Lösungen ganzrationale Funktionen aus gegebenen Bedingungen I

Ausführliche Lösungen:

A1 Aufgabe

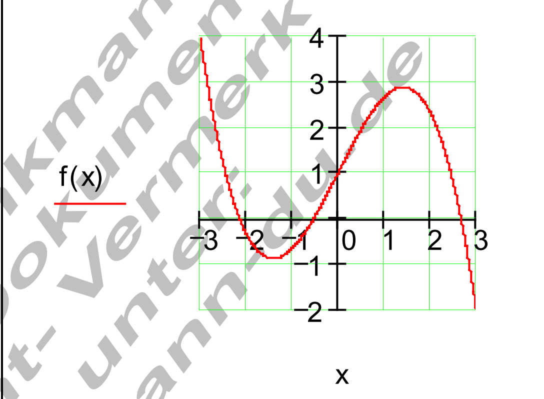
Gegeben ist die Wertetabelle einer ganzrationalen Funktion 3. Grades. Skizzieren Sie den Graphen und machen Sie eine Aussage über die Funktion.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$	–2

A1 Ausführliche Lösung

Es existieren 3 Nullstellen (Wertetabelle).
Der Graph verläuft von II – III – I – IV.
Schnittpunkt mit der y – Achse:
$P_y(0 | 1)$.
Punktsymmetrisch zu P(0 | 1).

Bemerkung zur Punktsymmetrie:
Zwei Punkte, $P_0(x_0 | y_0)$ und $P_1(x_1 | y_1)$ liegen auf dem Graphen von f(x).
Liegt der Spiegelpunkt $P_1'(x_1' | y_1')$ ebenfalls auf dem Graphen, so ist der Graph von f(x) symmetrisch zu $P_0(x_0 | y_0)$



A2a Aufgabe

Eine ganzrationale Funktion 3. Ordnung verläuft durch die gegebenen Punkte. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und die Achsenschnittpunkte. Stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen.

$P_1(-3|0,5);P_2(0|-4)$
$P_3(1|-1,5);P_4(2|-2)$

A2 Ausführliche Lösung

a) Allgemeine Form der Funktionsgleichung $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

Aufstellen des Gleichungssystems aus den vorgegebenen Punkten:

$P_1(-3|0,5): f(-3) = -27a_3+9a_2-3a_1+a_0 = 0,5$

$P_2(0|-4): \quad f(0) = \qquad a_0 = \underline{\underline{-4}}$

$P_3(1|-1,5): f(1) = a_3+a_2+a_1+a_0 = 0,5$

$P_4(2|-2): f(2) = 8a_3+4a_2+2a_1+a_0 = -2$

Wegen $a_0=-4$ vereinfacht sich das Gleichungssystem.

$-27a_3+9a_2-3a_1=4,5$

$a_3+a_2+a_1=2,5$

$8a_3+4a_2+2a_1=2$

A2 Ausführliche Lösung

a) Lösung durch den Gauss – Algorithmus:

a_3	a_2	a_1	
1	1	1	2,5
8	4	2	$2\,II - 8 \cdot I$
−27	9	−3	$4{,}5\,III + 27 \cdot I$
1	1	1	2,5
0	−4	−6	−18
0	36	24	$72\,III + 9 \cdot II$
1	1	1	2,5
0	−4	−6	−18
0	0	−30	−90

Berechnung der Koeffizienten:

$$-30a_1 = -90$$
$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{-90}{-30} = \underline{\underline{3}}$$
$$-4a_2 - 6a_1 = -18$$
$$\Leftrightarrow -4a_2 - 18 = -18$$
$$\Leftrightarrow a_2 = \frac{-18+18}{-4} = \underline{\underline{0}}$$
$$a_3 + a_2 + a_1 = 2{,}5$$
$$\Leftrightarrow a_3 + 3 = 2{,}5$$
$$\Leftrightarrow a_3 = 2{,}5 - 3 = \underline{\underline{-0{,}5}}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = -0{,}5x^3 + 3x - 4$

Um den Funktionsgraphen zeichnen zu können, benötigen wir zu den in der Aufgabenstellung vorgegebenen Punkten einige zusätzliche.
Diese bestimmen wir mit dem HORNER – Schema.

