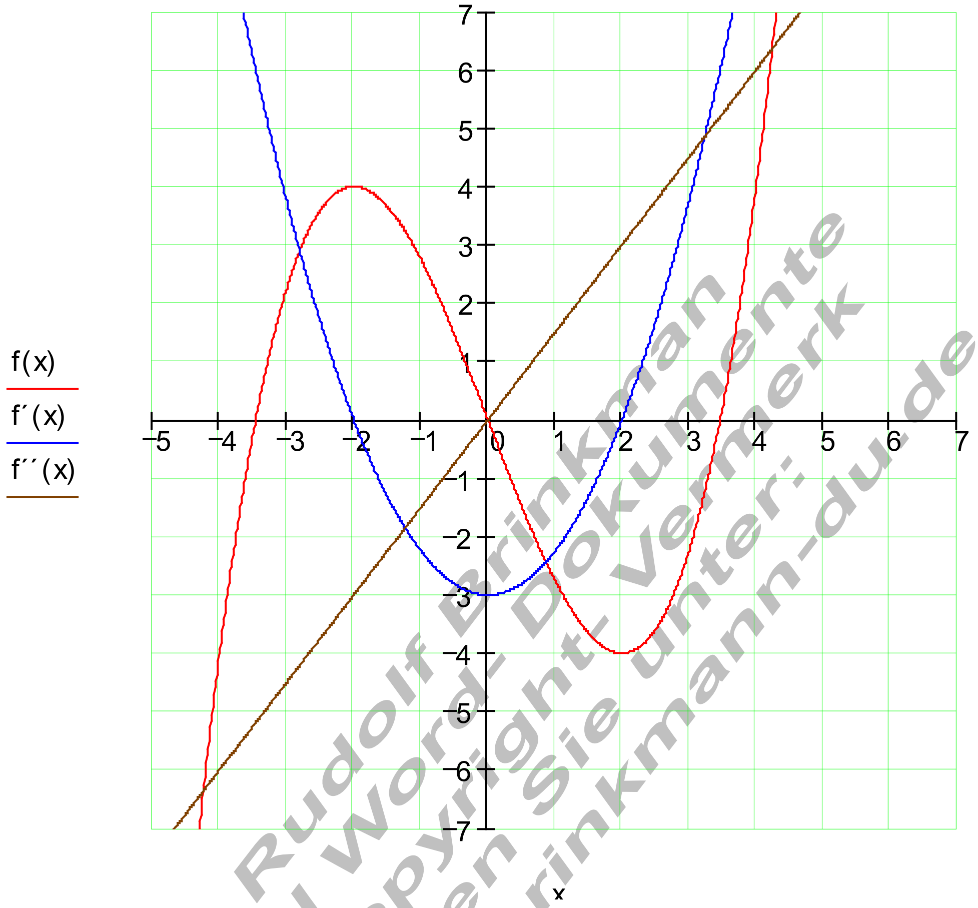
5. Die Extrempunkte:

$$\underline{\underline{P_{Min}(2|-4) \qquad P_{Max}(-2|4)}}$$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A1 **Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x$$




(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A2 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls die Extrempunkte. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion und deren beider Ableitungen in ein Koordinatensystem. | $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2$ |

A2 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \qquad f''(x) = -3x + 4$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + 4x}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{2}x + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{2}x + 4 = 0 \,|\cdot(-1) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 4 = 0 \,|+4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 4 \,|\cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_1) = f''(0) = -3\cdot 0 + 4 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{8}{3}\right) = -3\cdot\frac{8}{3} + 4 = -8 + 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{8}{3}$$

4. Berechnung der Extremwerte:

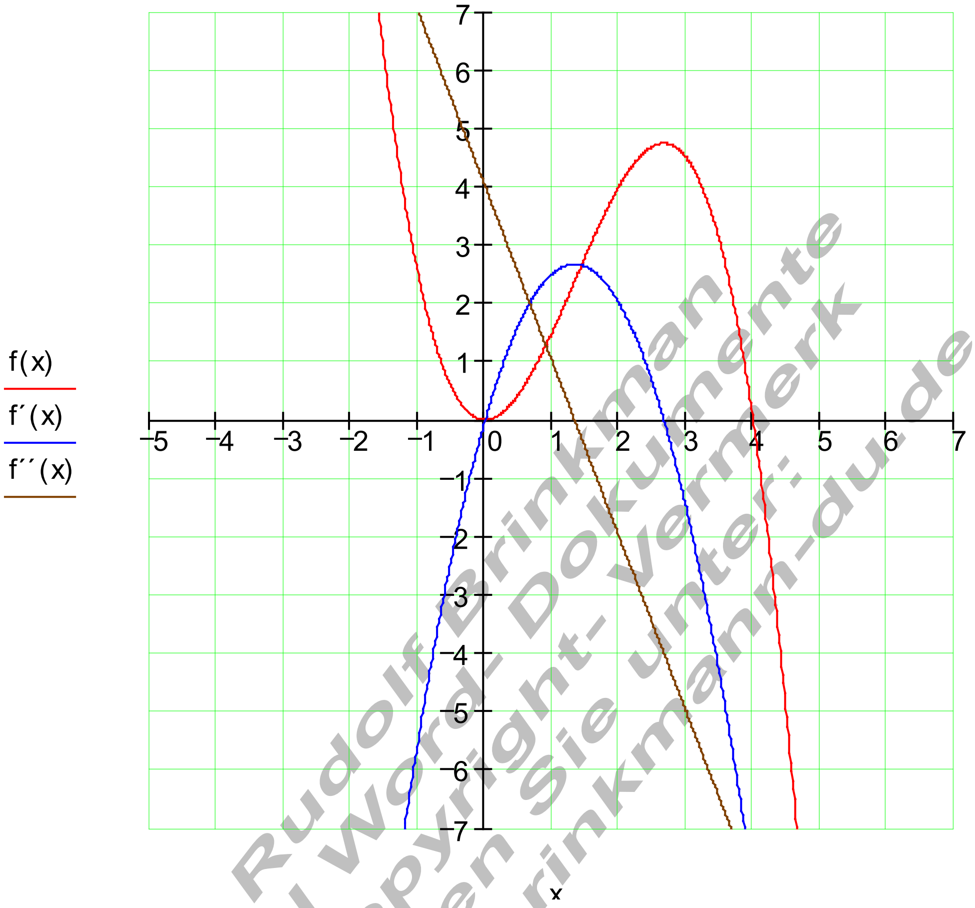
$$f(x_1) = f(0) = -\frac{1}{2}\cdot 0^3 + 2\cdot 0^2 = 0$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3 + 2\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{512}{27} + 2\cdot\frac{64}{9} = -\frac{256}{27} + \frac{384}{27} = \frac{128}{27}$$

