Lösungen Differenzialrechnung XI

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$R(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$
	b)	$R(1) = 0{,}625 \qquad R(3) = 3{,}375 \qquad R(5) = 3{,}125$
	c)	Für einen Dosiswert von x = 4 ist die Reaktion am stärksten.
	d)	Bei einen Dosiswert von x = 2 reagiert die Pflanze am empfindlichsten auf das Düngemittel.
	e)	$P_y(0\,\vert\,0) \qquad P_{x1/2}(0\,\vert\,0) \qquad P_{x3}(6\,\vert\,0)$
		f), g) und h) Siehe Ausführliche Lösung.

E2	Ergebnisse	
	a)	$E(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$
	b)	$E(3) = 0{,}675 \qquad E(7) = -12{,}75$
	c)	Für einen Dosiswert von x = 4 ist die Effizienz der Bestrahlung am größten.
	d)	Bei einem Dosiswert von x = 2 ist die Effizienzzunahme der Bestrahlung am größten.
	e)	$P_y(0\,\vert\,0) \qquad P_{x1/2}(0\,\vert\,0) \qquad P_{x3}(6\,\vert\,0)$
		f), g) und h) Siehe Ausführliche Lösung.

E3	Ergebnisse	
	a)	$R(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x^2$
	b)	Für die Menge x = 8 ist die Reaktion am stärksten.
	c)	Wendepunkt: $P_w(4\,\vert\,4)$
	d)	$R(2) = 1{,}25 \qquad R(6) = 6{,}75 \qquad R(10) = 6{,}25 \qquad R(13) \approx -5{,}28$ Den Graphen siehe Ausführliche Lösung.
	e)	Siehe Ausführliche Lösung.

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Anwendungsaufgabe aus der Landwirtschaft (Biologie). In der Landwirtschaft wird die Reaktionsstärke R auf ein Düngemittel in Abhängigkeit von der gegebenen Menge x (Dosis) durch Funktionen dritten Grades R(x) beschrieben. Die momentane Änderungsrate der Reaktionsstärke ist ein Maß für die Empfindlichkeit der Pflanze auf die verabreichte Dosis x. Eine Testreihe ergab bei einer Dosis von x = 0 Einheiten die Reaktionsstärke Null ; bei x = 2 zwei ; bei x = 4 vier und bei x = 6 Null Reaktionseinheiten.	
	a)	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung R(x) in Abhängigkeit von der Dosis x.
	b)	Bestimmen Sie die Funktionswerte für x = 1 ; x = 3 und für x = 5
	c)	Für welchen Dosiswert ist die Reaktion am stärksten?
	d)	Bei welcher Dosis reagiert die Pflanze am empfindlichsten auf das Düngemittel?
	e)	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
	f)	Tragen Sie alle bisher bekannten Werte in eine Wertetabelle ein.
	g)	Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
	h)	Welche Schlussfolgerung kann ein Landwirt aus diesen Ergebnissen ziehen?

A1	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$R(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $P_1(0\,\vert\,0) \Rightarrow R(0) = 0 \Leftrightarrow \quad 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a_0 = 0}}$ $P_2(2\,\vert\,2) \Rightarrow R(2) = 2 \Leftrightarrow \quad 8 \cdot a_3 + 4 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 = 2$ $P_3(4\,\vert\,4) \Rightarrow R(4) = 4 \Leftrightarrow \quad 64 \cdot a_3 + 16 \cdot a_2 + 4 \cdot a_1 = 4$ $P_4(6\,\vert\,0) \Rightarrow R(6) = 0 \Leftrightarrow \quad 216 \cdot a_3 + 36 \cdot a_2 + 6 \cdot a_1 = 0$

