Lösungen Differenzialrechnung VIII

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Die Gesamtkosten eines Betriebes werden bei einer maximalen Ausbringungsmenge von 10 ME beschrieben durch K(x). Der Verkaufspreis pro ME beträgt 28 GE. $K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$	
	a)	Bestimmen Sie die Ableitung der Kostenfunktion (Differentialkostenfunktion oder Grenzkostenfunktion) und zeichnen Sie den Graphen. Beschreiben Sie den Graphen.
	b)	Berechnen Sie die minimalen Differentialkosten.
	c)	Beweisen Sie, dass die Differentialkosten für jede Ausbringungsmenge positiv sind.
	d)	In welchem Bereich kann man mit Gewinn rechnen?
	e)	In welchem Bereich nimmt der Gewinn zu?

A1 Ausführliche Lösung

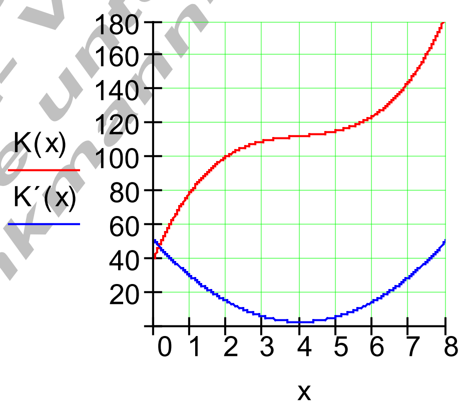
a)

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$

$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$

Der Graph der Grenzkostenfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Im Scheitelpunkt dieser sind die Grenzkosten am geringsten.



A1 Ausführliche Lösung

b) Bedingung für die minimalen Differentialkosten: $K''(x) = 0$

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$

$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$

$K''(x) = 6x - 24$

$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$

$K'(4) = 2$

$\Rightarrow$ Bei einer Ausbringung von

4 ME sind die Differentialkosten mit 2 GE/ME am geringsten.

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A1 Ausführliche Lösung

c) $K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ für $K'(4) = 2$ ist positiv

Wenn lt. Annahme für alle $x \in \mathbb{R}_+$ $K'(x)$ positiv sein soll,
darf es keine Nullstellen geben.
Wir untersuchen also $K'(x)$ auf Nullstellen:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 50 = 0$$

$$\Rightarrow p = -8\,;\, q = \frac{50}{3}\,;\, D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - \frac{50}{3} < 0$$

$\Rightarrow$ keine Lösung.

Die Differentialkosten sind für jede Ausbringungsmenge positiv.
q.e.d.

A1 Ausführliche Lösung

d) Erlösfunktion: $E(x) = 28x$ (folgt aus Aufgabenstellung)

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 12x^2 - 22x - 40$

Gewinn wird dort gemacht, wo die Gewinnfunktion positive Werte hat.
Wir probieren:

$G(5) = 25\,;\, G(4) = 0$ Nullstelle von $G(x)$ also $\underline{\underline{x_1 = 4}}$

HORNER

	-1	12	-22	-40
$x = 4$		-4	32	40
	-1	8	10	0

$\Rightarrow -x^2 + 8x + 10 = 0$

$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{26} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 \approx 9{,}1}}$

Für $\underline{\underline{4 \le x \le 9{,}1}}$ arbeitet der Betrieb mit Gewinn

A1 Ausführliche Lösung

e) Gewinnzunahme erfolgt da, wo $G(x)$ positive Steigung hat und $G(x) > 0$ ist.