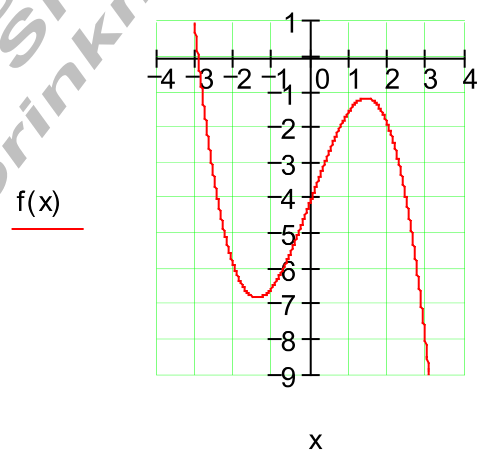
A2 Ausführliche Lösung

a) HORNER – Schema:

$x = -2$	−0,5	0	3	−4
		1	−2	−2
	−0,5	1	1	$\underline{\underline{-6}}$
$x = -1$	−0,5	0	3	−4
		0,5	−0,5	−2,5
	−0,5	0,5	2,5	$\underline{\underline{-6{,}5}}$
$x = 3$	−0,5	0	3	−4
		−1,5	−4,5	−4,5
	−0,5	−1,5	−1,5	$\underline{\underline{-8{,}5}}$

Wertetabelle:

x	−3	−2	−1	0
f(x)	0,5	−6	−6,5	−4
x	1	2	3	
f(x)	−1,5	−2	−8,5	



Schnittpunkt mit der y – Achse:
$P_1(0 \mid -4)$
Es existiert nur eine Nullstelle, sie liegt in der Nähe von x = -3.

A2b	**Aufgabe**	
	Eine ganzrationale Funktion 3. Ordnung verläuft durch die gegebenen Punkte. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und die Achsenschnittpunkte. Stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen.	$P_1(-3\,\vert\,44);P_2(-1\,\vert\,2)$ $P_3(1\,\vert\,0);P_4(2\,\vert\,-1)$

A2	**Ausführliche Lösung**	
	b)	Das Gleichungssystem:
		$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
		$P_1(-3\,\vert\,44): f(-3)=-27a_3+9a_2-3a_1+a_0=44$
		$P_2(-1\,\vert\,2):\quad f(-1)=\quad -a_3+a_2-a_1+a_0\quad =2$
		$P_3(1\,\vert\,0):\quad f(1)=\quad a_3+a_2+a_1+a_0\quad =0$
		$P_4(2\,\vert\,-1):\quad f(2)=8a_3+4a_2+2a_1+a_0\quad =-1$

A2 **Ausführliche Lösung**

b) Der Gauss – Algorithmus

a_0	a_1	a_2	a_3	
1	–3	9	–27	44
1	–1	1	–1	2 II – I
1	1	1	1	0 II – I
1	2	4	8	–1 II – I
1	–3	9	–27	44
0	2	–8	26	–42 | : 2
0	4	–8	28	–44 | : 4
0	5	–5	35	–45 : 5
1	–3	9	–27	44
0	1	–4	13	–21
0	1	–2	7	–11 III – II
0	1	–1	7	–9 IV – II
1	–3	9	–27	44
0	1	–4	13	–21
0	0	2	–6	10 | : 2
0	0	3	–6	12 | : 3
1	–3	9	–27	44
0	1	–4	13	–21
0	0	1	–3	5
0	0	1	–2	4 IV – III
1	–3	9	–27	44
0	1	–4	13	–21
0	0	1	–3	5
0	0	0	1	–1