A1 Ausführliche Lösung

a)

$$
\begin{array}{ccc|cc}
a_1 & a_2 & a_3 & & \\
\hline
2 & 4 & 8 & 2 & |:2 \\
4 & 16 & 64 & 4 & |:4 \\
6 & 36 & 216 & 0 & |:6 \\
\hline
1 & 2 & 4 & 1 & \\
1 & 4 & 16 & 1 & II-I \\
1 & 6 & 36 & 0 & III-I \\
\hline
1 & 2 & 4 & 1 & \\
0 & 2 & 12 & 0 & \\
0 & 4 & 32 & -1 & III-2\cdot II \\
\hline
1 & 2 & 4 & 1 & \\
0 & 2 & 12 & 0 & \\
0 & 0 & 8 & -1 & \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{8}} \\
\hline
\end{array}
$$

$2a_2 + 12a_3 = 0 \Leftrightarrow 2a_2 + 12\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2a_2 - \frac{3}{2} = 0 \,|\, + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2a_2 = \frac{3}{2} \,|:2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{4}}$

$a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 1$

$\Leftrightarrow a_1 + 2\cdot\frac{3}{4} + 4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) = 1$

$\Leftrightarrow a_1 + \frac{6}{4} - \frac{2}{4} = 1 \Leftrightarrow a_1 + 1 = 1 \,|\, -1$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$

Die Funktionsgleichung lautet:

$R(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

A1 Ausführliche Lösung

b) Funktionswerte für x = 1 ; 3 ; und 5

$R(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

$x = 1 \Rightarrow R(1) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{8} + \frac{6}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$

$x = 3 \Rightarrow R(3) = -\frac{1}{8}\cdot 27 + \frac{3}{4}\cdot 9 = -\frac{27}{8} + \frac{54}{8} = \frac{27}{8} = 3{,}375$

$x = 3 \Rightarrow R(5) = -\frac{1}{8}\cdot 125 + \frac{3}{4}\cdot 25 = -\frac{125}{8} + \frac{150}{8} = \frac{25}{8} = 3{,}125$

A1 **Ausführliche Lösung**

c) Für welchen Dosiswert ist die Reaktion am stärksten?
Gesucht ist die maximale Reaktionsstärke in Abhängigkeit von der Dosis.
Die maximale Reaktionsstärke entspricht dem Maximum von R(x).

$$R(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2 \Rightarrow R'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x \Rightarrow R''(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$$

$R'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x=0$ hier kann x ausgeklammert werden

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{8}x+\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$-\frac{3}{8}x+\frac{3}{2}=0\,\Big|-\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{8}x=-\frac{3}{2}\,\Big|\cdot\left(-\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow x_2=4$$

An den Stellen $x=0$ und $x=4$ befinden sich waagerechte Tangenten.

$$R''(x_1)=R''(0)=\frac{3}{2}>0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_1=0$$

$$R''(x_2)=R''(4)=-\frac{3}{4}\cdot 4+\frac{3}{2}=-3+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}<0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } x_2=4$$

Wegen $P_3(4\,|\,4)$ gilt: $P_{Max}(4\,|\,4)$

Für einen Dosiswert von x = 4 ist die Reaktion am stärksten.

A1 **Ausführliche Lösung**

d) Bei welcher Dosis reagiert die Pflanze am empfindlichsten auf das Düngemittel?
Die momentane Änderungsrate von R(x) ist ein Maß für die Empfindlichkeit der Pflanze auf das Düngemittel. Da die momentane Änderungsrate einer Funktion deren Steigung entspricht, wird der Dosiswert x gesucht, bei der die Steigung des Graphen von R(x) maximal ist. Der Wendepunkt kennzeichnet den Punkt
mit maximaler, bzw. minimaler Steigung.

$$R(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2 \Rightarrow R'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x \Rightarrow R''(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2} \Rightarrow R'''(x)=-\frac{3}{4}$$

$$R''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}=0\,\Big|-\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x=-\frac{3}{2}\,\Big|\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow x=2 \text{ mögliche Wendestelle}$$

$$R'''(x)=-\frac{3}{4} \Rightarrow R'''(x)=R'''(2)=-\frac{3}{4}\neq 0 \Rightarrow x=x_w=2 \text{ ist Wendestelle}$$

Wegen $P_2(2\,|\,2)$ gilt: $P_w(2\,|\,2)$

Bei einen Dosiswert von x = 2 reagiert die Pflanze am empfindlichsten auf das Düngemittel.

