Lösungen Achsenschnittpunkte und Graphen ganzrationaler Funktionen I

Nullstellen berechnen und Graphen zeichnen

Ergebnisse und ausführliche Lösungen:

E1	**Aufgaben**			
	Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen:			
	a)	$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$	b)	$f(x) = x^2 - 6x + 9$
	c)	$f(x) = \left(x^2 - 25\right)\left(\frac{1}{2}x + 4\right)$	d)	$f(x) = x^6 - x^4$
	e)	$f(x) = 3x\left(\frac{2}{3}x - 2\right)\left(-2x + 3\right)$	f)	$f(x) = 3\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 - 4x + 10\right)$

E1	**Ergebnisse**	
	a)	$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2\left(x^2 + 2x + 1\right) = x^2\left(x + 1\right)\left(x + 1\right)$ $\Rightarrow P_{x_{1/2}}\left(0 \mid 0\right); P_{x_{3/4}}\left(-1 \mid 0\right)$
	b)	$f(x) = x^2 - 6x + 9 = \left(x - 3\right)\left(x - 3\right) \Rightarrow P_{x_{1/2}}\left(3 \mid 0\right)$
	c)	$f(x) = \left(x^2 - 25\right)\left(\frac{1}{2}x + 4\right) = \left(x - 5\right)\left(x + 5\right)\left(\frac{1}{2}x + 4\right)$ $\Rightarrow P_{x_1}\left(5 \mid 0\right); P_{x_2}\left(-5 \mid 0\right); P_{x_3}\left(-8 \mid 0\right)$
	d)	$f(x) = x^6 - x^4 = x^4\left(x^2 - 1\right) = x^4\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)$ $\Rightarrow P_{x_{1/2/3/4}}\left(0 \mid 0\right); P_{x_5}\left(1 \mid 0\right); P_{x_6}\left(-1 \mid 0\right)$
	e)	$f(x) = 3x\left(\frac{2}{3}x - 2\right)\left(-2x + 3\right) \Rightarrow P_{x_1}\left(0 \mid 0\right); P_{x_2}\left(3 \mid 0\right); P_{x_3}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right)$
	f)	$f(x) = 3\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 - 4x + 10\right)$ $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Rightarrow$ keine Lösung $x^2 - 4x + 10 = 0 \Rightarrow p = -4 ; q = 10$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-2\right)^2 - 10 = 4 - 10 < 0 \Rightarrow$ keine Lösung $f(x) = 3\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 - 4x + 10\right)$ hat keine Nullstellen

A2a	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x)=x^4-6x^2+5$

A2	**Ausführliche Lösung**
a)	$f(x)=x^4-6x^2+5$ Substitution $x^2=z \Rightarrow f(z)=z^2-6z+5$ $p=-6\,;\,q=5 \Rightarrow D=(-3)^2-5=9-5=4$ $z_{1/2}=3\pm 2 \Rightarrow z_1=5$ und $z_2=1$ $z_1=5=x^2 \Rightarrow \lvert x\rvert=5 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{5}$ $\quad z_2=1=x^2 \Rightarrow \lvert x\rvert=1 \Rightarrow x_{3/4}=\pm 1$ $P_{x_1}\left(\sqrt{5}\,\vert\,0\right);P_{x_2}\left(-\sqrt{5}\,\vert\,0\right);P_{x_3}\left(-1\vert 0\right);P_{x_4}\left(1\vert 0\right)$ $f(x)=\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)(x+1)(x-1)$

A2b	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$

A2	**Ausführliche Lösung**
b)	$f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ Substitution: $x^2=z \Rightarrow f(z)=4z^2+6z-\frac{7}{4}$ $4z^2+6z-\frac{7}{4}=0 \Leftrightarrow z^2+\frac{3}{2}z-\frac{7}{16}=0 \Rightarrow p=\frac{3}{2};q=-\frac{7}{16}$ $\Rightarrow D=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}=\frac{9}{16}+\frac{7}{16}=\frac{16}{16}=1 \Rightarrow z_{1/2}=-\frac{3}{4}\pm 1$ $\Rightarrow z_1=\frac{1}{4};z_2=-\frac{7}{4}$ $z_1=\frac{1}{4}=x^2 \Rightarrow \lvert x\rvert=\frac{1}{2} \Rightarrow x_{1/2}=\pm\frac{1}{2}$ $z_2=-\frac{7}{4}=x^2 \Rightarrow$ keine Lösung $P_{x_1}\left(-\frac{1}{2}\middle\vert 0\right);P_{x_2}\left(\frac{1}{2}\middle\vert 0\right)$

