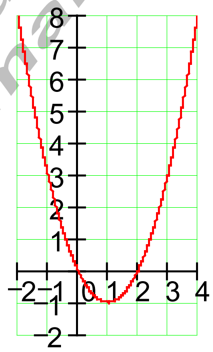
Lösungen quadratische Funktionen zur Vorbereitung einer Klassenarbeit II

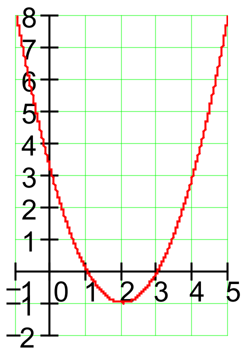
Ergebnisse:

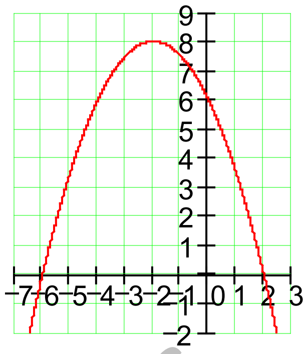
E1	Ergebnisse			
	a)	$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$	b)	$x_1 = -\frac{1}{9} \qquad x_2 = \frac{1}{9}$
	c)	$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$	d)	$x_1 = 0 \qquad x_2 = -4$
	e)	$x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$	f)	$x_1 = 0 \qquad x_{2/3} = -1$

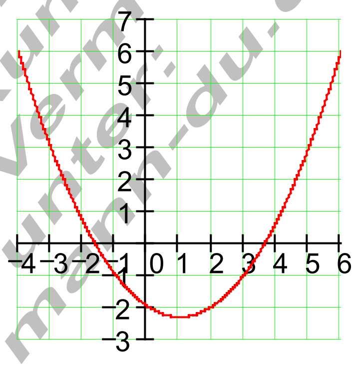
E2	Ergebnis
	D < 0 bedeutet, die Gleichung hat keine Lösung.

E3	Ergebnisse	
	a)	$x_1 = -4 + \sqrt{\frac{88}{5}} \approx 0{,}195 \qquad x_2 = -4 - \sqrt{\frac{88}{5}} \approx -8{,}195$
	b)	$x_{1/2} = -2$ doppelte Nullstelle

E4	Ergebnis		
	a)	Scheitelpunkt: $S(1 \mid -1)$ Nullstellen: $x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2$ $P_{x_1}(0 \mid 0) \qquad P_{x_2}(2 \mid 0)$ y - Abschnitt: $P_y(0 \mid 0)$	

E4	Ergebnis		
	b)	Scheitelpunkt: $S(2 \mid -1)$ Nullstellen: $x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = 3$ $P_{x_1}(1 \mid 0) \qquad P_{x_2}(3 \mid 0)$ y - Abschnitt: $P_y(0 \mid 3)$	

E5	Ergebnis	
	a) Achsenschnittpunkte: $P_y(0\mid 6)\,;P_{x1}(2\mid 0)\ ;\ P_{x2}(-6\mid 0)$ Scheitelpunkt: $S(-2\mid 8)$ Scheitelpunktform: $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+8$ Normalparabel, um den Faktor ½ gestaucht und nach unten geöffnet. Verschiebung um 2 EH nach links. Verschiebung um 8 EH nach oben.	

E5	Ergebnis	
	b) Achsenschnittpunkte: $P_y(0\mid -2)$ $P_{x1}\left(1+\sqrt{7}\approx 3{,}646\mid 0\right)$ $P_{x2}\left(1-\sqrt{7}\approx -1{,}646\mid 0\right)$ Scheitelpunkt: $S\left(1\mid -\frac{7}{3}\right)$ Scheitelpunktform: $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{7}{3}$ Normalparabel, um den Faktor 1/3 gestaucht und nach oben geöffnet. Verschiebung um 1 EH nach rechts. Verschiebung um 7/3 EH nach unten.	

E6	Ergebnisse
	a) Bei einer Geschwindigkeit von 80,36 km/h ist der Verbrauch 7 Liter/100 km.
	b) Bei einer Geschwindigkeit von 45 km/h ist der Verbrauch mit 4,5 Liter/ 100 km am geringsten.