A1	**Ausführliche Lösung**
	e) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.

$R(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

$R(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 = 0$ x^2 kann ausgeklammert werden

$\Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$ ist doppelte Nullstelle.

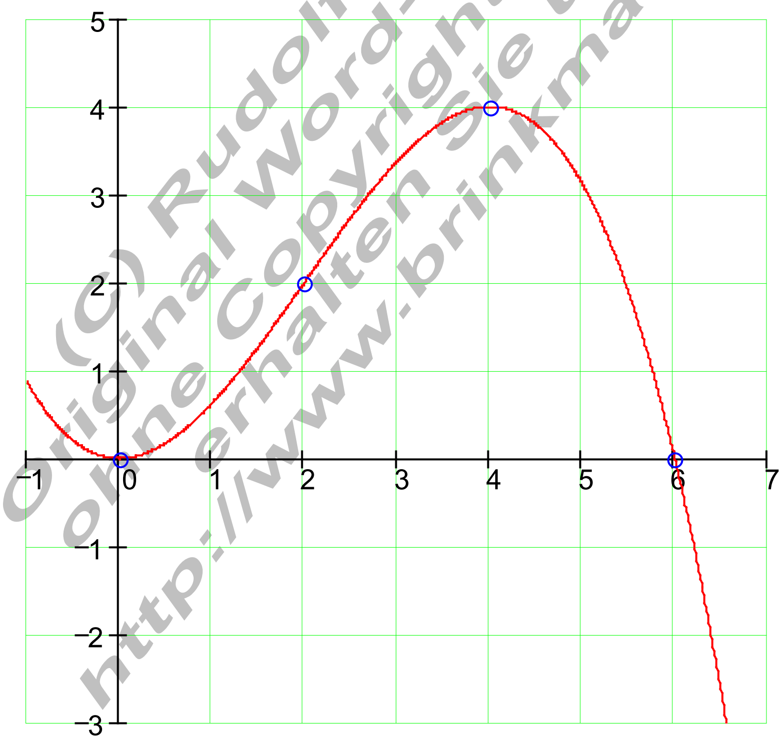
$-\frac{1}{8}x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x_3 = 6$ siehe auch $P_4(6|0)$

$R(0) = 0 \Rightarrow P_y(0|0)$ $P_{x1/2}(0|0)$ $P_{x3}(6|0)$

A1	**Ausführliche Lösung**
	f) Tragen Sie alle bisher bekannten Werte in eine Wertetabelle ein.

x	0	1	2	3	4	5	6
R(x)	0	0,625	2	3,375	4	3,125	0

A1	**Ausführliche Lösung**
	g) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.



A1	**Ausführliche Lösung**		
	h)	Welche Schlussfolgerung kann ein Landwirt aus diesen Ergebnissen ziehen?	
		P_1 (0 | 0)	Wird kein Düngemittel gegeben, ist auch keine Reaktion der Pflanze zu erwarten.
		P_{Max} (4 | 4)	Bei der Dosis x = 4 ist die Reaktion der Pflanze am stärksten (Düngungsoptimum). Wird mehr gegeben, so spricht man von Überdüngung mit geringerem Erfolg.
		P_W (2 | 2)	Die Empfindlichkeit der Pflanze auf Dünger ist bei der Dosis x = 2 am stärksten. Dort bewirken geringste Dosisverstärkungen die stärkste Reaktionszunahme.
		P_4 (6 | 0)	Bei der Dosis x = 6 erfolgt keine Reaktion der Planze mehr. Für x > 6 ist das Ergebnis schlechter als ohne Düngung. Die Pflanze würde sich zurückentwickeln, bzw. absterben.
		Aus Kostengründen würde der Landwirt sich möglicherweise für eine Dosierung im Bereich 2 < x < 4 entscheiden.	