A2c	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x) = x^6 - 8x^4 + 20x^2$

A2 Ausführliche Lösung

c)

$f(x) = x^6 - 8x^4 + 20x^2 = x^2\left(x^4 - 8x^2 + 20\right)$

$x^2\left(x^4 - 8x^2 + 20\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$

$x^4 - 8x^2 + 20 = 0$ Substitution: $x^2 = z$

$\Rightarrow z^2 - 8z + 20 = 0 \Rightarrow p = -8\,;\, q = 20 \Rightarrow D = \left(-4\right)^2 - 20 < 0 \Rightarrow$ keine Lösung

$\underline{\underline{P_{x_{1/2}}\left(0\,|\,0\right)}}$

A3a	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

A3 Ausführliche Lösung

a)

$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 \Rightarrow 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

raten der 1. Nullstelle: $x_1 = 1$: $\quad 1^3 + 2\cdot 1^2 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$

Polynomdivision: $\left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right):\left(x - 1\right) = x^2 + 3x + 2$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow p = 3\,;\, q = 2 \Rightarrow D = 1{,}5^2 - 2 = 0{,}25$

$x_{2/3} = -1{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = -1{,}5 \pm 0{,}5 \Rightarrow x_2 = -1$ und $x_3 = -2$

$\underline{\underline{P_{x_1}\left(1\,|\,0\right);P_{x_2}\left(-1\,|\,0\right);P_{x_3}\left(-2\,|\,0\right)}}$

A3b	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x) = x^3 - 12x + 16$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$f(x) = x^3 - 12x + 16 \Rightarrow x^3 - 12x + 16$

raten der 1. Nullstelle: $x_1 = 2$ denn $2^3 - 12\cdot 2 + 16 = 0$

Polynomdivision: $\left(x^3 - 12x + 16\right):\left(x - 2\right) = x^2 + 2x - 8$

$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow p = 2\,;\, q = -8 \Rightarrow D = 1^2 + 8 = 9$

$x_{2/3} = -1 \pm 3 \Rightarrow x_2 = 2$ und $x_3 = -4$

$P_{x_1}\left(2\,|\,0\right);P_{x_2}\left(2\,|\,0\right);P_{x_3}\left(-4\,|\,0\right)$ oder $P_{x_{1/2}}\left(2\,|\,0\right);P_{x_3}\left(-4\,|\,0\right)$

A3c	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

A3 Ausführliche Lösung

c) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$

raten der 1. Nullstelle: $x_1 = 2 : 2^4 - 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 4 = 16 - 16 - 12 + 8 + 4 = 0$

Polynomdivision: $\left(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4\right) : (x - 2) = x^3 - 3x - 2$

$x^3 - 3x - 2 = 0$

raten der 2. Nullstelle: $x_2 = -1 : (-1)^3 - 3\cdot(-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$

Polynomdivision: $\left(x^3 - 3x - 2\right) : (x + 1) = x^2 - x - 2$

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow p = -1; q = -2 \Rightarrow D = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \frac{9}{4}$

$x_{3/4} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow x_3 = 2$ und $x_4 = -1$

$\underline{\underline{P_{x_1}(2\,|\,0); P_{x_2}(-1\,|\,0); P_{x_3}(2\,|\,0); P_{x_4}(-1\,|\,0) \text{ oder } P_{x_{1/2}}(2\,|\,0); P_{x_{3/4}}(-1\,|\,0)}}$

A3d	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x) = 2x^3 - 10x^2 - 4x + 20$

A3 Ausführliche Lösung

d) $f(x) = 2x^3 - 10x^2 - 4x + 20 \Rightarrow 2x^3 - 10x^2 - 4x + 20 = 0 \,|: 2$

$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$

raten der 1. Nullstelle: $x_1 = 5 \quad 5^3 - 5\cdot 5^2 - 2\cdot 5 + 10 = 0$

Polynomdivision: $\left(x^3 - 5x^2 - 2x + 10\right) : (x - 5) = x^2 - 2$

$\Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{2}\,; x_3 = -\sqrt{2}$

$\underline{\underline{P_{x_1}(5\,|\,0); P_{x_2}\left(-\sqrt{2}\,|\,0\right); P_{x_3}\left(\sqrt{2}\,|\,0\right)}}$

A3e	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$

A3 Ausführliche Lösung

e)