Also: $G(x) > 0 \wedge G'(x) > 0$

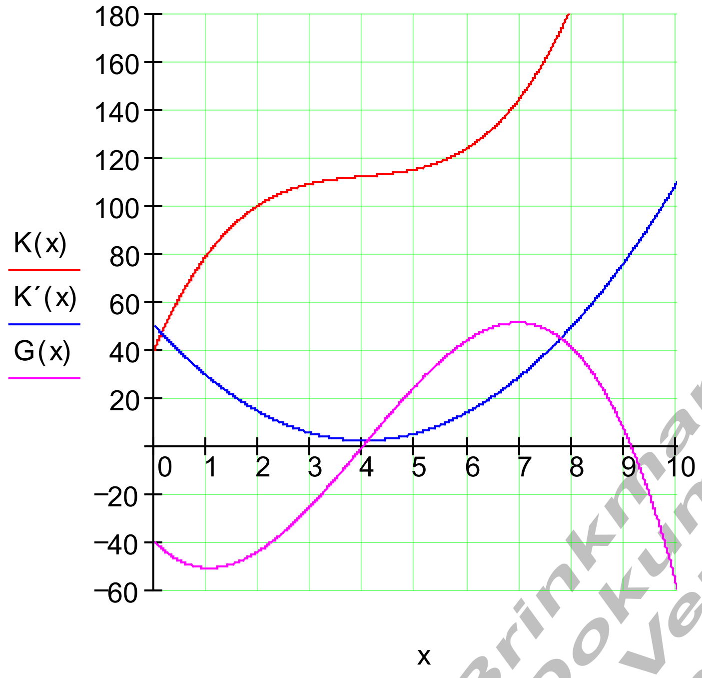
$$G'(x) = -3x^2 + 24x - 22 > 0 \text{ für } x \in \left[4 - \sqrt{\frac{26}{3}}\,;\, 4 + \sqrt{\frac{26}{3}}\right] \text{ oder } x \in [1{,}05\,;\,6{,}9]$$

Gewinnzunahme: $[4\,;\,9{,}1] \cap [1{,}05\,;\,6{,}9] = \underline{\underline{[4\,;\,6{,}9]}}$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter http://www.brinkmann-du.de

A1 Ausführliche Lösung

Die Graphen:

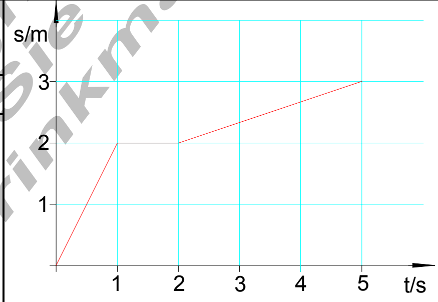


A2 **Aufgabe**

Gegeben ist das Weg- Zeit- Diagramm s(t) eines bewegten Körpers.

a) Interpretieren Sie diese Bewegung.

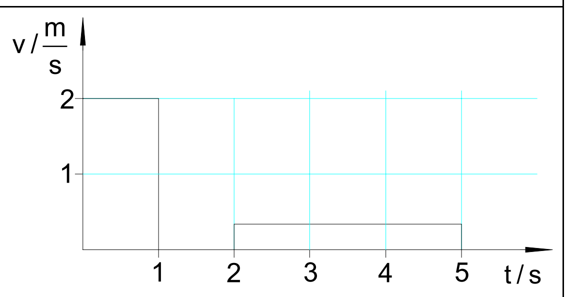
b) Zeichnen Sie das dazugehörige Geschwindigkeits- Zeit- Diagramm, wenn gilt: v(t) = s'(t).



A2 **Ausführliche Lösung**

a) Von 0 bis 1 s :
Bewegung mit gleichbleibender Geschwindigkeit v = 2 m/s
Von 1 bis 2 s:
Stillstand v = 0 m/s
Von 2 bis 5 s:
Bewegung mit gleichbleibender Geschwindigkeit v = 1/3 m/s

b)



(C) Ralf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A3 Aufgabe

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Bewegung im Weg- Zeit- Diagramm.

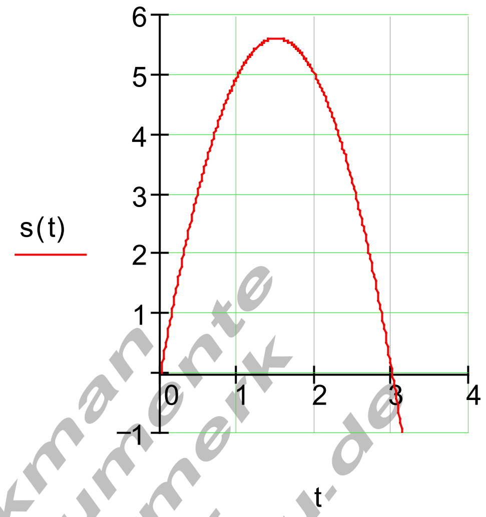
a) Geben Sie ein Beispiel aus dem Alltag an, für das dieser Verlauf zutreffen könnte.
Was bedeutet physikalisch der Kurvenverlauf für $t > 3$?

b) Das Weg – Zeit – Gesetz für diese Bewegung lautet:

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

Bestimmen Sie a und v_0.

c) Zeichnen Sie das dazugehörige Geschwindigkeits- Zeit- Diagramm und interpretieren Sie dieses.
Welche Bedeutung hat eine negative Geschwindigkeit?