5. Die Extrempunkte:

$$\underline{\underline{P_{Min}(0\,|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{8}{3} \approx 2{,}67 \,\middle|\, \frac{128}{27} \approx 4{,}74\right)}}$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A2 | **Ausführliche Lösung** (Die Graphen) |
|---|---|
| | $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \qquad f''(x) = -3x + 4$ |
| |  |



(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A3 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls die Extrempunkte. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion und deren beider Ableitungen in ein Koordinatensystem. | $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$ |

A3 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \qquad f''(x) = 3x - 8$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,\Big|\cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$$

$$p = -\frac{16}{3} \quad q = \frac{16}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{64}{9} - \frac{16}{3} = \frac{64}{9} - \frac{48}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \\ x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_1) = f''(4) = 3 \cdot 4 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 4$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{4}{3}$$

4. Berechnung der Extremwerte:

$$f(x_1) = f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 64 - 64 + 32 = 32 - 64 + 32 = 0$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{27} - 4 \cdot \frac{16}{9} + \frac{32}{3}$$

$$= \frac{32}{27} - \frac{192}{27} + \frac{288}{27} = \frac{128}{27}$$

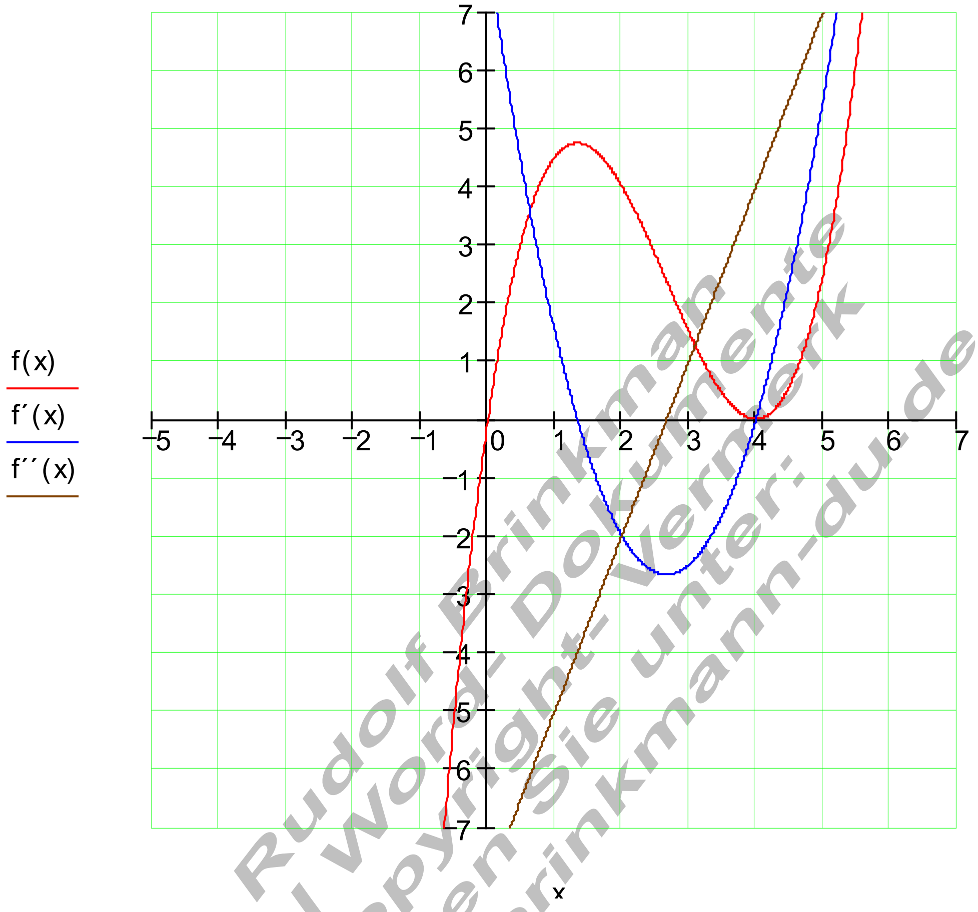
5. Die Extrempunkte:

$$\underline{\underline{P_{Min}(4 \mid 0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{4}{3} \approx 1{,}33 \;\middle|\; \frac{128}{27} \approx 4{,}74\right)}}$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