$f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2} \Rightarrow x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}=0$

raten der 1. Nullstelle: $x_1=2 \quad 2^4-\frac{11}{4}\cdot 2^2-\frac{9}{4}\cdot 2-\frac{1}{2}=16-11-\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=0$

Polynomdivision: $\left(x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}\right):(x-2)=x^3+2x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x^3+2x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}=0$

raten der 2. Nullstelle: $x_2=-1 \quad (-1)^3+2\cdot(-1)^2+\frac{5}{4}\cdot(-1)+\frac{1}{4}=-1+2-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=0$

Polynomdivision: $\left(x^3+2x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right):(x+1)=x^2+x+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x^2+x+\frac{1}{4}=0 \quad p=1;q=\frac{1}{4} \Rightarrow D=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$

$\Rightarrow x_{3/4}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_{x_1}(2\,|\,0);P_{x_2}(-1\,|\,0);P_{x_{3/4}}\left(-\frac{1}{2}\,|\,0\right)}}$

A3f	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

A3 Ausführliche Lösung

f)

$f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3 \Rightarrow -3x^3+3x^2-3x+3=0\,|:(-3)$

$\Leftrightarrow x^3-x^2+x-1=0$

raten der 1. Nullstelle: $x_1=1 \quad 1^3-1^2+1-1=0$

Polynomdivision: $\left(x^3-x^2+x-1\right):(x-1)=x^2+1$

$\Rightarrow x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ keine Lösung

$\underline{\underline{P_{x_1}(1\,|\,0)}}$

A3g	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x) = -5x^3 - 10x^2 - \frac{5}{2}x - 5$

A3	**Ausführliche Lösung**
g)	$f(x) = -5x^3 - 10x^2 - \frac{5}{2}x - 5 \Rightarrow -5x^3 - 10x^2 - \frac{5}{2}x - 5 = 0 \mid :(-5)$ $\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0$ raten der 1. Nullstelle: $x_1 = -2 \quad (-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 + \frac{1}{2}\cdot(-2) + 1 = -8 + 8 - 1 + 1 = 0$ Polynomdivision: $\left(x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) : (x+2) = x^2 + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ keine Lösung $\underline{\underline{P_{x_1}(-2 \mid 0)}}$

A3h	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x + 6$

A3	**Ausführliche Lösung**
h)	$f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x + 6 \Rightarrow x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x + 6 = 0$ raten der 1. Nullstelle: $x_1 = -1 \quad (-1)^4 + 3\cdot(-1)^3 + 5\cdot(-1)^2 + 9\cdot(-1) + 6 = 0$ Polynomdivision: $\left(x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x + 6\right) : (x+1) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ $\Rightarrow x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$ raten der 2. Nullstelle: $x_1 = -2 \quad (-2)^4 + 3\cdot(-2)^3 + 5\cdot(-2)^2 + 9\cdot(-2) + 6 = 0$ Polynomdivision: $\left(x^3 + 2x^2 + 3x + 6\right) : (x+2) = x^2 + 3$ $\Rightarrow x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3 \Rightarrow$ keine Lösung $\underline{\underline{P_{x_1}(-1 \mid 0); P_{x_2}(-2 \mid 0)}}$

A4a	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x)=-3x^4+15x^2-12$

A4	**Ausführliche Lösung**
a)	$f(x)=-3x^4+15x^2-12 \Rightarrow -3x^4+15x^2-12=0\,;\,\vert(-3)$ $\Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0$ Substitution: $x^2=z \Rightarrow z^2-5z+4=0$ $\Rightarrow p=-5\,;\,q=4 \Rightarrow D=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{25}{4}-\frac{16}{4}=\frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow z_{1/2}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2} \Rightarrow z_1=4$ und $z_2=1$ $z_1=4=x^2 \Rightarrow \vert x\vert=2 \Rightarrow x_1=2\,;\,x_2=-2$ $z_2=1=x^2 \Rightarrow \vert x\vert=1 \Rightarrow x_3=1;\,x_4=-1$ $\underline{\underline{P_{x_1}(2\vert 0);P_{x_2}(-2\vert 0);P_{x_3}(1\vert 0);P_{x_4}(-1\vert 0)}}$

A4b	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x)=x^4-x^3-2x^2$

A4	**Ausführliche Lösung**
b)	$f(x)=x^4-x^3-2x^2 \Rightarrow x^4-x^3-2x^2=0$ $\Rightarrow x^2\left(x^2-x-2\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$ $x^2-x-2=0 \quad p=-1;\,q=-2 \Rightarrow D=(-0{,}5)^2+2=2{,}25 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{2{,}25}=1{,}5$ $\Rightarrow x_{3/4}=0{,}5\pm1{,}5 \Rightarrow x_3=2$ und $x_4=-1$ $\underline{\underline{P_{x_{1/2}}(0\vert 0);P_{x_3}(2\vert 0);P_{x_4}(-1\vert 0)}}$