A3 Ausführliche Lösung

a) Ein Gegenstand wird senkrecht nach oben geworfen.
Für $t > 3$ ist $s < 0$,
d.h. der Gegenstand befindet sich unterhalb der Abwurfstelle.

A3 Ausführliche Lösung

b) $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ Bewegungsgleichung

Für die Berechnung von a und v_0 verwenden wir zwei Punkte des Graphen.

$$P_1(1|5): s(1) = \frac{1}{2}a + v_0 = 5$$

$$a = -5\,;\; v_0 = 7{,}5$$

$$P_2(3|0): s(3) = \frac{9}{2}a + 3v_0 = 0$$

$a < 0$ bedeutet, dass es sich um eine verzögerte Bewegung handelt.

A3 Ausführliche Lösung

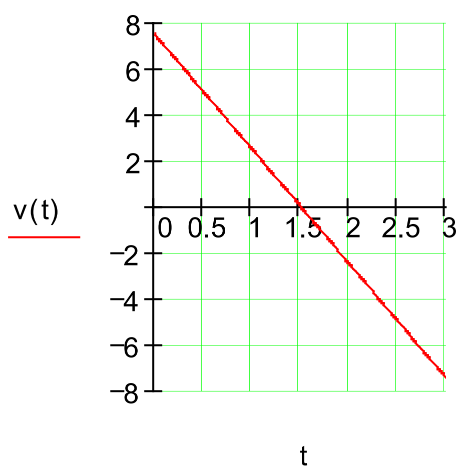
c) $v(t) = s'(t) = at + v_0 = -5t + 7{,}5$

Die Geschwindigkeit ist am Anfang positiv, d.h. der Körper bewegt sich nach oben.

Sie nimmt aber ab und ist bei $t = 1{,}5$ s null.

Der Körper hat da seine größte Höhe erreicht.

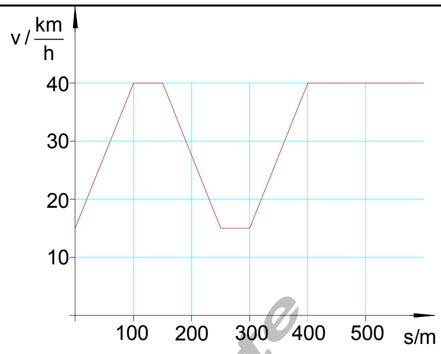
Dann ist die Geschwindigkeit negativ, der Körper fällt, er bewegt sich wieder nach unten.



(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

<table>
<tr><td>A4</td><td colspan="2">Aufgabe</td></tr>
<tr><td></td><td>Gegeben ist der Geschwindigkeitsverlauf einer Bewegung.

Interpretieren Sie dieses Diagramm.

Machen Sie Aussagen über einen möglichen Streckenverlauf.</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>A4</td><td>Ausführliche Lösung</td></tr>
<tr><td></td><td>0 – 100 m: Die Geschwindigkeit nimmt zu.
100 – 150 m: Die Geschwindigkeit bleibt gleich: 40 km/h
150 – 200 m: Die Geschwindigkeit nimmt ab.
250 – 300 m: Die Geschwindigkeit bleibt gleich: 15 km/h
300 – 400 m: Die Geschwindigkeit nimmt zu.
ab 400 m: Die Geschwindigkeit bleibt konstant 40 km/h
Erklärung:
Auf einer abfallenden Straße wird beschleunigt, die folgende Straße ist eben. Anschließend geht es steil bergauf, die Geschwindigkeit verringert sich bis auf 15 km/h. Danach folgt eine Talfahrt, bei der wieder Geschwindigkeit gewonnen wird, die Höchstgeschwindigkeit von 40 km/h kann danach gehalten werden auf der folgenden leicht abschüssigen Strecke.</td></tr>
</table>

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de