A3 **Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8 \qquad f''(x)=3x-8$$




(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A4 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls die Extrempunkte. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion und deren beider Ableitungen in ein Koordinatensystem. | $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$ |

A4 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2} \qquad f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{2} \qquad f''(x)=-3x+1$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{2}}_{\text{quadratische Gleichung}}=0 \,\Big|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=0$$

$$p=-\frac{2}{3} \quad q=-\frac{5}{3} \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{9}+\frac{5}{3}=\frac{1}{9}+\frac{15}{9}=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3} \\ x_2=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=-1 \end{array} \right.$$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_1)=f''\left(\frac{5}{3}\right)=-3\cdot\frac{5}{3}+1=-4<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=\frac{5}{3}$$

$$f''(x_2)=f''(-1)=-3\cdot(-1)+1=4>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=-1$$

4. Berechnung der Extremwerte:

$$f(x_1)=f\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2+\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{125}{27}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{9}+\frac{25}{6}+\frac{3}{2}$$

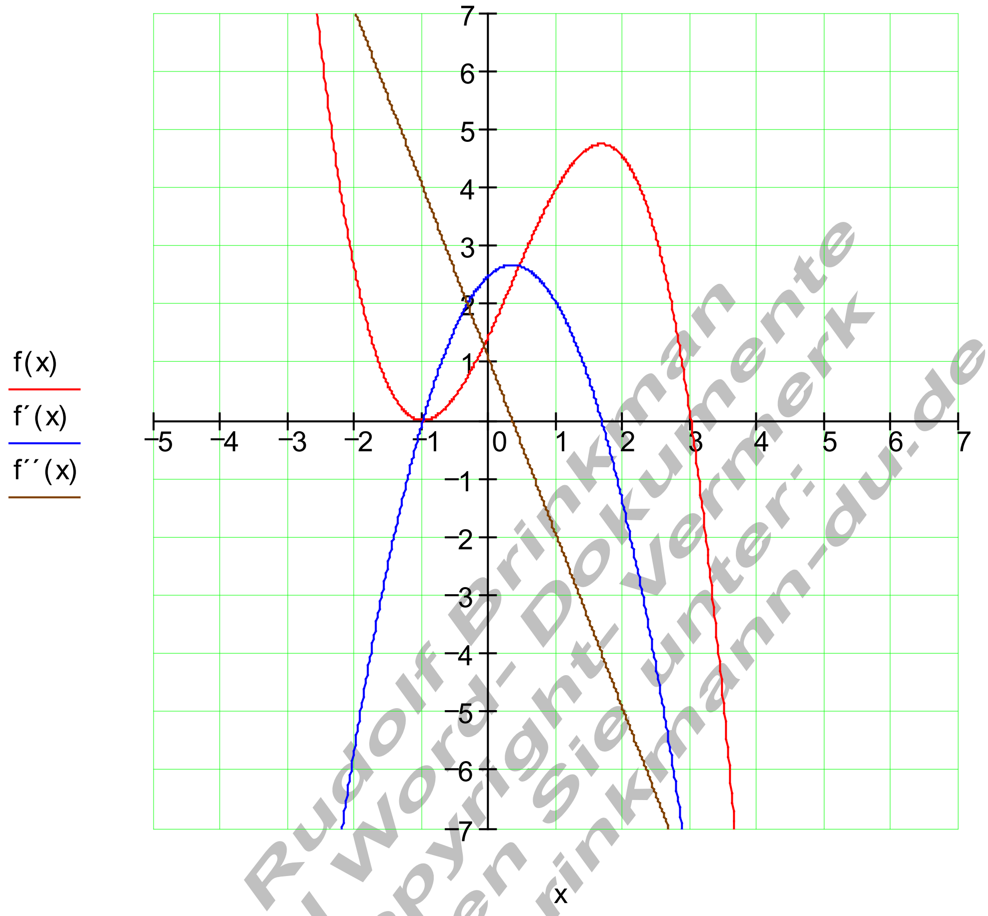
$$=-\frac{125}{54}+\frac{75}{54}+\frac{225}{54}+\frac{81}{54}=\frac{256}{54}=\frac{128}{27}$$

$$f(x_2)=f(-1)=-\frac{1}{2}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+\frac{5}{2}\cdot(-1)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=0$$

5. Die Extrempunkte:

$$\underline{\underline{P_{Min}(-1|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{5}{3}\approx 1,67\;\Big|\;\frac{128}{27}\approx 4,74\right)}}$$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

| A4 | **Ausführliche Lösung** (Die Graphen) |
|---|---|
| | $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$ $\quad f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{2}$ $\quad f''(x)=-3x+1$ |
| |  |