A2	**Aufgabe**	
	Anwendungsaufgabe aus der Medizin (Radiologie). In der Krebstherapie wird die Effizienz E einer Bestrahlung in Abhängigkeit von der gegebenen Dosis x näherungsweise durch Funktionen dritten Grades E(x) beschrieben. Die Steigung des Graphen von E(x) ist ein Maß für die Effizienzänderung in Abhängigkeit von der Dosis x. Eine Testreihe ergab bei einer Dosis von x = 1 Dosiseinheiten die Effizienz 5/4 ; bei x = 2 vier ; bei x = 4 acht und bei x = 5 25/4 Effizienzeinheiten.	
	a)	Bestimmen Sie die Funktion E(x) in Abhängigkeit von der Dosis x.
	b)	Bestimmen Sie die Funktionswerte für x = 3 und für x = 7
	c)	Für welchen Dosiswert ist die Effizienz der Bestrahlung am größten?
	d)	Bei welcher Dosis ist die Effizienzzunahme am größten?
	e)	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
	f)	Tragen Sie alle bisher bekannten Werte in eine Wertetabelle ein.
	g)	Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
	h)	Welche Schlussfolgerung kann ein Arzt aus diesen Ergebnissen ziehen?

A2	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$E(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
		$P_1(1 \mid \frac{5}{4}) \quad \Rightarrow E(1) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \quad 1\cdot a_3 + 1\cdot a_2 + 1\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = \frac{5}{4}$
		$P_2(2 \mid 4) \quad \Rightarrow E(2) = 4 \Leftrightarrow \quad 8\cdot a_3 + 4\cdot a_2 + 2\cdot a_1 + 1a_0 = 4$
		$P_3(4 \mid 8) \quad \Rightarrow E(4) = 8 \Leftrightarrow \quad 64\cdot a_3 + 16\cdot a_2 + 4\cdot a_1 + 1a_0 = 8$
		$P_4(5 \mid \frac{25}{4}) \quad \Rightarrow E(5) = \frac{25}{4} \Leftrightarrow 125\cdot a_3 + 25\cdot a_2 + 5\cdot a_1 + 1a_0 = \frac{25}{4}$

A2 Ausführliche Lösung

a)

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$\frac{5}{4}$	$\vert\cdot 4$
1	2	4	8	4	$\vert\cdot 4$
1	4	16	64	8	$\vert\cdot 4$
1	5	25	125	$\frac{25}{4}$	$\vert\cdot 4$
4	4	4	4	5	
4	8	16	32	16	$II-I$
4	16	64	256	32	$III-I$
4	20	100	500	25	$VI-I$
4	4	4	4	5	
0	4	12	28	11	
0	12	60	252	27	$III-3\cdot II$
0	16	96	496	29	$IV-4\cdot II$
4	4	4	4	5	
0	4	12	28	11	
0	0	24	168	–6	
0	0	48	384	–24	$IV-2\cdot III$
4	4	4	4	5	
0	4	12	28	11	
0	0	24	168	–6	
0	0	0	48	–12	

$$48a_3 = -12 \,|: 48 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{12}{48}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$24a_2 + 168a_3 = -6$$

$$\Leftrightarrow 24a_2 + 168\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -6$$

$$\Leftrightarrow 24a_2 - \frac{168}{4} = -6$$

$$\Leftrightarrow 24a_2 - 42 = -6 \,|+42$$

$$\Leftrightarrow 24a_2 = 36 \,|: 24 \Leftrightarrow a_2 = \frac{36}{24}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$4a_1 + 12a_2 + 28a_3 = 11$$

$$\Leftrightarrow 4a_1 + 12\cdot\frac{3}{2} + 28\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 11$$

