

**Beispiel I Training ganzrationale Funktionen VII****Ausführliches Beispiel zu ganzrationale Funktion durch 4 Punkte**

Es soll die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades gefunden werden, deren Graph durch die folgenden Punkte verläuft:

$$P_1(-4 | -10); P_2(-1 | 5); P_3(3 | -3); P_4(5 | 8)$$

Aufstellen des Gleichungssystems:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_2(-1 | 5) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 5$$

$$P_3(3 | -3) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -3$$

$$P_1(-4 | -10) \Rightarrow f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -10$$

$$P_4(5 | 8) \Rightarrow f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 8$$

Lösung durch den Gauß – Algorithmus :

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	-1	1	-1	5	
1	3	9	27	-3	II-I
1	-4	16	-64	-10	III-I
1	5	25	125	8	IV-I
1	-1	1	-1	5	
0	4	8	28	-8	:4
0	-3	15	-63	-15	:3
0	6	24	126	3	:3
1	-1	1	-1	5	
0	1	2	7	-2	
0	-1	5	-21	-5	III+II
0	2	8	42	1	IV-2·II
1	-1	1	-1	5	
0	1	2	7	-2	
0	0	7	-14	-7	:7
0	0	4	28	5	
1	-1	1	-1	5	
0	1	2	7	-2	
0	0	1	-2	-1	
0	0	4	28	5	IV-4·III
1	-1	1	-1	5	
0	1	2	7	-2	
0	0	1	-2	-1	
0	0	0	36	9	

  

$$36a_3 = 9$$

$$\Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{4}$$

$$a_2 - 2a_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow a_2 - 2 \cdot \frac{1}{4} = -1$$

$$\Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$a_1 + 2a_2 + 7a_3 = -2$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 7 \cdot \frac{1}{4} = -2$$

$$\Leftrightarrow a_1 = -\frac{11}{4}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 5$$

$$\Leftrightarrow a_0 - \left(-\frac{11}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = 5$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 3$$

Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{4}x + 3}}$$

Für die Wertetabelle werden nun einige Werte mit dem Horner Schema berechnet.

$x = -3$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{4}$	$3$
	$\downarrow$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{15}{4}$	$-\underline{3}$
	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$1$	$0$
<hr/>				
$x = -2$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{4}$	$3$
		$-\frac{2}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{3}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$-1$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{9}{2}$
<hr/>				
$x = 1$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{4}$	$3$
		$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\underline{3}$
	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-3$	$0$
<hr/>				
$x = 2$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{4}$	$3$
		$\frac{1}{2}$	$0$	$-\frac{22}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$0$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{5}{2}$
<hr/>				
$x = 4$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{4}$	$3$
		$\underline{1}$	$\underline{2}$	$-\underline{3}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$0$

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-10	0	4,5	5	3	0	-2,5	-3	0	8

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{4}x + 3$$