(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A5 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls die Extrempunkte. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion und deren beider Ableitungen in ein Koordinatensystem. | $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}$ |

A5 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9} \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3} \qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}}_{\text{quadratische Gleichung}}=0\,|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$$

$$p=-2 \quad q=-8 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+8=9$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left|\ \begin{array}{l} x_1=1+3=4 \\ x_2=1-3=-2 \end{array}\right.$$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_1)=f''(4)=\frac{2}{3}\cdot 4-\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=4$$

$$f''(x_2)=f''(-2)=\frac{2}{3}\cdot(-2)-\frac{2}{3}=-\frac{6}{3}=-2<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-2$$

4. Berechnung der Extremwerte:

$$f(x_1)=f(4)=\frac{1}{9}\cdot 4^3-\frac{1}{3}\cdot 4^2-\frac{8}{3}\cdot 4+\frac{26}{9}=\frac{1}{9}\cdot 64-\frac{1}{3}\cdot 16-\frac{32}{3}+\frac{26}{9}$$
$$=\frac{64}{9}-\frac{48}{9}-\frac{96}{9}+\frac{26}{9}=-\frac{54}{9}=-6$$

$$f(x_2)=f(-2)=\frac{1}{9}\cdot(-2)^3-\frac{1}{3}\cdot(-2)^2-\frac{8}{3}\cdot(-2)+\frac{26}{9}=\frac{1}{9}\cdot(-8)-\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{16}{3}+\frac{26}{9}$$
$$=-\frac{8}{9}-\frac{12}{9}+\frac{48}{9}+\frac{26}{9}=\frac{54}{9}=6$$

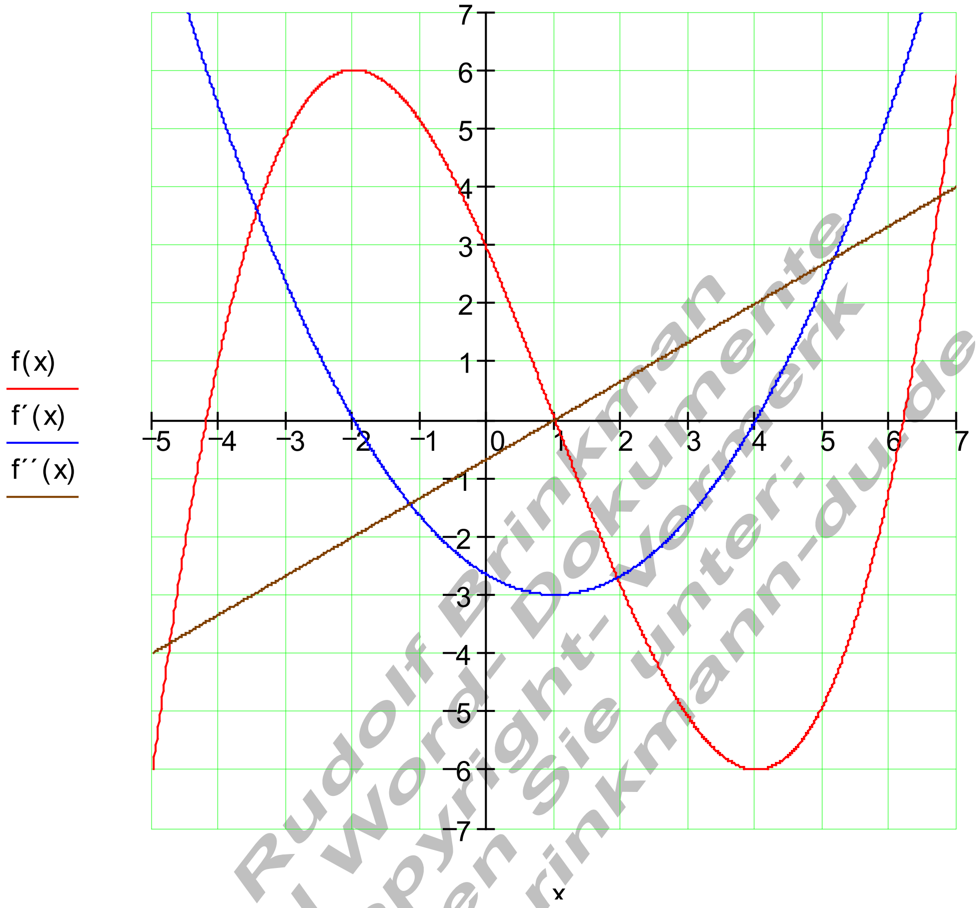
5. Die Extrempunkte:

$$\underline{\underline{P_{Min}(4\,|\,-6)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}(-2\,|\,6)}}$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

**A5** **Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$ $\quad f''(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$




(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A6 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls die Extrempunkte. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion und deren beider Ableitungen in ein Koordinatensystem. | $f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10$ |