$$\Leftrightarrow 4a_1 + 18 - 7 = 11$$

$$\Leftrightarrow 4a_1 + 11 = 11 \,|-11 \Leftrightarrow 4a_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$4a_0 + 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4a_0 + 4\cdot\frac{3}{2} + 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 5$$

$$\Leftrightarrow 4a_0 + 6 - 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4a_0 + 5 = 5 \,|-5 \Leftrightarrow 4a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Die Funktionsgleichung lautet:

$$E(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

A2 Ausführliche Lösung

b) Funktionswerte für x = 3 ; und 7

$$E(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

$$x = 3 \Rightarrow E(3) = -\frac{1}{4}\cdot 27 + \frac{3}{2}\cdot 9 = -\frac{27}{4} + \frac{27}{2} = -\frac{27}{4} + \frac{54}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75$$

$$x = 7 \Rightarrow E(7) = -\frac{1}{4}\cdot 343 + \frac{3}{2}\cdot 49 = -\frac{343}{4} + \frac{147}{2} = -\frac{343}{4} + \frac{294}{4} = -\frac{49}{4} = -12{,}25$$

A2 **Ausführliche Lösung**

c) Für welchen Dosiswert ist die Effizienz der Bestrahlung am größten?
Gesucht ist die maximale Effizienz in Abhängigkeit von der Dosis.
Die maximale Effizienz entspricht dem Maximum von E(x).

$$E(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow E'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \Rightarrow E''(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + 3x = 0$ hier kann x ausgeklammert werden

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{4}x + 3 = 0 \mid -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x = -3 \mid \cdot\left(-\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow x_2 = 4$$

An den Stellen $x = 0$ und $x = 4$ befinden sich waagerechte Tangenten.

$E''(x_1) = E''(0) = 3 > 0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x_1 = 0$

$E''(x_2) = E''(4) = -\frac{3}{2} \cdot 4 + 3 = -6 + 3 = -3 < 0 \Rightarrow$ rel. Max bei $x_2 = 4$

Wegen $P_3(4 \mid 8)$ gilt: $P_{Max}(4 \mid 8)$

Für einen Dosiswert von x = 4 ist die Effizienz der Bestrahlung am größten.

A2 **Ausführliche Lösung**

d) Bei welcher Dosis ist die Effizienzzunahme am größten?
Da die Steigung des Graphen von E(x) ein Maß für die Effizienzzunahme ist, wird die Stelle gesucht, an der die Steigung des Graphen am größten ist. Die Stelle entspricht dem Dosiswert der größten Effizienzzunahme. Gesucht ist also die Wendestelle, denn dort nimmt die Steigung des Graphen einen Extremwert an.

$$E(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow E'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \Rightarrow E''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow E'''(x) = -\frac{3}{2}$$

$$E''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \mid -3$$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x = -3 \mid \cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2$ mögliche Wendestelle

$E'''(x) = -\frac{3}{2} \Rightarrow E'''(x) = E'''(2) = -\frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_w = 2$ ist Wendestelle

Wegen $P_2(2 \mid 4)$ gilt: $P_w(2 \mid 4)$

Bei einen Dosiswert von x = 2 ist die Effizienzzunahme der Bestrahlung am größten.

A2 Ausführliche Lösung

e) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.

$$E(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

$$E(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \qquad x^2 \text{ kann ausgeklammert werden}$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ ist doppelte Nullstelle.}$$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \,|\, -\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x = -\frac{3}{2} \,|\cdot(-4) \Leftrightarrow x_3 = 6$$