A4c	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$

A4	**Ausführliche Lösung**
c)	$f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24 \Rightarrow -2x^3+2x^2+16x-24=0\,\vert:(-2)$ $\Rightarrow x^3-x^2-8x+12=0$ raten der 1. Nullstelle: $x_1=2 \quad 2^3-2^2-8\cdot2+12=8-4-16+12=0$ Polynomdivision: $\left(x^3-x^2-8x+12\right):(x-2)=x^2+x-6$ $\Rightarrow x^2+x-6=0 \quad p=1;\,q=-6 \Rightarrow D=0{,}5^2+6=6{,}25 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$ $x_{2/3}=-0{,}5\pm2{,}5 \Rightarrow x_2=2$ und $x_3=-3$ $\underline{\underline{P_{x_{1/2}}(2\vert 0);P_{x_3}(-3\vert 0)}}$

A4d	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x)=(x^2-6x+9)(x-4)$

A4	**Ausführliche Lösung**
d)	$f(x)=(x^2-6x+9)(x-4)\Rightarrow(x^2-6x+9)(x-4)=0$ $\Rightarrow(x-4)=0\Leftrightarrow x_1=4$ $x^2-6x+9=0\Rightarrow p=-6\,;\,q=9\Rightarrow D=(-3)^2-9=0$ $\Rightarrow x_{2/3}=3$ $\underline{\underline{P_{x_1}(4\,\|\,0)\,;\,P_{x_{2/3}}(3\,\|\,0)}}$

A4e	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x)=x^6-3x^4-4x^2$

A4	**Ausführliche Lösung**
e)	$f(x)=x^6-3x^4-4x^2\Rightarrow x^6-3x^4-4x^2=0$ $\Leftrightarrow x^2(x^4-3x^2-4)=0\Rightarrow x_{1/2}=0$ $x^4-3x^2-4=0$ Substitution: $x^2=z$ $\Rightarrow z^2-3z-4=0\quad p=-3\,;\,q=-4\Rightarrow D=(-1{,}5)^2+4=6{,}25$ $\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$ $z_{1/2}=1{,}5\pm2{,}5\Rightarrow z_1=4$ und $z_2=-1$ $z_1=4=x^2\Rightarrow\|x\|=2\Rightarrow x_3=2$ und $x_4=-2$ $z_2=-1=x^2\Rightarrow$ keine Lösung $\underline{\underline{P_{x_{1/2}}(0\,\|\,0)\,;\,P_{x_3}(2\,\|\,0)\,;\,P_{x_4}(-2\,\|\,0)}}$

A4f	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Nullstellen	$f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

A4 Ausführliche Lösung

f)

$f(x)=x^4-25x^2-60x-36 \Rightarrow x^4-25x^2-60x-36=0$

raten der 1. Nullstelle: $x_1=-1 \quad (-1)^4-25\cdot(-1)^2-60\cdot(-1)-36=0$

Polynomdivision: $\left(x^4-25x^2-60x-36\right):(x+1)=x^3-x^2-24x-36$

$x^3-x^2-24x-36=0$

raten der 2. Nullstelle: $x_2=-2 \quad (-2)^3-(-2)^2-24\cdot(-2)-36=0$

Polynomdivision: $\left(x^3-x^2-24x-36\right):(x+2)=x^2-3x-18$

$\Rightarrow x^2-3x-18=0 \quad p=-3\,;\,q=-18 \Rightarrow D=(-1{,}5)^2+18=20{,}25$

$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{20{,}25}=4{,}5$

$x_{3/4}=1{,}5\pm4{,}5 \Rightarrow x_3=6$ und $x_4=-3$

$\underline{\underline{P_{x_1}(-1\,|\,0)\,;P_{x_1}(-2\,|\,0)\,;P_{x_3}(6\,|\,0)\,;P_{x_4}(-3\,|\,0)}}$

E5a	**Aufgabe**	
	Zeichnen Sie die Graphen folgender ganzrationaler Funktionen in ein geeignetes Koordinatensystem. Legen Sie dazu eine Wertetabelle an und bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.	$f(x)=x^3-6x^2+9x$ $D_f=\{x\,|\,-0{,}5\le x\le4{,}5\}_{\mathbb{R}}$