**A6 Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10 \qquad f'(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{44}{5}x+14 \qquad f''(x)=\frac{12}{5}x-\frac{44}{5}$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{6}{5}x^2-\frac{44}{5}x+14=0}_{\text{quadratische Gleichung}} \Big|\cdot\frac{5}{6} \Leftrightarrow x^2-\frac{22}{3}x+\frac{35}{3}=0$$

$$p=-\frac{22}{3} \qquad q=\frac{35}{3} \qquad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{121}{9}-\frac{35}{3}=\frac{121}{9}-\frac{105}{9}=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{11}{3}+\frac{4}{3}=\frac{15}{3}=5 \\ x_2=\frac{11}{3}-\frac{4}{3}=\frac{7}{3} \end{array}\right.$$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_1)=f''(5)=\frac{12}{5}\cdot 5-\frac{44}{5}=\frac{16}{5}>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=5$$

$$f''(x_2)=f''\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{3}-\frac{44}{5}=\frac{28}{5}-\frac{44}{5}=-\frac{16}{5}<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=\frac{7}{3}$$

4. Berechnung der Extremwerte:

$$f(x_1)=f(5)=\frac{2}{5}\cdot 5^3-\frac{22}{5}\cdot 5^2+14\cdot 5-10=50-110+70-10=0$$

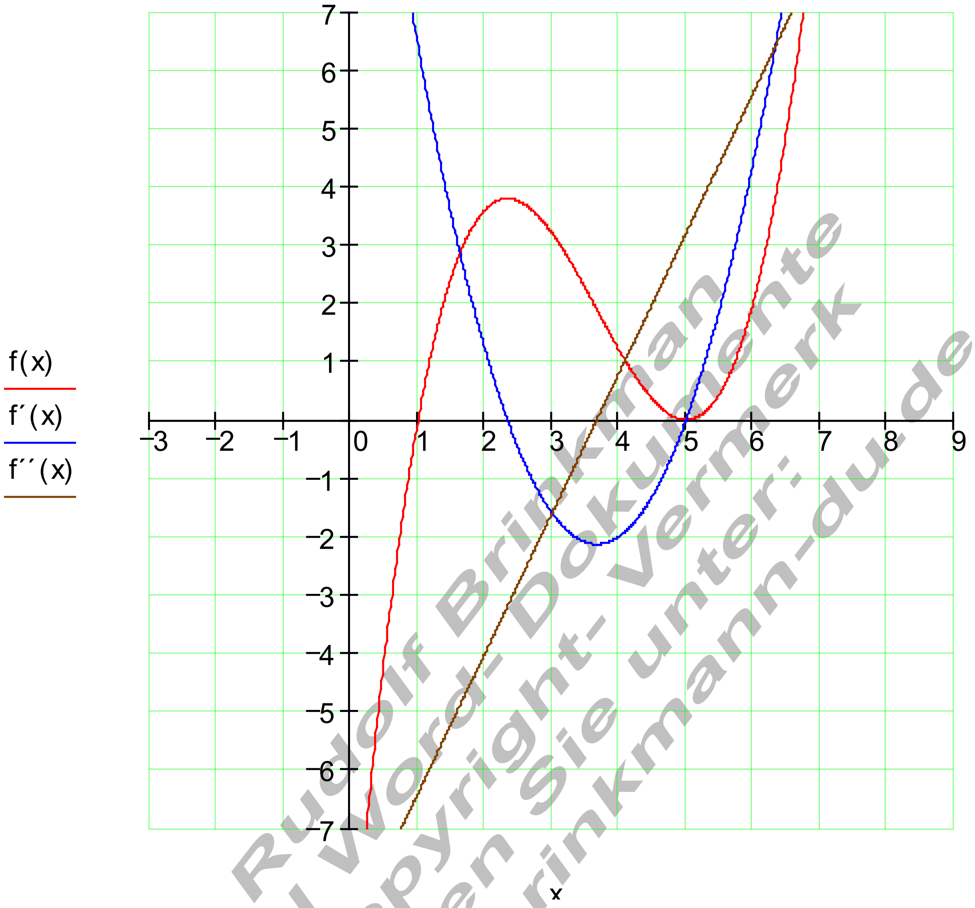
$$f(x_2)=f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^3-\frac{22}{5}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^2+14\cdot\frac{7}{3}-10=\frac{2}{5}\cdot\frac{343}{27}-\frac{22}{5}\cdot\frac{49}{9}+\frac{98}{3}-10$$

$$=\frac{686}{135}-\frac{3234}{135}+\frac{4410}{135}-\frac{1350}{135}=\frac{512}{135}$$

5. Die Extrempunkte:

$$\underline{\underline{P_{Min}(5|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{7}{3}\approx 2{,}33 \,\middle|\, \frac{512}{135}\approx 3{,}79\right)}}$$

(c) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A6 | **Ausführliche Lösung** (Die Graphen) |
|---|---|
| | $f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10$ $\quad f'(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{44}{5}x+14$ $\quad f''(x)=\frac{12}{5}x-\frac{44}{5}$ |
| |  |



(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A7 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls die Extrempunkte. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion und deren beider Ableitungen in ein Koordinatensystem. | $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+3x$ |

| A7 | **Ausführliche Lösung** (Berechnungen) |
|---|---|

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+3x \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3 \qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-2$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2-2x+3}_{\text{quadratische Gleichung}}=0\,|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0$$

$$p=-6 \quad q=9 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-9=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=3 \end{array}\right.$$

Doppelte Nullstelle der 1. Ableitung bedeutet:
an dieser Stelle existiert kein Extremwert.
Die Überprüfung soll das ebenfalls zeigen.