$$E(0) = 0 \Rightarrow P_y(0|0) \qquad P_{x1/2}(0|0) \qquad P_{x3}(6|0)$$

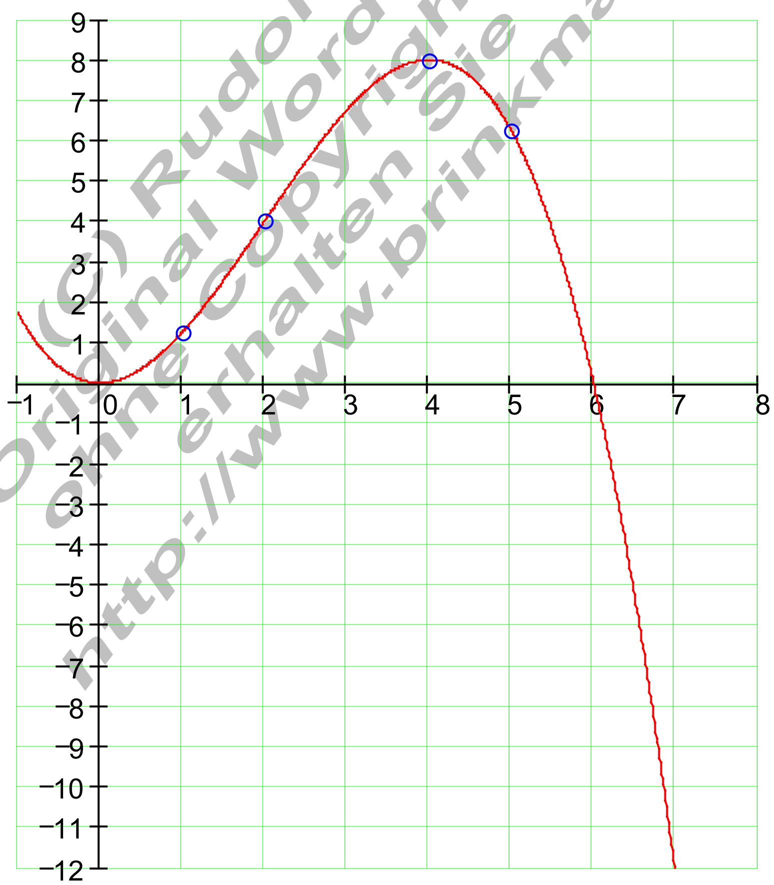
A2 Ausführliche Lösung

f) Tragen Sie alle bisher bekannten Werte in eine Wertetabelle ein.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
E(x)	0	1,25	4	6,75	8	6,25	0	−12,25

A2 Ausführliche Lösung

g) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.



A2	**Ausführliche Lösung**		
	h)	Welche Schlussfolgerung kann ein Arzt aus diesen Ergebnissen ziehen?	
		P_1 (0 | 0)	Wenn keine Bestrahlung erfolgt, ist keine Effizienz zu verzeichnen.
		P_{Max} (4 | 8)	Bei der Dosis $x = 4$ ist die Effizienz der Bestrahlung am größten. Wird die Dosis erhöht, so sinkt die Effizienz, da verstärkt schädigende Wirkungen auftreten.
		P_W (2 | 4)	Bei einer Dosis von $x = 2$ ist die Effizienzzunahme am größten. Dort bewirken geringste Dosisverstärkungen eine große Effizienzzunahme.
		P_4 (6 | 0)	Bei der Dosis $x = 6$ ist die Effizienz gleich Null. Die Nutzwirkung wird durch die schädigende Wirkung aufgehoben. Für $x > 6$ sind die schädigenden Strahlenwirkungen größer als der Nutzeffekt.
		Möglicherweise würde der behandelnde Arzt sich für eine Dosis im Bereich $2 < x < 4$ entscheiden. Dabei muss der Arzt sicherlich noch weitere Faktoren, die den Patienten betreffen berücksichtigen.	