E5 Ergebnis

a) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

Wertetabelle

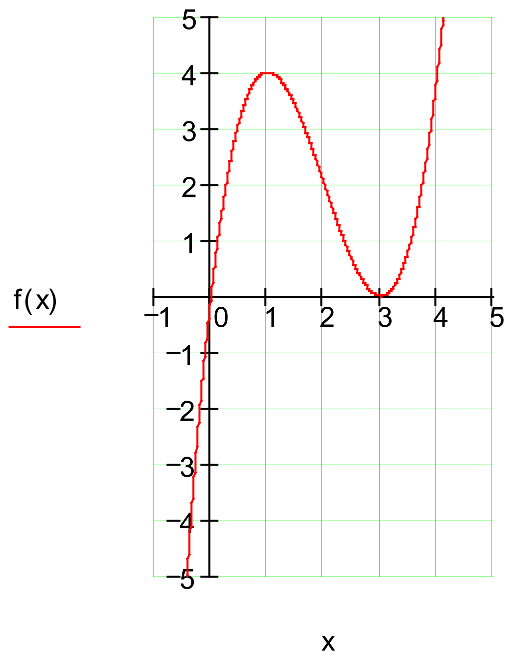
x	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−6,13	0	3,13	4
x	1,5	2	2,5	3
f(x)	3,38	2	0,63	0
x	3,5	4	4,5	
f(x)	0,88	4	10,13	

Achsenschnittpunkte :

$P_y(0\,|\,0)$

$P_{x1}(0\,|\,0)$

$P_{x2/3}(3\,|\,0)$



E5b	**Aufgabe**	
	Zeichnen Sie die Graphen folgender ganzrationaler Funktionen in ein geeignetes Koordinatensystem. Legen Sie dazu eine Wertetabelle an und bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.	$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2$ $D_f = \{x \mid -3{,}5 \le x \le 2{,}5\}_{\mathbb{R}}$

E5 Ergebnis

b)

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2$$

Wertetabelle

x	−3,5	−3	−2,5	−2	
f(x)	−5,5	2,5	6,75	8	
x	−1,5	−1	−0,5	0	
f(x)	7	4,5	1,25	−2	
x	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	−4,5	−5,5	−4,25	0	8

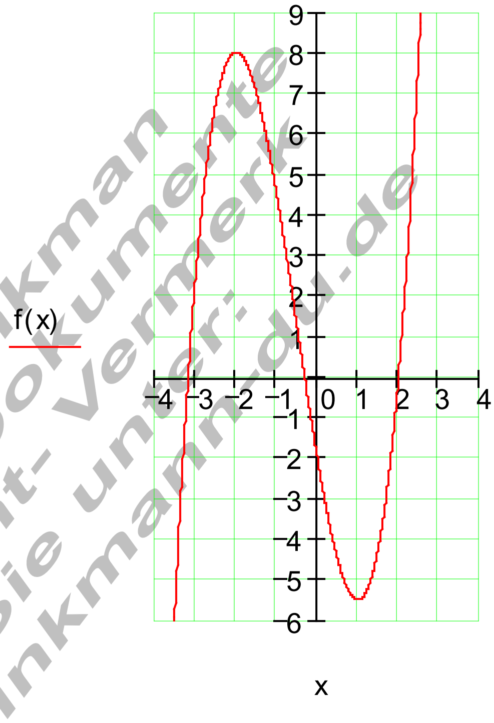
Achsenschnittpunkte:

$P_y(0 \mid -2)$

$P_{x1}(2 \mid 0)$

$P_{x2}\left(-\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{33} \approx -0{,}31 \mid 0\right)$

$P_{x2}\left(-\frac{7}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{33} \approx -3{,}19 \mid 0\right)$



E5c	**Aufgabe**	
	Zeichnen Sie die Graphen folgender ganzrationaler Funktionen in ein geeignetes Koordinatensystem. Legen Sie dazu eine Wertetabelle an und bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ $D_f = \{x \mid -0{,}2 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

E5 Ergebnis

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

Wertetabelle

x	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−8,13	−2	1,13	2
x	1,5	2	2,5	3
f(x)	1,38	0	−1,38	−2
x	3,5	4		−0,2
f(x)	−1,13	2		−4,05