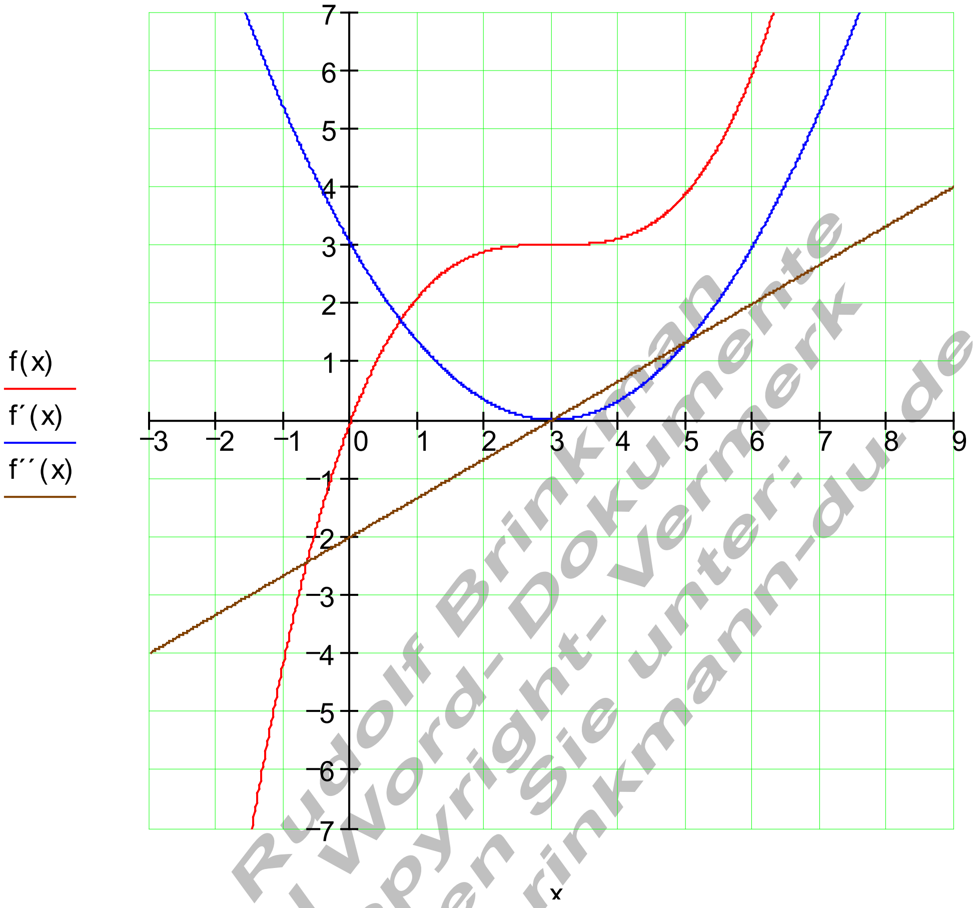
3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_{1/2})=f''(3)=\frac{2}{3}\cdot 3-2=0 \Rightarrow \text{keinExtremwert bei } x_{1/2}=3$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

A7 **Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+3x \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3 \qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-2$$




(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A8 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls die Extrempunkte. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion und deren beider Ableitungen in ein Koordinatensystem. | $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+4$ |

**A8** **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+4 \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x-3$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2-3x}_{\text{quadratische Gleichung}}=0 \,|\Leftrightarrow x\left(\frac{3}{4}x-3\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{3}{4}x-3=0\,|+3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=3\,|\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow x_2=4$$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_1)=f''(0)=\frac{3}{2}\cdot 0-3=-3<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$

$$f''(x_2)=f''(4)=\frac{3}{2}\cdot 4-3=3>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=4$$