A3	**Aufgabe**	
	Anwendungsaufgabe aus der Labortechnik (Chemie). Bei einer chemischen Reaktion wird die Reaktionsstärke R auf einen Katalysator in Abhängigkeit von der Menge x durch Funktionen dritten Grades R(x) beschrieben. Die Reaktionsgeschwindigkeit des Prozesses wird als Ableitung R'(x) definiert. Eine Testreihe ergab bei einer Menge von x = 0 Mengeneinheiten (ME) die Reaktionsstärke R(0) = 0 Reaktionseinheiten (RE), bei x = 4 R(4) = 4, bei x = 8 R(8) = 8 und bei x = 12 R(12) = 0.	
	a)	Bestimmen Sie die Funktion R(x) in Abhängigkeit von der Menge x.
	b)	Für welche Menge x ist die Reaktion am stärksten?
	c)	Bestimmen Sie den Wendepunkt.
	d)	Bestimmen Sie die Funktionswerte für x = 2 ; 6 ; 10 ; 13 und stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar.
	e)	Welche Bedeutung hat der Wendepunkt. Beurteilen Sie das Ergebnis aus Sicht des Laboranten.

A3 Ausführliche Lösung

a) $R(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(0\,|\,0) \Rightarrow R(0) = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a_0 = 0}}$

$P_2(4\,|\,4) \Rightarrow R(4) = 4 \Leftrightarrow 64 \cdot a_3 + 16 \cdot a_2 + 4 \cdot a_1 = 4$

$P_3(8\,|\,8) \Rightarrow R(8) = 8 \Leftrightarrow 512 \cdot a_3 + 64 \cdot a_2 + 8 \cdot a_1 = 8$

$P_4(12\,|\,0) \Rightarrow R(12) = 0 \Leftrightarrow 1728 \cdot a_3 + 144 \cdot a_2 + 12 \cdot a_1 = 0$

a_1	a_2	a_3		
4	16	64	4	
8	64	512	8	$II - 2 \cdot I$
12	144	1728	0	$III - 3 \cdot I$
4	16	64	4	
0	32	384	0	
0	96	1536	−12	$III - 3 \cdot II$
4	16	64	4	
0	32	384	0	
0	0	384	−12	

$384a_3 = -12 \,|\, :12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{32}}$

$32a_2 + 384a_3 = 0 \Leftrightarrow 32a_2 - \frac{384}{32} = 0 \,|\, +12$

$\Leftrightarrow 32a_2 = 12 \,|\, :32 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{8}}$

$4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 4 \Leftrightarrow 4a_1 + \frac{48}{8} - \frac{64}{32} = 4$

$\Leftrightarrow 4a_1 + 4 = 4 \,|\, -4 \Leftrightarrow 4a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$

Die Funktionsgleichung lautet:

$R(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x^2$

A3	**Ausführliche Lösung**

b) Für welche Menge x ist die Reaktion am stärksten?
Gesucht ist die maximale Reaktionsstärke in Abhängigkeit von der Dosis.
Die maximale Reaktionsstärke entspricht dem Maximum von R(x).

$$R(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x^2 \Rightarrow R'(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{4}x \Rightarrow R''(x) = -\frac{3}{16}x + \frac{3}{4}$$

$R'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$ hier kann x ausgeklammert werden

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{32}x + \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{32}x + \frac{3}{4} = 0 \mid -\frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{32}x = -\frac{3}{4} \mid \cdot\left(-\frac{32}{3}\right) \Leftrightarrow x_2 = 8$$

An den Stellen $x = 0$ und $x = 8$ befinden sich waagerechte Tangenten.

$$R''(x_1) = R''(0) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_1 = 0$$

$$R''(x_2) = R''(8) = -\frac{3}{16} \cdot 8 + \frac{3}{4} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } x_2 = 8$$

Wegen $P_3(8 \mid 8)$ gilt: $P_{Max}(8 \mid 8)$
Für die Menge x = 8 ist die Reaktion am stärksten.