Die Koeffizienten:

$a_3 = -1$

$a_2 - 3a_3 = 5$
$\Leftrightarrow a_2 + 3 = 5$
$\Leftrightarrow a_2 = 5 - 3 = 2$

$a_1 - 4a_2 + 13a_3 = -21$
$\Leftrightarrow a_1 - 8 - 13 = -21$
$\Leftrightarrow a_1 = -21 + 8 + 13 = 0$

$a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = 44$
$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 27 = 44$
$\Leftrightarrow a_0 = 44 - 27 - 18 = -1$

Die Funktionsgleichung:

$\underline{\underline{f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1}}$

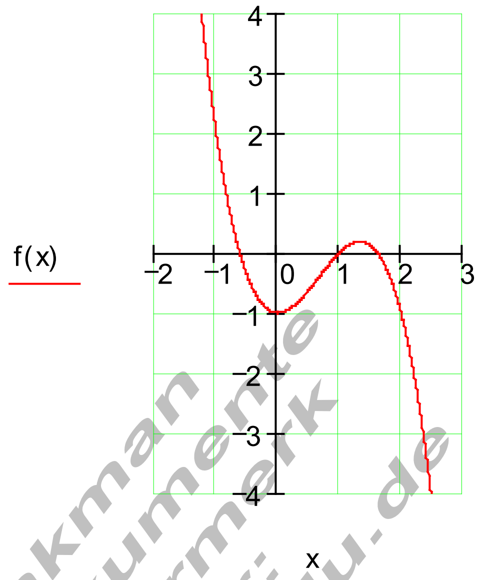
A2	**Ausführliche Lösung**

b) HORNER – Schema:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 2 & 0 & -1 \\
x=-2 & & \underline{2} & \underline{-8} & \underline{+16} \\
 & -1 & 4 & -8 & \underline{\underline{15}} \\
\hline
 & -1 & 2 & 0 & -1 \\
x=1{,}5 & & \underline{-1{,}5} & \underline{0{,}75} & \underline{+1{,}125} \\
 & -1 & 0{,}5 & 0{,}75 & \underline{\underline{0{,}125}} \\
\hline
 & -1 & 2 & 0 & -1 \\
x=3 & & \underline{-3} & \underline{-3} & \underline{-9} \\
 & -1 & -1 & -3 & \underline{\underline{-10}}
\end{array}$$

Wertetabelle:

x	−3	−2	−1	0
f(x)	44	15	2	−1
x	1	1,5	2	3
f(x)	0	0,125	−1	−10



A2	**Ausführliche Lösung**

b) Schnittpunkt mit der y – Achse: $P_y(0 \mid -1)$
1. Nullstelle wird der Wertetabelle entnommen: $P_{x1}(1 \mid 0)$.
Statt über die Polynomdivision kann man die weiteren Nullstellen über das HORNER – Schema bestimmen. Führt man die Berechnung für den x – Wert einer Nullstelle durch, dann erhält man die Koeffizienten für das Ergebnis der Polynomdivision.

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$ bekannte Nullstelle: $P_{x1}(1 \mid 0)$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 2 & 0 & -1 \\
x=1 & & \underline{-1} & \underline{1} & \underline{1} \\
 & \color{red}{-1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 0
\end{array}
\qquad \left(-x^3 + 2x^2 - 1\right) : (x-1) = \color{red}{-1}x^2 + \color{red}{1}x + \color{red}{1}$$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow p = -1;\ q = -1 \Rightarrow D = 0{,}25 + 1 = 1{,}25$

$\Rightarrow x_2 = 0{,}5 + \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}62\ ;\ x_3 = 0{,}5 - \sqrt{1{,}25} \approx -0{,}62$

A3a	**Aufgabe**	
	Eine zur y – Achse symmetrische ganzrationale Funktion 4. Grades verläuft durch die gegebenen Punkte. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.	$P_1(0\,|\,2)\,;P_2(-2\,|\,0)\,;P_3\left(1\,\middle|\,\frac{57}{40}\right)$