4. Berechnung der Extremwerte:

$$f(x_1)=f(0)=\frac{1}{4}\cdot 0^3-\frac{3}{2}\cdot 0^2+4=4$$

$$f(x_2)=f(4)=\frac{1}{4}\cdot 4^3-\frac{3}{2}\cdot 4^2+4=16-24+4=-4$$

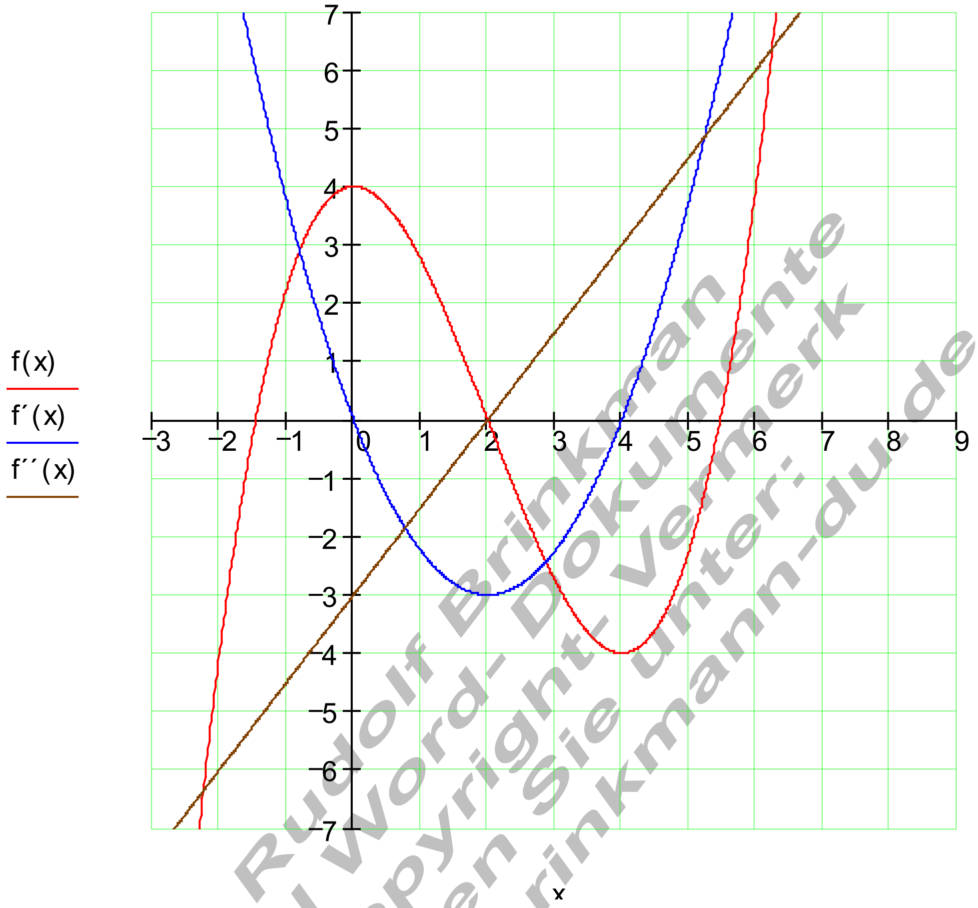
5. Die Extrempunkte:

$P_{Min}(4\,|\,-4) \qquad P_{Max}(0\,|\,4)$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A8 **Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+4 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x \quad f''(x)=\frac{3}{2}x-3$




(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A9 | **Aufgabe** | |
|---|---|---|
| | Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls die Extrempunkte. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion und deren beider Ableitungen in ein Koordinatensystem. | $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-4$ |

**A9** **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-4 \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3 \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x-3$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2-3x+3}_{\text{quadratische Gleichung}}=0 \,|\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$$

$$p=-4 \quad q=4 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-4=0$$

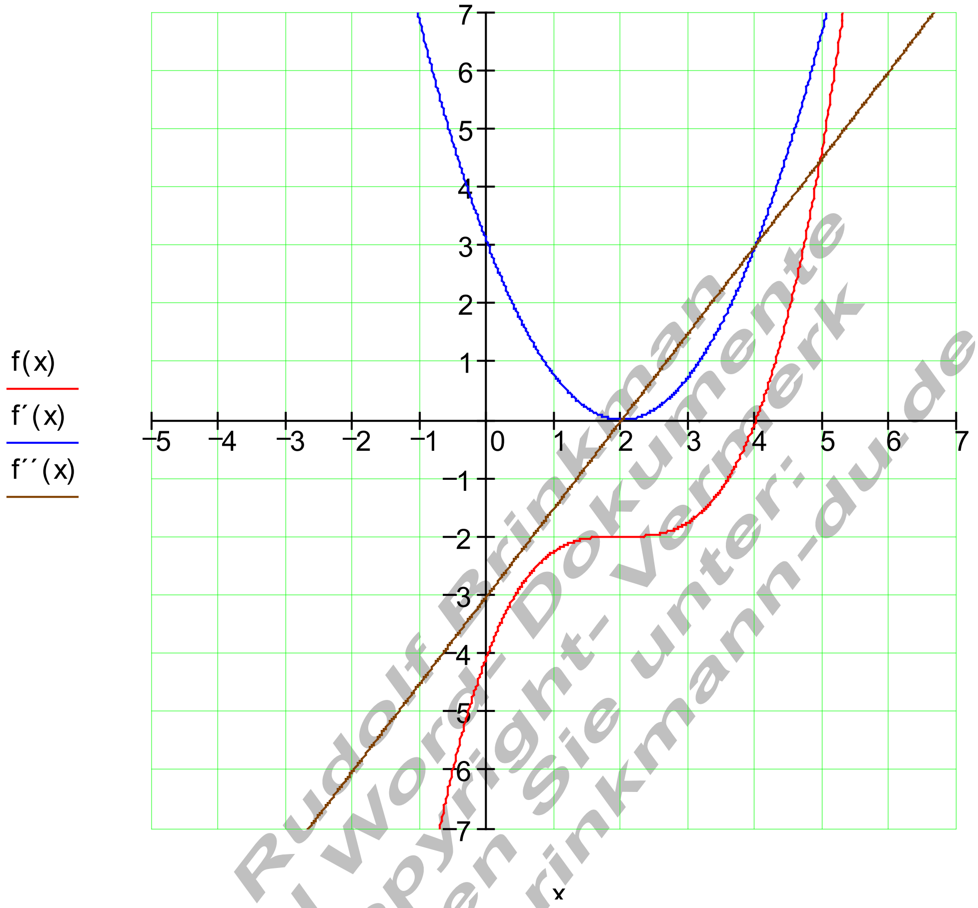
$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=2 \end{array} \right.$$

Doppelte Nullstelle der 1. Ableitung bedeutet:
an dieser Stelle existiert kein Extremwert.
Die Überprüfung soll das ebenfalls zeigen.