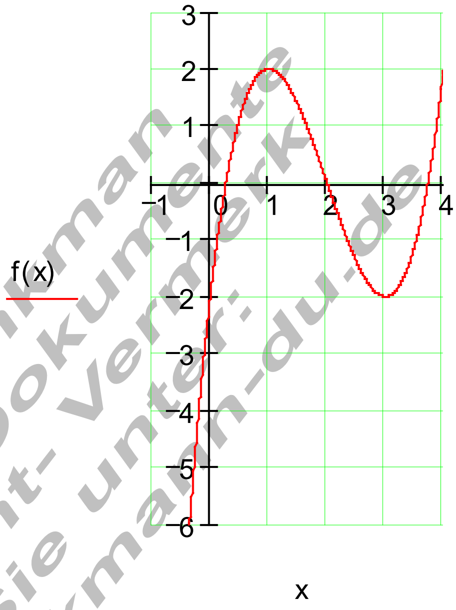
Achsenschnittpunkte:

$P_y(0 \mid -2)$

$P_{x1}(2 \mid 0)$

$P_{x2}\left(2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73 \mid 0\right)$

$P_{x2}\left(2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27 \mid 0\right)$



E5d Aufgabe

Zeichnen Sie die Graphen folgender ganzrationaler Funktionen in ein geeignetes Koordinatensystem. Legen Sie dazu eine Wertetabelle an und bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$

$D_f = \{x \mid -3 \le x \le 3{,}5\}_{\mathbb{R}}$

E5 Ergebnis

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$

Wertetabelle

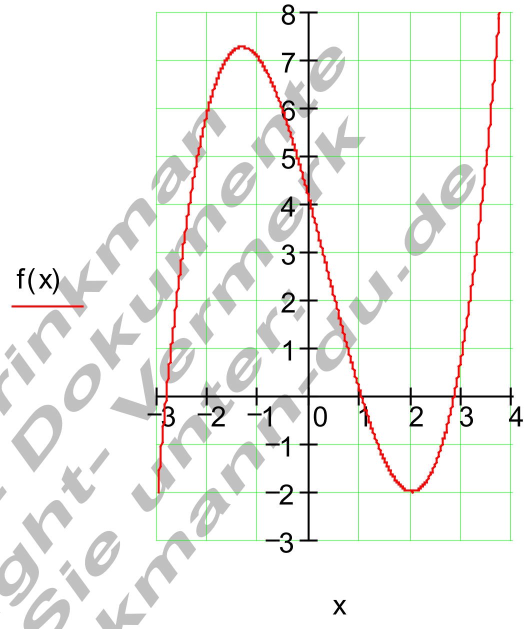
x	−3	−2,5	−2	−1,5
f(x)	−2	3,06	6	7,19
x	−1	−0,5	0	0,5
f(x)	7	5,81	4	1,94
x	1	1,5	2	2,5
f(x)	0	−1,44	−2	−1,31

Achsenschnittpunkte:

$P_y(0 \mid 4)$

$P_{x1}(1 \mid 0)$

$P_{x2/3}\left(\pm 2 \cdot \sqrt{2} \approx \pm 2{,}83 \mid 0\right)$



E5e	**Aufgabe**	
	Zeichnen Sie die Graphen folgender ganzrationaler Funktionen in ein geeignetes Koordinatensystem. Legen Sie dazu eine Wertetabelle an und bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.	$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2$ $D_f=\{x \mid -2{,}5\le x\le 3{,}5\}_{\mathbb{R}}$

E5 Ergebnis

e) $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2$

Wertetabelle

x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5
f(x)	−8	0	4,25	5,5	−8
x	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	2	−1,25	−4,5	−7	−8
x	2,5	3	3,5		
f(x)	−6,75	−2,5	5,5		

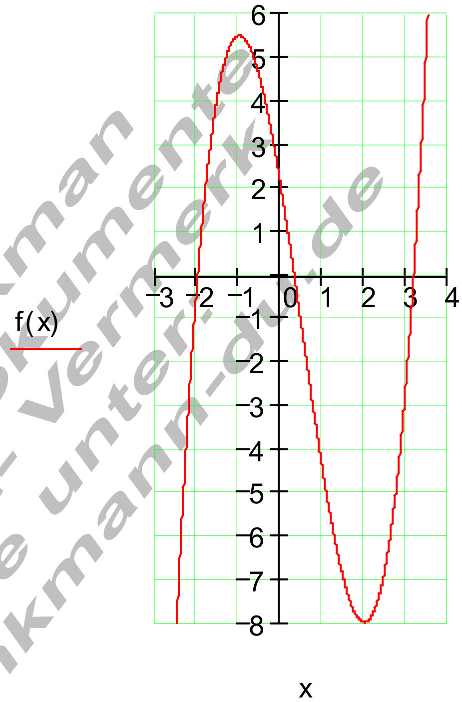
Achsenschnittpunkte:

