Lösungen Training Exponentialgleichungen I
Exponentialgleichungen lösen

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \Rightarrow x=1-\ln(2)$

E2	Ergebnis
	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)$

E3	Ergebnis
	$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0 \Rightarrow$ keine Lösung

E4	Ergebnis
	$(3+2x)e^{x-1}=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

E5	Ergebnis
	$-2x^2e^{-x+2}=0 \Rightarrow x=0$

E6	Ergebnis
	$-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0 \Rightarrow x_1=\ln(5)$

E7	Ergebnis
	$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow x_1=2\ln(3)$ und $x_2=0$

E8	Ergebnis
	$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x} \Rightarrow x_1=-\ln(2)$

E9	Ergebnis
	$\frac{2x}{e^{x}+1}=0 \Rightarrow x=0$

E10	Ergebnis
	$\left(2-e^{x}\right)^2=\left(e^{x}-3\right)^2 \Rightarrow x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Exponentialgleichung	$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$

A1	**Ausführliche Lösung**
	$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}e^{2-2x}=6 \mid :\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2-2x}=4 \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4) \mid -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x=\ln(4)-2 \mid :(-2) \quad \Leftrightarrow \quad x=1-\frac{1}{2}\ln(4)$ $\Leftrightarrow x=1-\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1-\ln(2)}}$ Lösung durch logarithmieren.

A2	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Exponentialgleichung	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$

A2	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{2}e=1 \mid +\frac{1}{2}e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}e^{4x}=1+\frac{1}{2}e \mid \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{4x}=4+2e \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow \quad 4x=\ln(4+2e) \mid :4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)}}$ Lösung durch logarithmieren.

A3	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Exponentialgleichung	$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0$

A3	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0 \mid \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x}-2e^{x+1}=0 \mid +2e^{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad e^{x}=2e^{x+1} \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow \quad \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(2e^{x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(2)+\ln\left(e^{x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(2)+x+1 \mid -x$ $\Leftrightarrow \quad 0=\ln(2)+1 \mid -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2)=-1$ Widerspruch $\Leftrightarrow$ keine Lösung Lösung durch logarithmieren. Wenn bei der Lösung einer Gleichung ein Widerspruch auftritt, dann hat sie keine Lösung.

A4	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Exponentialgleichung	$(3+2x)e^{x-1}=0$

A4 Ausführliche Lösung

$$(3+2x)e^{x-1}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3+2x=0\,|-3$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x=-3\,|:2 \qquad \Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-\frac{3}{2}}}$$

e^{x-1} ist die Funktion e^x verschoben um 1 EH auf der x – Achse nach rechts. Lösung nach dem Satz vom Nullprodukt. Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Da die e- Funktion nicht Null wird, kann nur der Faktor (3 + 2x) Null werden.

A5	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Exponentialgleichung	$-2x^2e^{-x+2}=0$

A5 Ausführliche Lösung

$$-2x^2e^{-x+2}=0$$

$$-2x^2e^{-x+2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad -2x^2=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=0}}$$

e^{-x+2} ist die Funktion e^{-x} verschoben um 2 EH auf der x – Achse nach links. Lösung nach dem Satz vom Nullprodukt. Die e- Funktion wird nicht Null.

A6	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Exponentialgleichung	$-\frac{1}{5}e^x-1+10e^{-x}=0$

A6 Ausführliche Lösung

$$-\frac{1}{5}e^x-1+10e^{-x}=0 \text{ Substitution } u=e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}u-1+\frac{10}{u}=0\,|\cdot u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}u-1+\frac{10}{u}=0\,|\cdot(-5) \quad\Leftrightarrow\quad u^2+5u-50=0$$

$$p=5\,;\,q=-50 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}+\frac{200}{4}=\frac{225}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l} u_1=-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}=5 \\ u_2=-\frac{5}{2}-\frac{15}{2}=-10 \end{array}\right.$$

$$u_1=5 \Leftrightarrow e^x=5 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=\ln(5)}}$$

$$u_2=-10 \Leftrightarrow e^x=-10 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Lösung durch Substitution. Beim Zurücksubstituieren ist darauf zu achten, dass der Logarithmus nur für positive Zahlen größer Null definiert ist.

A7	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Exponentialgleichung	$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}$

A7 Ausführliche Lösung

$$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x} \text{ Substitution } u=e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 4-\frac{3}{u}=u \mid \cdot u$$

$$\Leftrightarrow 4u-3=u^2 \mid -u^2 \quad \Leftrightarrow \quad -u^2+4u-3=0 \mid \cdot(-1) \quad \Leftrightarrow \quad u^2-4u+3=0$$

$$p=-4\,;q=3 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-3=1 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{1}=1$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \Big| \quad \begin{matrix} u_1=2+1=3 \\ u_2=2-1=1 \end{matrix}$$

$$u_1=3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=2\ln(3)}}$$

$$u_2=1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln(1) \Leftrightarrow x_2=2\underbrace{\ln(1)}_{0} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=0}}$$

Lösung durch Substitution.

A8	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Exponentialgleichung	$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}$

A8 Ausführliche Lösung

$$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x} \text{ Substitution } u=e^{-x} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2+5=u \mid -u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2-u+5=0 \mid :\left(-\frac{3}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad u^2+\frac{4}{3}u-\frac{20}{3}=0$$

$$p=\frac{4}{3}\,;q=-\frac{20}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{4}{9}+\frac{60}{9}=\frac{64}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \Big| \quad \begin{matrix} u_1=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=2 \\ u_2=-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{10}{3} \end{matrix}$$

$$u_1=2 \Leftrightarrow e^{-x}=2 \Leftrightarrow -x=\ln(2) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=-\ln(2)}}$$

$$u_2=-\frac{10}{3} \Leftrightarrow e^{-x}=-\frac{10}{3} \Leftrightarrow -x=\underbrace{\ln\left(-\frac{10}{3}\right)}_{\text{nicht definiert}} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Lösung durch Substitution.

A9	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Exponentialgleichung	$\frac{2x}{e^x+1}=0$

A9	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{2x}{e^x+1}=0 \mid \cdot\left(e^x+1\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=0}}$

A10	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Exponentialgleichung	$\left(2-e^x\right)^2=\left(e^x-3\right)^2$

A10	**Ausführliche Lösung**
	$\left(2-e^x\right)^2=\left(e^x-3\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4-4e^x+e^{2x}=e^{2x}-6e^x+9 \mid -e^{2x}$
	$\Leftrightarrow 4-4e^x=-6e^x+9 \mid +6e^x \quad \Leftrightarrow \quad 4+2e^x=9 \mid -4 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x=5 \mid :2$
	$\Leftrightarrow e^x=\frac{5}{2} \mid \ln(\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$
	Lösung durch logarithmieren.