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_{1/2})=f''(2)=\frac{3}{2}\cdot 2-3=0 \Rightarrow \text{keinExtremwert bei } x_{1/2}=2$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A9 | **Ausführliche Lösung** (Die Graphen) |
|---|---|
| | $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-4 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3 \quad f''(x)=\frac{3}{2}x-3$ |
| |  |

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

| A10 | Aufgabe | |
|---|---|---|
| | Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls die Extrempunkte. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion und deren beider Ableitungen in ein Koordinatensystem. | $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3$ |

A10 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3 \qquad f'(x)=x^2+2x-2 \qquad f''(x)=2x+2$$

2. Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2x-2}_{\text{quadratische Gleichung}}=0$$

$$p=2 \quad q=-2 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+2=3$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{3} \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=-1+\sqrt{3} \\ x_2=-1-\sqrt{3} \end{array} \right.$$

3. Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$$f''(x_1)=f''\left(-1+\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(-1+\sqrt{3}\right)+2=-2+2\sqrt{3}+2=2\sqrt{3}>0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=-1+\sqrt{3}$$

$$f''(x_2)=f''\left(-1-\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(-1-\sqrt{3}\right)+2=-2-2\sqrt{3}+2=-2\sqrt{3}<0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-1-\sqrt{3}$$

4. Berechnung der Extremwerte:

$$f(x_1)=f\left(-1+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-1+\sqrt{3}\right)^3+\left(-1+\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1+\sqrt{3}\right)-3\approx-3{,}797$$

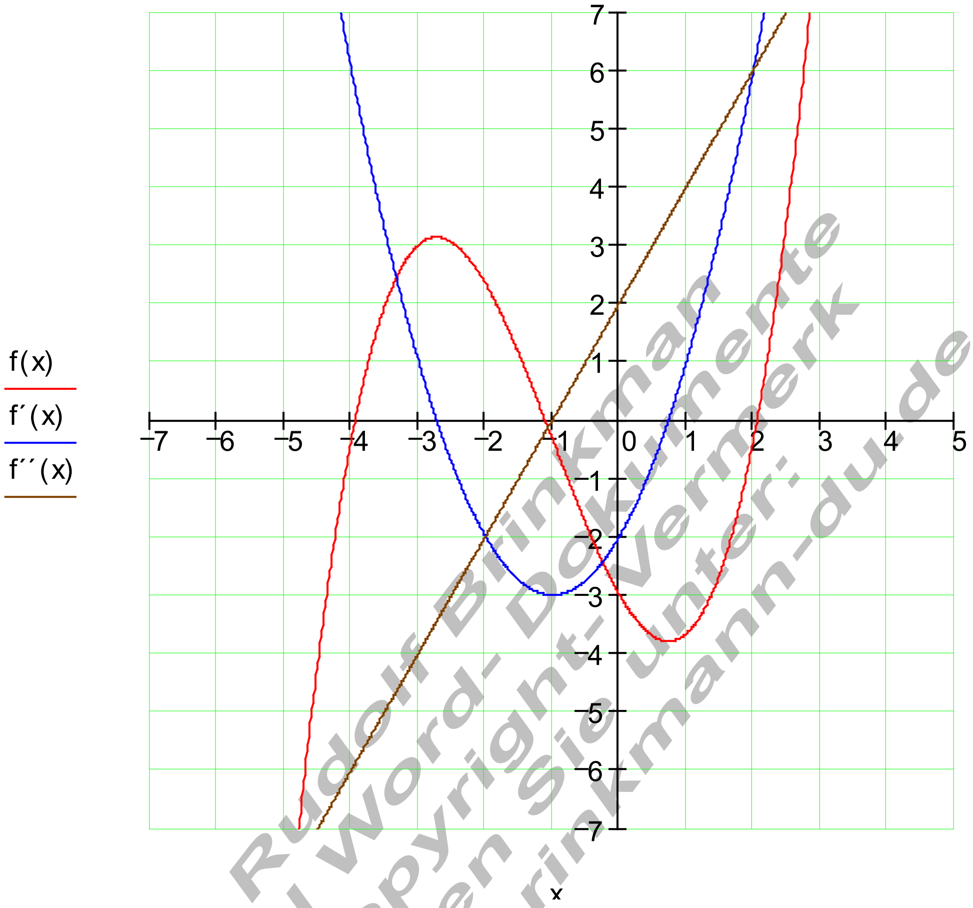
$$f(x_2)=f\left(-1-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-1-\sqrt{3}\right)^3+\left(-1-\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1-\sqrt{3}\right)-3\approx3{,}131$$

Berechnung erfolgte mit dem Taschenrechner.

5. Die Extrempunkte:

$$\underline{\underline{P_{Min}\left(-1+\sqrt{3}\approx0{,}732 \mid -3{,}797\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(-1-\sqrt{3} \mid 3{,}131\right)}}$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

| A10 | **Ausführliche Lösung** (Die Graphen) |
|---|---|
| | $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3 \quad f'(x)=x^2+2x-2 \quad f''(x)=2x+2$ |
| |   |

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de