$P_y(0\mid 2)$

$P_{x1}(-2\mid 0)$

$P_{x2}\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{33}\approx 3{,}19\mid 0\right)$

$P_{x3}\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{33}\approx 0{,}31\mid 0\right)$



E5f	**Aufgabe**	
	Zeichnen Sie die Graphen folgender ganzrationaler Funktionen in ein geeignetes Koordinatensystem. Legen Sie dazu eine Wertetabelle an und bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ $D_f=\{x \mid -0{,}2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

E5 Ergebnis

f)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$$

Wertetabelle

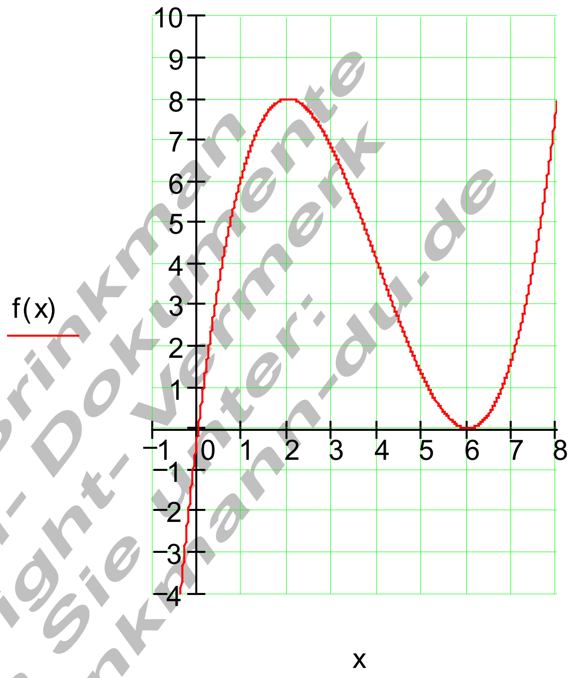
x	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−5,28	0	3,78	0,25
x	1,5	2	2,5	3
f(x)	7,59	8	7,66	6,75
x	3,5	4	4,5	5
f(x)	5,47	4	2,53	1,25
x	5,5	6	6,5	7
f(x)	0,34	0	0,41	1,75

Achsenschnittpunkte:

$P_y(0|0)$

$P_{x1}(0|0)$

$P_{x2/3}(6|0)$



E6a Aufgabe

Bestimmen Sie von folgender Funktion die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen so gut wie möglich. Legen Sie eine Wertetabelle an und berechnen Sie einige Werte mit dem Taschenrechner. Schätzen oder falls möglich berechnen Sie die Nullstellen.

$$f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - 1$$

E6 Ergebnis

a)

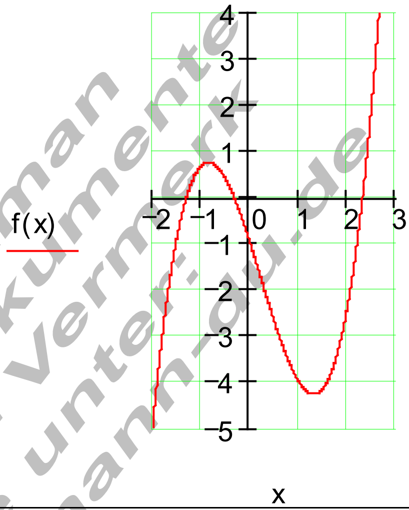
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-24	-5	$\frac{2}{3}$	-1	-4	$-2\frac{1}{3}$	10

1. Nullstelle: $-2 < x_1 < -1$

2. Nullstelle: $-1 < x_2 < 0$

3. Nullstelle: $2 < x_3 < 3$

Die Intervalle innerhalb derer sich jeweils eine Nullstelle befindet lässt sich über Vorzeichenwechsel der Funktionswerte finden.



E6b Aufgabe

Bestimmen Sie von folgender Funktion die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen so gut wie möglich. Legen Sie eine Wertetabelle an und berechnen Sie einige Werte mit dem Taschenrechner. Schätzen oder falls möglich bzw. berechnen Sie die Nullstellen.

$$f(x) = 0{,}01\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)$$

E6 Ergebnis

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$-0{,}32$	$-0{,}09$	0	$0{,}01$	0	$0{,}03$	$0{,}16$

1. Nullstelle: $P_{x1}(-1|0)$ 2. Nullstelle: $P_{x2}(1|0)$

Die Vermutung liegt nahe, dass der Graph die x – Achse im Punkt P_{x2} berührt.

