

Lösungen Differenzialrechnung II

Ausführliche Lösungen:

Folgende Ableitungsregeln kommen zur Anwendung:	
Potenzregel	1.) Alten Exponenten als Faktor vor die Variable x setzen. 2.) Neuer Exponent ist alter Exponent vermindert um eins.
Beispiel:	$f(x) = x^q \Rightarrow f'(x) = q \cdot x^{q-1}$ speziell: $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = \underline{\underline{4x^3}}$
Konstantenregel	Eine Funktion ist zusammengesetzt aus einer elementaren Funktion multipliziert mit einer Konstanten. Dann ist die Ableitung dieser Funktion gleich der Ableitung der Elementarfunktion multipliziert mit der Konstanten.
Beispiel	$f(x) = c \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$ speziell: $f(x) = 3 \cdot x^5 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot 5 \cdot x^4 = \underline{\underline{15x^4}}$
Summenregel	Eine Funktion ist zusammengesetzt aus der Summe zweier Funktionen. Dann ist die Ableitung der Funktion gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Funktionen.
Beispiel	$f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$ speziell: $f(x) = x^5 + x^3 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{5 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2}}$

A1a	Aufgabe	
	Berechnen Sie die Ableitung von f(x) an den Stellen x = 2 und x = u.	$f(x) = x^2 + 3$

A1	Ausführliche Lösung
a)	$f(x) = x^2 + 3$ $x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2 + \Delta x)^2 + 3 - (2^2 + 3)}{\Delta x}$ $= \frac{4 + 4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - 4 - 3}{\Delta x} = \frac{4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (4 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 4 + \Delta x$ $\Rightarrow f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = \underline{\underline{4}}$ $x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta x)^2 + 3 - (u^2 + 3)}{\Delta x}$ $= \frac{u^2 + 2u \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - u^2 - 3}{\Delta x} = \frac{2u \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (2u + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2u + \Delta x$ $\Rightarrow f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2u + \Delta x) = \underline{\underline{2u}}$ <p>Die Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle gibt die Steigung des Funktionsgraphen an dieser Stelle an. Statt Steigung sagt man auch momentane Änderungsrate.</p>

A1b	Aufgabe	
	Berechnen Sie die Ableitung von $f(x)$ an den Stellen $x = 2$ und $x = u$.	$f(x) = \frac{2}{x}$

A1	Ausführliche Lösung
	<p>b)</p> $f(x) = \frac{2}{x}$ $x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2 + \Delta x} - \frac{2}{2}}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2 + \Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2 + \Delta x} - \frac{1 \cdot (2 + \Delta x)}{2 + \Delta x}}{\Delta x}$ $= \frac{\frac{2 - 1 \cdot (2 + \Delta x)}{2 + \Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 - 2 - \Delta x}{2 + \Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{2 + \Delta x}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{2 + \Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{-1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} (2 + \Delta x)} = \frac{-1}{2 + \Delta x}$ $f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{2 + \Delta x} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$ $x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{u + \Delta x} - \frac{2}{u}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 \cdot u}{u \cdot (u + \Delta x)} - \frac{2 \cdot (u + \Delta x)}{u \cdot (u + \Delta x)}}{\Delta x}$ $= \frac{\frac{2 \cdot u - 2 \cdot (u + \Delta x)}{u \cdot (u + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 \cdot u - 2 \cdot u - 2 \cdot \Delta x}{u \cdot (u + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-2 \cdot \Delta x}{u \cdot (u + \Delta x)}}{\Delta x}$ $= \frac{-2 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot u \cdot (u + \Delta x)} = \frac{-2}{u \cdot (u + \Delta x)} = \frac{-2}{u^2 + u \cdot \Delta x}$ $f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{u^2 + u \cdot \Delta x} \right) = \underline{\underline{-\frac{2}{u^2}}}$

A1c	Aufgabe	
	Berechnen Sie die Ableitung von $f(x)$ an den Stellen $x = 2$ und $x = u$.	$f(x) = \frac{1}{x+1}$

A1	Ausführliche Lösung	
	<p>c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$</p> <p>$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2 + \Delta x + 1} - \frac{1}{2 + 1}}{\Delta x}$</p> <p>$= \frac{\frac{1}{3 + \Delta x} - \frac{1}{3}}{\Delta x} = \frac{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot (3 + \Delta x)} - \frac{1 \cdot (3 + \Delta x)}{3 \cdot (3 + \Delta x)}}{\Delta x}$</p> <p>$= \frac{\frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot (3 + \Delta x)}{3 \cdot (3 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{3 - 3 - \Delta x}{3 \cdot (3 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{3 \cdot (3 + \Delta x) \cdot \Delta x} = \frac{-1}{3 \cdot (3 + \Delta x)}$</p> <p>$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{3(3 + \Delta x)} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$</p> <p>$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{u + \Delta x + 1} - \frac{1}{u + 1}}{\Delta x}$</p> <p>$= \frac{\frac{1 \cdot (u + 1)}{(u + 1) \cdot (u + \Delta x + 1)} - \frac{1 \cdot (u + \Delta x + 1)}{(u + 1) \cdot (u + \Delta x + 1)}}{\Delta x}$</p> <p>$= \frac{\frac{1 \cdot (u + 1) - 1 \cdot (u + \Delta x + 1)}{(u + 1) \cdot (u + \Delta x + 1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{u + 1 - u - \Delta x - 1}{(u + 1) \cdot (u + \Delta x + 1)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{(u + 1) \cdot (u + \Delta x + 1) \cdot \Delta x}$</p> <p>$= \frac{-1 \cdot \Delta x}{\Delta x \cdot (u + 1) \cdot (u + \Delta x + 1)} = \frac{-1}{(u + \Delta x + 1)(u + 1)}$</p> <p>$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(u + \Delta x + 1)(u + 1)} = \frac{-1}{(u + 1)(u + 1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{(u + 1)^2}}}$</p>	