A3 Ausführliche Lösung

a)

Achsensymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$P_1(0\,|\,2):\quad f(0) = a_0 = \underline{\underline{2}}$

$P_2(-2\,|\,0):\ f(-2) = 16a_4 + 4a_2 + 2 = 0$

$P_3\left(1\,|\,\frac{57}{40}\right): f(1) = 1a_4 + a_2 + 2 = \frac{57}{40}$

Gleichungssystem

$$\Rightarrow \begin{aligned} 16a_4 + 4a_2 &= -2 \\ 1a_4 + 1a_2 &= -\frac{23}{40} \end{aligned}$$

Gauß – Algorithmus

a_4	a_2		
16	4	-2	
1	1	$-\frac{23}{40}$	$|\cdot 40$
16	4	-2	
40	40	-23	$II - 10\cdot I$
16	4	-2	
-120	0	-3	

Berechnung der Koeffizienten

$-120a_4 = -3 \Leftrightarrow a_4 = \underline{\frac{1}{40}}$

$16a_4 + 4a_2 = -2$

$\Leftrightarrow 16\cdot\frac{1}{40} + 4a_2 = -2 \Leftrightarrow 4a_2 = -2 - \frac{2}{5} = -\frac{12}{5}$

$\Leftrightarrow a_2 = \frac{-\frac{12}{5}}{4} = -\frac{3}{5}$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{40}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 2$

A3b	**Aufgabe**	
	Eine zur y – Achse symmetrische ganzrationale Funktion 4. Grades verläuft durch die gegebenen Punkte. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.	$P_1\left(1 \mid \frac{1}{16}\right); P_2(2 \mid -2); P_3(-4 \mid 1)$

A3 Ausführliche Lösung

b)

Achsensymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$P_1\left(1 \mid \frac{1}{16}\right)$: $f(1) = 1a_4 + 1a_2 + a_0 = \frac{1}{16}$

$P_2(2 \mid -2)$: $f(2) = 16a_4 + 4a_2 + a_0 = -2$

$P_3(-4 \mid 1)$: $f(-4) = 256a_4 + 16a_2 + a_0 = 1$

Gleichungssystem

$$\Rightarrow \begin{aligned} 1a_4 + 1a_2 + a_0 &= \frac{1}{16} \\ 16a_4 + 4a_2 + a_0 &= -2 \\ 256a_4 + 16a_2 + a_0 &= 1 \end{aligned}$$

Gauß – Algorithmus

a_0	a_2	a_4		
1	1	1	$\frac{1}{16}$	
1	4	16	-2	II – I
1	16	256	1	III – I
1	1	1	$\frac{1}{16}$	
0	3	15	$-\frac{33}{16}$	
0	15	255	$\frac{15}{16}$	III – 5 · II
1	1	1	$\frac{1}{16}$	
0	3	15	$-\frac{33}{16}$	
0	0	180	$\frac{180}{16}$	

Berechnung der Koeffizienten

$180a_4 = \frac{180}{16} \Leftrightarrow a_4 = \underline{\frac{1}{16}}$

$3a_2 + 15a_4 = -\frac{33}{16}$

$\Leftrightarrow 3a_2 + \frac{15}{16} = -\frac{33}{16}$

$\Leftrightarrow 3a_2 = -\frac{33}{16} - \frac{15}{16} = -\frac{48}{16} = -3$

$\Leftrightarrow a_2 = \frac{-3}{3} = \underline{-1}$

$a_0 + a_2 + a_4 = \frac{1}{16}$

$\Leftrightarrow a_0 - 1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a_0 = \underline{1}$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - x^2 + 1$

