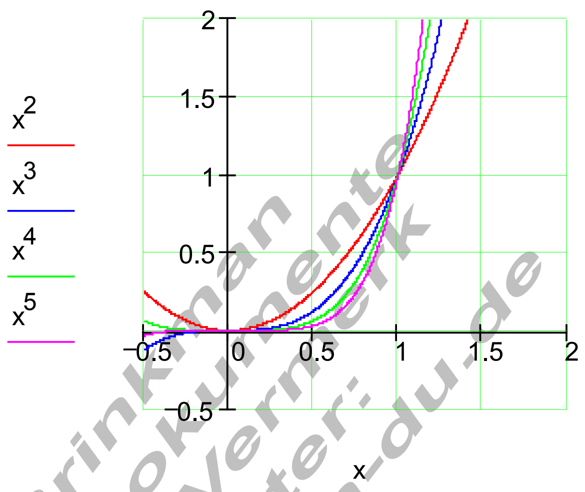
Lösungen ganzrationale Funktionen I
Eigenschaften von Potenzfunktionen

Ergebnisse und ausführliche Lösungen

E1 Aufgabe

Betrachten Sie die Graphen nebenstehender Potenzfunktionen im 1. Quadranten.
Für x – Werte zwischen 0 und 1 liegt der Graph einer Potenzfunktion höheren Grades unterhalb des Graphen einer Potenzfunktion niederen Grades.
Für x > 1 ist das genau umgekehrt.
Begründen Sie dieses Verhalten.



E1 Ergebnis

Multipliziert man eine Zahl, die kleiner als 1 ist, mit sich selbst, wird das Ergebnis immer kleiner.
Multipliziert man eine Zahl, die größer als 1 ist, mit sich selbst, wird das Ergebnis immer größer.

A2 Aufgabe

Der Graph der Potenzfunktion 3. Grades soll um 2 Einheiten nach links und anschließend um 3 Einheiten nach oben verschoben werden.
Geben Sie die Funktionsgleichung für den verschobenen Graphen an.

A2 Ausführliche Lösung

Ausgangsfunktion: $f(x) = x^3$

Verschiebung um 2 EH nach links:

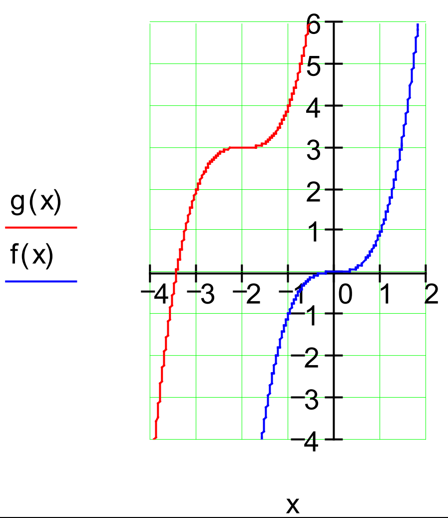
$f_1(x) = (x+2)^3$

Verschiebung um 3 EH nach oben:

$g(x) = (x+2)^3 + 3$

Neue Funktionsgleichung:

$g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 11$



A3	**Aufgabe**	
	Der Graph der Potenzfunktion vierten Grades soll um 3 Einheiten nach rechts verschoben und anschließend um den Faktor 2 gestreckt werden.	
	a)	Geben Sie die Funktionsgleichung für den verschobenen Graphen an.
	b)	Weisen Sie nach, dass der Graph weder achsen- noch punktsymmetrisch ist.

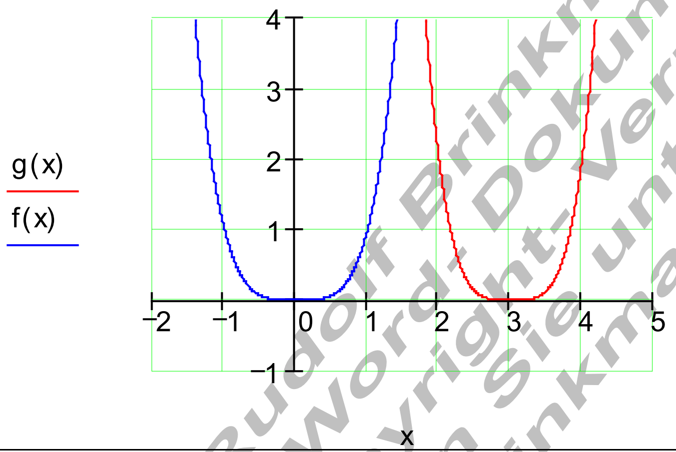
A3 Ausführliche Lösung

a) Ausgangsfunktion: $f(x) = x^4$

Verschiebung um 3 Einheiten nach rechts: $f_1(x) = (x-3)^4$

Streckung um den Faktor 2: $g(x) = 2(x-3)^4$

Neue Funktionsgleichung: $g(x) = 2x^4 - 24x^3 + 108x^2 - 216x + 162$



A3 Ausführliche Lösung

b) Achsensymmetrie: $g(-x) = g(x)$

$g(x) = 2x^4 - 24x^3 + 108x^2 - 216x + 162$

$g(-x) = 2(-x)^4 - 24(-x)^3 + 108(-x)^2 - 216(-x) + 162$

$= 2x^4 + 24x^3 + 108x^2 + 216x + 162$

$\Rightarrow g(-x) \neq g(x) \quad \Rightarrow$ Der Graph ist nicht achsensymmetrisch.