A1d	Aufgabe	
	Berechnen Sie die Ableitung von $f(x)$ an den Stellen $x = 2$ und $x = u$.	$f(x) = \sqrt{x}$

A1	Ausführliche Lösung
	<p>d) $f(x) = \sqrt{x}$</p> <p>$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2 + \Delta x} - \sqrt{2}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{2 + \Delta x} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2})}{\Delta x \cdot (\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2})}$</p> $= \frac{2 + \Delta x - 2}{\Delta x \cdot (\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2})} = \frac{1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot (\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2}}$ <p>$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$</p> <p>$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{u + \Delta x} - \sqrt{u}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{u + \Delta x} - \sqrt{u}) \cdot (\sqrt{u + \Delta x} + \sqrt{u})}{\Delta x \cdot (\sqrt{u + \Delta x} + \sqrt{u})}$</p> $= \frac{u + \Delta x - u}{\Delta x \cdot (\sqrt{u + \Delta x} + \sqrt{u})} = \frac{1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot (\sqrt{u + \Delta x} + \sqrt{u})} = \frac{1}{\sqrt{u + \Delta x} + \sqrt{u}}$ <p>$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{u + \Delta x} + \sqrt{u}} \right) = \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$</p>

A2 Aufgabe	
Leiten Sie ab.	
a)	$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$
b)	$f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$
c)	$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4$
d)	$s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2}$
e)	$f(x) = -(x-6)^2(x+1)$
f)	$f(x) = \frac{1}{2}(x^2-2)^2$

A2 Ausführliche Lösung	
a)	$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = -8x^3 + 6x - 4$
b)	$f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$
c)	$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}$
d)	$s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2} \Rightarrow s'(t) = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3}$
e)	$f(x) = -(x-6)^2(x+1) = -x^3 + 11x^2 - 24x - 36 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$
f)	$f(x) = \frac{1}{2}(x^2-2)^2 = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 4x$

A3 Aufgabe	
Leiten Sie ab.	
a)	$f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1)$
b)	$f(x) = x \left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4 \right)$
c)	$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
d)	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
e)	$f(x) = 6x + \frac{5}{x}$
f)	$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x}$

A3 Ausführliche Lösung	
a)	$f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}$
b)	$f(x) = x \left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4 \right) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - 4$
c)	$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$
d)	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
e)	$f(x) = 6x + \frac{5}{x} = 6x + 5x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 6 - 5x^{-2} = 6 - \frac{5}{x^2}$
f)	$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} = x^3 - 2x^2 + x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - x^{-2} = 3x^2 - 4x - \frac{1}{x^2}$

A4. Aufgabe	
Leiten Sie ab.	
a)	$f_t(x) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2$
b)	$f_k(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x$
c)	$f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3$
d)	$f_t(x) = \frac{1}{2t}(x^2 - t)^2$
e)	$f(t) = 5t^3 - 2t + 5$
f)	$f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z$
g)	$A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1$
h)	$A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1)$

A4 Ausführliche Lösung	
a)	$f_t(x) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2 \Rightarrow f_t'(x) = 2tx^3 - 6tx^2$
b)	$f_k(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x \Rightarrow f_k'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + k + 1$
c)	$f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3 \Rightarrow f_a'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$
d)	$f_t(x) = \frac{1}{2t}(x^2 - t)^2 = \frac{1}{2t}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}t \Rightarrow f_t'(x) = \frac{2}{t}x^3 - 2x$
e)	$f(t) = 5t^3 - 2t + 5 \Rightarrow f'(t) = 15t^2 - 2$
f)	$f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z \Rightarrow f'(z) = -4,5z^2 + 5z + 1$
g)	$A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1 \Rightarrow A'(u) = u + 5$
h)	$A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1) = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u \Rightarrow A'(u) = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}$

A5 Aufgabe	
Berechnen Sie die Steigung von $f(x)$ an der Stelle $x = -3$ und in den Schnittpunkten von $f(x)$ mit der x -Achse	
a)	$f(x) = 3x^2 - 5$
b)	$f(x) = 4x - \frac{1}{x}$

A5 Ausführliche Lösung	
a)	$f(x) = 3x^2 - 5 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(-3) = 6 \cdot (-3) = \underline{\underline{-18}}$ Nullstellen von $f(x)$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow f'\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 6 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \underline{\underline{\pm 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}}}$

A5	Ausführliche Lösung
b)	$f(x) = 4x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 4 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(-3) = 4 + \frac{1}{9} = \underline{\underline{\frac{37}{9}}}$ <p>Nullstellen von $f(x)$:</p> $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1/2} = \pm \frac{1}{2}$ $\Rightarrow f'\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{\left(\pm \frac{1}{2}\right)^2} = 4 + \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$

A6	Aufgabe
Leiten Sie ab.	
a)	$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$
b)	$f(x) = -x^2 + 2x - 1$
c)	$f(x) = x + 1$
d)	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4$
e)	$f(x) = 5b; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
f)	$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$
g)	$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$
h)	$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$
i)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7$
j)	$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 5x + 8$

A6	Ausführliche Lösungen
a)	$f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 3$
b)	$f(x) = -x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2$
c)	$f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1$
d)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{3}$
e)	$f(x) = 5b; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) = 0$
f)	$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}$
g)	$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x - 4$
h)	$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{3}{4}$
i)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = x + 3$
j)	$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 5x + 8 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x + 5$