A3c	**Aufgabe**	
	Eine zur y – Achse symmetrische ganzrationale Funktion 4. Grades verläuft durch die gegebenen Punkte. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.	$P_1\left(\sqrt{3}\;\middle|\;-\frac{9}{4}\right); P_2\left(\sqrt{2}\,\middle|\,-2\right); P_3\left(-1\;\middle|\;-\frac{5}{4}\right)$

A3 Ausführliche Lösung

c)

Achsensymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$P_1\left(\sqrt{3}\,|\,-\frac{9}{4}\right)$: $f(\sqrt{3}) = 9a_4 + 3a_2 + a_0 = -\frac{9}{4}$

$P_2\left(\sqrt{2}\,|\,-2\right)$: $f(\sqrt{2}) = 4a_4 + 2a_2 + a_0 = -2$

$P_3\left(-1\,|\,-\frac{5}{4}\right)$: $f(-1) = 1a_4 + 1a_2 + a_0 = -\frac{5}{4}$

Gleichungssystem

$$\Rightarrow \begin{aligned} 9a_4 + 3a_2 + a_0 &= -\frac{9}{4} \\ 4a_4 + 2a_2 + a_0 &= -2 \\ 1a_4 + 1a_2 + a_0 &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Gauß – Algorithmus

a_0	a_2	a_4		
1	2	4	-2	
1	3	9	$-\frac{9}{4}$	$\lvert\cdot 4$
1	1	1	$-\frac{5}{4}$	$\lvert\cdot 4$
1	2	4	-2	
4	12	36	-9	$II - 4\cdot I$
4	4	4	-5	$III - 4\cdot I$
1	2	4	-2	
0	4	20	-1	
0	-4	-12	3	$III + II$
1	2	4	-2	
0	4	20	-1	
0	0	8	2	

Berechnung der Koeffizienten

$8a_4 = 2 \Leftrightarrow a_4 = \underline{\frac{1}{4}}$

$4a_2 + 20a_4 = -1$

$\Leftrightarrow 4a_2 + \frac{20}{4} = -1$

$\Leftrightarrow a_2 = \frac{-1-5}{5} = \underline{-\frac{3}{2}}$

$a_0 + 2a_2 + 4a_4 = -2$

$\Leftrightarrow a_0 - 2\cdot\frac{3}{2} + 4\cdot\frac{1}{4} = -2$

$\Leftrightarrow a_0 = -2 + 3 - 1 = \underline{0}$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

A3d	**Aufgabe**	
	Eine zur y – Achse symmetrische ganzrationale Funktion 4. Grades verläuft durch die gegebenen Punkte. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.	$P_1\left(0 \mid \frac{3}{2}k\right); P_2\left(\sqrt{k} \mid \frac{16}{9}k\right); P_3\left(\sqrt{3k} \mid 2k\right)$

A3 Ausführliche Lösung

d)

Achsensymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$P_1\left(0 \mid \frac{3}{2}k\right)$: $\quad f(0) = a_0 = \frac{3}{2}k$

$P_2\left(\sqrt{k} \mid \frac{16}{9}k\right)$: $f\left(\sqrt{k}\right) = k^2a_4 + ka_2 + \frac{3}{2}k = \frac{16}{9}k$

$P_3\left(\sqrt{3k} \mid 2k\right)$: $f\left(\sqrt{3k}\right) = 9k^2a_4 + 3ka_2 + \frac{3}{2}k = 2k$

Gleichungssystem

$\Rightarrow k^2a_4 + ka_2 = \frac{5}{18}k$

$9k^2a_4 + 3ka_2 = \frac{1}{2}k$

Gauß – Algorithmus

a_4	a_2		
k^2	k	$\frac{5}{18}k$	$\mid \cdot 18$
$9k^2$	$3k$	$\frac{1}{2}k$	$\mid \cdot 2$
$18k^2$	$18k$	$5k$	
$18k^2$	$6k$	k	II – I
$18k^2$	$18k$	$5k$	
0	$-12k$	$-4k$	