A3	**Ausführliche Lösung**

c) Bestimmen Sie den Wendepunkt.

$$R(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x^2$$

$$\Rightarrow R'(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{4}x \Rightarrow R''(x) = -\frac{3}{16}x + \frac{3}{4} \Rightarrow R'''(x) = -\frac{3}{16}$$

$$R''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{16}x + \frac{3}{4} = 0 \mid -\frac{3}{4}$$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{16}x = -\frac{3}{4} \mid \cdot\left(-\frac{16}{3}\right) \Leftrightarrow x = 4$ mögliche Wendestelle

$R'''(x) = -\frac{3}{16} \Rightarrow R'''(x) = R'''(4) = -\frac{3}{16} \neq 0 \Rightarrow x = x_w = 4$ ist Wendestelle

Wegen $P_2(4 \mid 4)$ gilt: $P_w(4 \mid 4)$

A3 **Ausführliche Lösung**

d)

$$R(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x^2$$

$$x = 2 \Rightarrow R(2) = -\frac{1}{32}\cdot 8 + \frac{3}{8}\cdot 4 = -\frac{8}{32} + \frac{12}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

$$x = 6 \Rightarrow R(6) = -\frac{1}{32}\cdot 216 + \frac{3}{8}\cdot 36 = -\frac{216}{32} + \frac{108}{8} = -\frac{27}{4} + \frac{54}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75$$

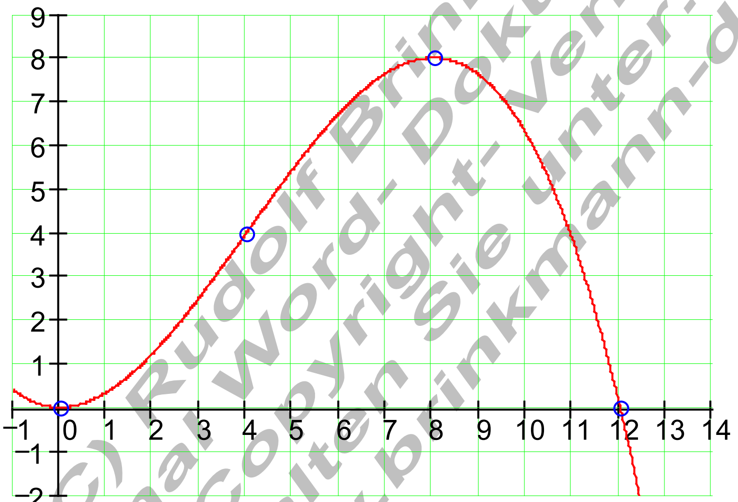
$$x = 10 \Rightarrow R(10) = -\frac{1}{32}\cdot 1000 + \frac{3}{8}\cdot 100 = -\frac{1000}{32} + \frac{300}{8} = -\frac{125}{4} + \frac{150}{4} = 6{,}25$$

$$x = 13 \Rightarrow R(13) = -\frac{1}{32}\cdot 2197 + \frac{3}{8}\cdot 169$$

$$= -\frac{2197}{32} + \frac{507}{8} = -\frac{2197}{32} + \frac{2028}{32} = -\frac{169}{32} \approx -5{,}28$$

A3 **Ausführliche Lösung**

d)



A3 **Ausführliche Lösung**

e) Welche Bedeutung hat der Wendepunkt?
Beurteilen Sie das Ergebnis aus Sicht des Laboranten.
Im Wendepunkt ist die Steigung des Graphen am größten.
Da die Reaktionsgeschwindigkeit des Prozesses über die erste Ableitung R'(x) definiert ist, bedeutet das, das bei einer Menge von x = 4 die Reaktionsgeschwindigkeit am größten ist.

P_1 (0 | 0)	Ohne Katalysator läuft der Prozess nicht ab. Es ist keine Reaktion zu verzeichnen
P_{Max} (8 | 8)	Bei einer Menge von x = 8 ist die chemische Reaktion am stärksten. Größere Mengen der Katalysatorsubstanz verringern die Reaktionsstärke.
P_4 (12 | 0)	Bei der Menge x = 12 findet keine Reaktion mehr statt. Die Für x > 12 ist die Reaktion ebenfalls Null.

Möglicherweise würde der Laborant, um die größtmögliche Reaktion zu erreichen eine Katalysatormenge von x = 8 zugeben.