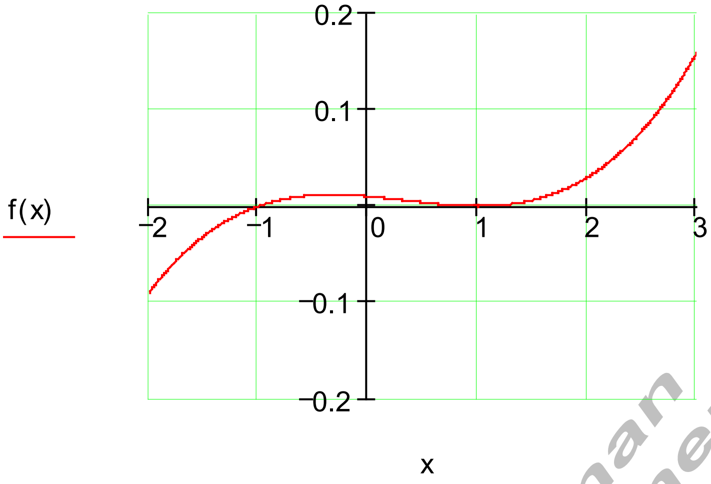
Diese Vermutung ist zu überprüfen.

Annahme:

$$f(x) = 0{,}01\underbrace{(x-1)(x-1)}_{\text{doppelte Nullstelle}}(x+1)$$

$$= 0{,}01(x-1)^2(x+1) = 0{,}01\left(x^3 - x^2 - x + 1\right) \Rightarrow P_{x2/3}(1|0)$$

Die Annahme war richtig.

E6	**Ergebnis**
	b) 

E6c	**Aufgabe**	
	Bestimmen Sie von folgender Funktion die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen so gut wie möglich. Legen Sie eine Wertetabelle an und berechnen Sie einige Werte mit dem Taschenrechner. Schätzen oder falls möglich berechnen Sie die Nullstellen.	$f(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 9x - 10$

E6 **Ergebnis**

c)

x	−8	−4	0	4	8	12
f(x)	−8,4	14,8	−10	−44,4	−50	11,6

1. Nullstelle: $-8 < x_1 < -4$

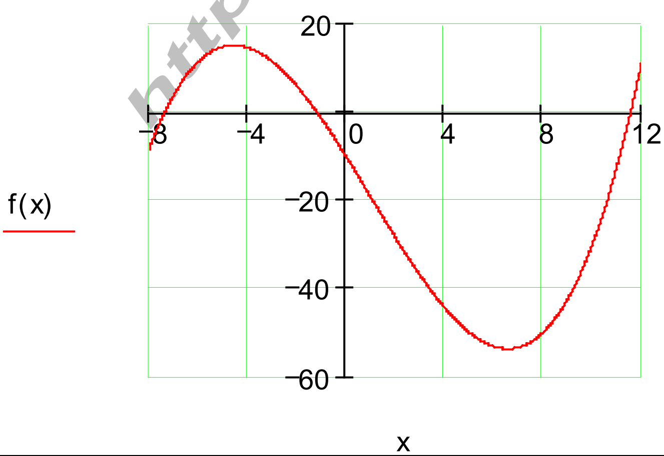
2. Nullstelle: $-4 < x_2 < 0$

3. Nullstelle: $8 < x_3 < 12$

Zur Lösung dieser Aufgabe sollte man einen grafikfähigen Taschenrechner verwenden.

E6 **Ergebnis**

c)



E6d Aufgabe

Bestimmen Sie von folgender Funktion die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen so gut wie möglich. Legen Sie eine Wertetabelle an und berechnen Sie einige Werte mit dem Taschenrechner. Schätzen oder falls möglich berechnen Sie die Nullstellen.

$f(x) = (x-1{,}7)(x^2-3)$

E6 Ergebnis

d) $f(x) = (x-1{,}7)(x^2-3)$

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1{,}7 = 0 \Rightarrow x_1 = 1{,}7$

$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{3}\,;\, x_3 = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow P_{x1}\left(-\sqrt{3}\,|\,0\right); P_{x2}\left(1{,}7\,|\,0\right); P_{x1}\left(\sqrt{3}\,|\,0\right)$

x	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	−3,7	5,4	5,1	1,4	0,3	7,8

Aus dem Graphen ist nicht zu erkennen, dass es im Intervall (1 ; 2) zwei Nullstellen gibt.
Das zeigt nur die genaue Rechnung.