Berechnung der Koeffizienten

$-12ka_2 = -4k \Leftrightarrow a_2 = \frac{-4k}{-12k} = \underline{\frac{1}{3}}$

$18k^2a_4 + 18ka_2 = 5k$

$\Leftrightarrow 18k^2a_4 + 6k = 5k$

$\Leftrightarrow a_4 = \frac{5k - 6k}{18k^2} = -\frac{1}{18k}$

Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{18k}x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}k$

A4a	**Aufgabe**	
	Eine ganzrationale Funktion 4. Grades verläuft durch folgende Punkte. Bestimmen Sie jeweils die Funktionsgleichung.	$P_1(0\,|\,0);\ P_2(1\,|\,2{,}5);\ P_3(-2\,|\,-14)$ $P_4(2\,|\,6);\ P_5(-1\,|\,-8{,}5)$

A4 Ausführliche Lösung

a) Das Gleichungssystem

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(0\,|\,0):\quad f(0) = \boxed{a_0 = 0}$$

$$P_2(1\,|\,2{,}5):\quad f(1) = 1a_4 + 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 = 2{,}5$$

$$P_3(-2\,|\,-14):\ f(-2) = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 = -14$$

$$P_4(2\,|\,6):\quad f(2) = 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 6$$

$$P_5(-1\,|\,-8{,}5):\ f(-1) = 1a_4 - 1a_3 + 1a_2 - 1a_1 = -8{,}5$$

A4 Ausführliche Lösung

a) Der Gauß- Algorithmus

a_4	a_3	a_2	a_1		
1	1	1	1	2,5	
16	−8	4	−2	−14	II − 16 · I
16	8	4	2	6	III − 16 · I
1	−1	1	−1	−8,5	IV − I
1	1	1	1	2,5	
0	−24	−12	−18	−54	
0	−8	−12	−14	−34	
0	−2	0	−2	−11	$\cdot(-1)$ $\underset{z_4}{\overset{z_2}{\rightleftarrows}}$
1	1	1	1	2,5	
0	2	0	2	11	
0	−8	−12	−14	−34	III + 4 · II
0	−24	−12	−18	−54	IV + 12 · II
1	1	1	1	2,5	
0	2	0	2	11	
0	0	−12	−6	10	
0	0	−12	6	78	IV − III
1	1	1	1	2,5	
0	2	0	2	11	
0	0	−12	−6	10	
0	0	0	12	68	

$$12a_1 = 68$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{68}{12} = \underline{\frac{17}{3}}$$

$$-12a_2 - 6a_1 = 10$$

$$\Leftrightarrow -12a_2 = 10 + \frac{6\cdot 17}{3} = 44$$

$$\Leftrightarrow a_2 = \frac{44}{-12} = \underline{-\frac{11}{3}}$$

$$2a_3 + 2a_1 = 11$$

$$\Leftrightarrow 2a_3 = 11 - \frac{2\cdot 17}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$\Leftrightarrow a_3 = \underline{-\frac{11}{6}}$$

$$a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 2{,}5 = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow a_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} + \frac{11}{3} - \frac{17}{3} = \underline{\frac{2}{3}}$$

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{17}{3}x$$

A4b	**Aufgabe**	
	Eine ganzrationale Funktion 4. Grades verläuft durch folgende Punkte. Bestimmen Sie jeweils die Funktionsgleichung.	$P_1(0\,|\,-4)\,;P_2(-2\,|\,-4)\,;P_3(2\,|\,12)$ $P_4\left(1\,\middle|\,-\frac{5}{2}\right);P_5\left(-1\,\middle|\,-\frac{9}{2}\right)$