Punktsymmetrie: $g(-x) = -g(x)$ ($g(-x)$ siehe oben)

$-g(x) = -2x^4 + 24x^3 - 108x^2 + 216x - 162$

$\Rightarrow g(-x) \neq -g(x) \quad \Rightarrow$ Der Graph ist nicht punktsymmetrisch.

E4	**Aufgaben**							
	Bei welcher Potenzfunktion $f(x) = x^n$ gehört der Punkt P zum Graphen? Geben Sie die Gleichung dieser Potenzfunktion an.							
	a)	$P(-3 \mid -27)$	b)	$P(-2 \mid 16)$	c)	$P(0,5 \mid 0,25)$	d)	$P\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{27}\right)$
	e)	$P(0,1 \mid 0,0001)$	f)	$P(-1 \mid 1)$	g)	$P(-2 \mid 8)$	h)	$P\left(\frac{3}{4} \mid \frac{81}{256}\right)$

E4	**Ergebnisse**	
	a)	$P(-3 \mid -27)$ liegt auf dem Graphen von $f(x) = x^3$ denn $f(-3) = (-3)^3 = -27$
	b)	$P(-2 \mid 16)$ liegt auf dem Graphen von $f(x) = x^4$ denn $f(-2) = (-2)^4 = 16$
	c)	$P(0,5 \mid 0,25)$ liegt auf dem Graphen von $f(x) = x^2$ denn $f(0,5) = 0,25$
	d)	$P\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{27}\right)$ liegt auf dem Graphen von $f(x) = x^3$ denn $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$
	e)	$P(0,1 \mid 0,0001)$ liegt auf dem Graphen von $f(x) = x^4$ denn $f(0,1) = 0,0001$
	f)	$P(-1 \mid 1)$ liegt auf dem Graphen von $f(x) = x^n$ mit n gerade
	g)	$P(-2 \mid 8)$ Es gibt keine Potenzfunktion, deren Graph durch diesen Punkt verläuft, denn $(-2)^3 = -8$
	h)	$P\left(\frac{3}{4} \mid \frac{81}{256}\right)$ liegt auf dem Graphen von $f(x) = x^4$ denn $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{81}{256}$

E5	**Aufgaben**					
	Bestimmen Sie die Symmetrie und den Verlauf der Graphen folgender Potenzfunktionen und geben Sie jeweils die Wertemenge und den Grad an.					
	a)	$f(x) = 4x^3$	b)	$f(x) = -160x^2$	c)	$f(x) = -1500x$
	d)	$f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$	e)	$f(x) = 5$	f)	$f(x) = -25x^5$

E5	**Ergebnisse**	
	a)	$f(x) = 4x^3$ Punktsymmetrie $\text{III} \to \text{I}$ $W = \mathbb{R}\,; n = 3$
	b)	$f(x) = -160x^2$ Achsensymmetrie $\text{II} \to \text{IV}$ $W = \mathbb{R}_-\,; n = 2$
	c)	$f(x) = -1500x$ Punktsymmetrie $\text{II} \to \text{I}$ $W = \mathbb{R}\,; n = 1$
	d)	$f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ Achsensymmetrie $\text{II} \to \text{I}$ $W = \mathbb{R}^+\,; n = 6$
	e)	$f(x) = 5$ Achsensymmetrie $\text{II} \to \text{I}$ $W = \{5\}\,; n = 0$
	f)	$f(x) = -25x^5$ Punktsymmetrie $\text{II} \to \text{IV}$ $W = \mathbb{R}\,; n = 5$

E6	**Aufgaben**			
	Stellen Sie folgende Funktionsgleichungen durch Polynome dar. Geben Sie jeweils den Grad an.			
	a)	$f(x)=(x-2)^2-4x^3$	b)	$f(x)=4(x+5)^3+(x-2)(x+2)$
	c)	$f(x)=2x^3-(x-1)^2$	d)	$f(x)=(x-4)(x+1)^2$
	e)	$f(x)=(x^2-4)(x^3-x^2+4)$	f)	$f(x)=\frac{x-5}{8}(x-2)+\frac{3}{4}x^2$

E6	**Ergebnisse**	
	a)	$f(x)=(x-2)^2-4x^3=-4x^3+x^2-4x+4$ 3. Grades $n=3$
	b)	$f(x)=4(x+5)^3+(x-2)(x+2)=4x^3+61x^2+300x+496$ 3. Grades $n=3$
	c)	$f(x)=2x^3-(x-1)^2=2x^3-x^2+2x-1$ 3. Grades $n=3$
	d)	$f(x)=(x-4)(x+1)^2=x^3-2x^2-7x-4$ 3. Grades $n=3$
	e)	$f(x)=(x^2-4)(x^3-x^2+4)=x^5-x^4-4x^3+16$ 5. Grades $n=5$
	f)	$f(x)=\frac{x-5}{8}(x-2)+\frac{3}{4}x^2=\frac{7}{8}x^2-\frac{7}{8}x+\frac{5}{4}$ 2. Grades $n=2$

A7	**Aufgabe**
	Begründen Sie: Der Graph einer ganzrationalen Funktion mit ungeradem Grad schneidet die x – Achse mindestens einmal. Gilt das auch wenn der Grad gerade ist?

A7	**Ausführliche Lösung**
	Der Graph einer ganzrationalen Funktion mit ungeradem Grad verläuft entweder von III nach I oder von II nach IV. Dabei wird in jedem Fall die x – Achse mindestens einmal geschnitten (mind. eine Nullstelle). Der Graph einer ganzrationalen Funktion mit geradem Grad verläuft entweder von II nach I oder von III nach IV. Dabei wird die x – Achse nicht notwendigerweise geschnitten (keine Nullstelle).