A4	**Ausführliche Lösung**
b)	$f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
	$P_1(0\,|\,-4):\quad f(0)=\boxed{a_0=-4}$
	$P_2(-2\,|\,-4):\quad f(-2)=16a_4-8a_3+4a_2-2a_1-4=-4$
	$P_3(2\,|\,12):\quad f(2)=16a_4+8a_3+4a_2+2a_1-4=12$
	$P_4(1\,|\,-2{,}5):\quad f(1)=1a_4+a_3+a_2+a_1-4=-2{,}5$
	$P_5(-1\,|\,-4{,}5):f(-1)=1a_4-1a_3+1a_2-1a_1=-4{,}5$
	Gleichungssystem:
	$16a_4-8a_3+4a_2-2a_1=0$
	$16a_4+8a_3+4a_2+2a_1=16$
	$1a_4+1a_3+1a_2+1a_1=1{,}5$
	$1a_4-1a_3+1a_2-1a_1=-0{,}5$

A4 Ausführliche Lösung

b) Gauß- Algorithmus

Die Gleichungen können in beliebiger Reihenfolge eingesetzt werden.

a_4	a_3	a_2	a_1		
1	1	1	1	$1,5 \mid \cdot 2$	
1	−1	1	−1	$-0,5\ \mathrm{I} \cdot 2$	
16	8	4	2	$16\ \mathrm{I} : 2$	
16	−8	4	−2	$0 \mid : 2$	$6a_1 = 0$
2	2	2	2	3	$\Leftrightarrow a_1 = 0$
2	−2	2	−2	$-1\ \mathrm{II} - \mathrm{I}$	
8	4	2	1	$8\ \mathrm{III} - \mathrm{I}$	$-6a_2 = 0$
8	−4	2	−1	$0\ \mathrm{IV} - \mathrm{I}$	$\Leftrightarrow a_2 = 0$
2	2	2	2	3	
0	−4	0	−4	−4	$-4a_3 = -4$
0	−4	−6	−7	$-4\ \mathrm{III} - \mathrm{II}$	$\Leftrightarrow a_3 = 1$
0	−12	−6	−9	$-12\ \mathrm{IV} - 3 \cdot \mathrm{II}$	
2	2	2	2	3	$2a_4 + 2a_3 = 3 \Leftrightarrow 2a_4 = 3 - 2 = 1$
0	−4	0	−4	−4	
0	0	−6	−3	0	$\Leftrightarrow a_4 = \frac{1}{2}$
0	0	−6	3	$0\ \mathrm{IV} - \mathrm{III}$	Funktionsgleichung:
2	2	2	2	3	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - 4$
0	−4	0	−4	−4	
0	0	−6	−3	0	
0	0	0	6	0	

A5 Aufgabe

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat in P_1 einen Sattelpunkt, schneidet die x – Achse in P_x und verläuft durch den Punkt P_2. Bestimmen Sie den Funktionsterm. Daten: $P_1(0 \mid 0); P_x(3 \mid 0); P_2(2 \mid -2)$

A5 Ausführliche Lösung

$P_1(0 \mid 0)$ ist Sattelpunkt $\Rightarrow$ 3 – fache Nullstelle

$P_x(3 \mid 0)$ ist einfache Nullstelle

$\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = a_4 x^3 (x - 3)$

$$P_2(2 \mid -2): f(2) = -2 \Leftrightarrow a_4 \cdot 2^3 (2 - 3) = -2 \Leftrightarrow -8a_4 = -2 \Leftrightarrow a_4 = \frac{1}{4}$$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^3(x - 3) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3$

A 6	**Aufgabe**
	Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist achsensymmetrisch und schneidet die y – Achse in P_y . Weiterhin verläuft er durch die Punkte P_1 und P_2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x). Wie erhält man g(x) aus f(x)? Daten : $P_y(0\,|\,2)\,;\,P_1\left(\sqrt{6}\,|\,2\right);\,P_2(1\,|\,0{,}75)\,;\,g(x)=0{,}25x^2\left(x^2-6\right)$

A6 Ausführliche Lösung

Achsensymmetrie $\Rightarrow f(x)=a_4x^4+a_2x^2+a_0$

$P_y(0\,|\,2)\Rightarrow \boxed{a_0=2}$

$$\left.\begin{array}{l} P_1\left(\sqrt{6}\,|\,2\right): f\left(\sqrt{6}\right)=35a_4+6a_2+2=2 \\ P_1(1\,|\,0{,}75): f(1)=1a_4+1a_2+2=0{,}75 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} 36a_4+6a_2=0 \\ 1a_4+1a_2=-1{,}25 \end{array}$$

a_4	a_2		
36	6	0	
1	1	−1,25	$\|\cdot(-36)$
36	6	0	
−36	−36	45	II + I
36	6	0	
0	−30	45	

$$-30a_2=45 \Leftrightarrow a_2=\frac{45}{-30}=-\frac{3}{2}=\underline{-1{,}5}$$

$$36a_4+6a_2=0$$

$$\Leftrightarrow 36a_4=-6a_2=\frac{6\cdot 3}{2}=9$$

$$\Leftrightarrow a_4=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=\underline{\underline{0{,}25}}$$

$$\underline{\underline{f(x)=0{,}25x^4-1{,}5x^2+2}}$$

$g(x)=0{,}25x^2\left(x^2-6\right)=0{,}25x^4-1{,}5x^2$

$g(x)=f(x)-2$

Die Funktion g(x) entsteht aus f(x) durch Verschiebung um 2 LE nach unten.

A7	**Aufgabe**
	Der Graph der Funktion f(x) schneidet eine Parallele zur x – Achse im Abstand 3 in x = 0 und x = 2. x = 0 ist dreifache Schnittstelle. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm. Daten: $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_0$

A7	**Ausführliche Lösung**
	Wir bestimmen die Funktionsgleichung für f*(x) mit der Bedingung 3 fache Nullstelle in $x_1 = 0$ und einfache Nullstelle in $x_2 = 2$. Danach verschieben wir den Graphen um 3 LE nach oben bzw. nach unten, denn eine Parallele zur x – Achse vom Abstand 3 kann sowohl oberhalb als auch unterhalb der x – Achse verlaufen. Ansatz: $f^*(x) = a_4x^3(x-2)$ Verschiebung um 3 LE nach oben liefert: $f_1(x) = a_4x^3(x-2)+3$ Verschiebung um 3 LE nach unten liefert: $f_1(x) = a_4x^3(x-2)-3$ z.B für $a_4 = 1$ gilt: $f_1(x) = x^3(x-2)+3 = x^4-2x^3+3$ $f_2(x) = x^3(x-2)-3 = x^4-2x^3-3$

A8a	**Aufgabe**
	Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3+3x+2\,;D=\mathbb{R}$ Zeigen Sie: Der Graph von $f(x)$ ist symmetrisch zu $P(0\mid 2)$

A8	**Ausführliche Lösung**	
	a)	Der Graph der Funktion $g(x) = -x^3+3x$ ist symmetrisch zum Ursprung. Eine Verschiebung um 2 LE nach oben ergibt $f(x) = g(x)+2 = -x^3+3x+2$ $\Rightarrow$ f(x) ist symmetrisch zu $P(0\mid 2)$

A8b	Aufgabe
	Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 3x + 2\,;\, D = \mathbb{R}$
	Lösen Sie graphisch: $-x^3 + 3x + 2 > 0$

A8	Ausführliche Lösung	
b)	Nullstellen von $f(x) = -x^3 + 3x + 2$: 1. Nullstelle durch raten: $f(2) = -8 + 6 + 2 = 0 \Rightarrow P_{x1}(2\,\vert\,0)$ Polynomdivision: $\left(-x^3 + 3x + 2\right) : (x-2) = -x^2 - 2x - 1$ $\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$ I. binomische Formel $\Rightarrow x_{2/3} = -1 \Rightarrow P_{x2/3}(-1\,\vert\,0)$ ist Berührungspunkt. $f(x) > 0$ für $I = \{x \,\vert\, -1 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$