E7	Ergebnisse	
	a) Normalparabel verschoben um 2 EH nach links, um 9 EH nach unten, nach oben geöffnet. $S(-2\mid -9)$	b) Normalparabel verschoben um 4 EH nach rechts, um 3 EH nach unten, nach oben geöffnet, um den Faktor ½ gestaucht. $S(4\mid -3)$

E7	Ergebnisse			
	c)	Normalparabel verschoben um 3/2 EH nach rechts, um 5/4 EH nach oben, nach unten geöffnet, um den Faktor 7/3 gestreckt. $S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{5}{4}\right)$	d)	Normalparabel verschoben um 3/4 EH nach links, um 1/3 EH nach unten, nach unten geöffnet, um den Faktor 4 gestreckt. $S\left(-\frac{3}{4}\,\middle|\,-\frac{1}{3}\right)$

E8	Ergebnisse			
	a)	$f(3) = -7$ ist der kleinste Wert	b)	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{47}{8}$ ist der größte Wert.

E9	Ergebnis
	Für $\underline{\underline{a = 4{,}5\text{ cm}}}$ und $\underline{\underline{b = 4{,}5\text{ cm}}}$ hat das Rechteck den größten Flächeninhalt $A = a \cdot b = 4{,}5\text{ cm} \cdot 4{,}5\text{ cm} = \underline{\underline{20{,}25\text{ cm}^2}}$. Das ist ein Quadrat.

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**					
	Berechnen Sie die Lösungen folgender quadratischen Gleichungen.					
	a)	$4x^2 - 16 = 0$	b)	$1 - 81x^2 = 0$	c)	$x^2 - \frac{1}{2} = 0$
	d)	$x^2 + 4x = 0$	e)	$x^2 - 6x = 0$	f)	$(x-1)(x+1)^2 = 0$

A1	**Ausführliche Lösungen**			
	a)	$4x^2 - 16 = 0 \mid +16$ $\Leftrightarrow 4x^2 = 16 \mid :4$ $\Leftrightarrow x^2 = 4 \mid \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$	b)	$1 - 81x^2 = 0 \mid -1$ $\Leftrightarrow -81x^2 = -1 \mid \cdot(-1)$ $\Leftrightarrow 81x^2 = 1 \mid :81$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{81} \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{9}$
	c)	$x^2 - \frac{1}{2} = 0 \mid +\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	d)	$x^2 + 4x = 0$ $\Leftrightarrow x(x+4) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -4$
	e)	$x^2 - 6x = 0$ $\Leftrightarrow x(x-6) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 6$	f)	$(x-1)(x+1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+1)$ $\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad x_{2/3} = -1$

A2	**Aufgabe**
	Formen Sie die Gleichung um und berechnen Sie x.
	$-24 - x = 6x^2 + 23x + 12$

A2 Ausführliche Lösung

$$-24 - x = 6x^2 + 23x + 12 \mid +24 + x$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x^2 + 24x + 36 = 0 \mid :6$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$p = 4 \quad q = 6 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 6 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{keine Lösung}}}$$

Der Wert der Diskriminante lässt eine Aussage über die Anzahl und Art der Lösungen einer quadratischen Gleichung zu.
D > 0 Die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen.
D = 0 Die quadratische Gleichung hat eine Lösung.
D < 0 Die quadratische Gleichung hat keine Lösung.

A3	**Aufgabe**	
	a)	Lösen Sie die quadratische Gleichung $\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{2}{5} = 0$

A3	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{2}{5} = 0 \mid \cdot 4$ $\Leftrightarrow \quad x^2 + 8x - \frac{8}{5} = 0$ $p = 8 \quad q = -\frac{8}{5} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 + \frac{8}{5} = \frac{88}{5} \Rightarrow$ zwei Lösungen $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ $\quad x_1 = -4 + \sqrt{\frac{88}{5}} \approx 0{,}195$ $x_2 = -4 - \sqrt{\frac{88}{5}} \approx -8{,}195$

A3	**Aufgabe**	
	b)	Lösen Sie die quadratische Gleichung $0 = 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 0{,}4$

A3	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$0 = 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 0{,}4 \mid \cdot 10$ $\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0$ $p = 4 \quad q = 4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 4 = 0 \Rightarrow$ eine doppelte Lösung $x_{1/2} = -\frac{p}{2} = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$

A4	**Aufgabe**	
	a)	Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie die Parabel in ein geeignetes Koordinatensystem. $f(x)=(x-1)^2-1$

A4 Ausführliche Lösung

a) Berechnung:

$f(x)=(x-1)^2-1$ Scheitelpunktform $\Rightarrow \underline{\underline{S(1\,|-1)}}$

$f(0)=(0-1)^2-1=1-1=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1=0 \mid +1$

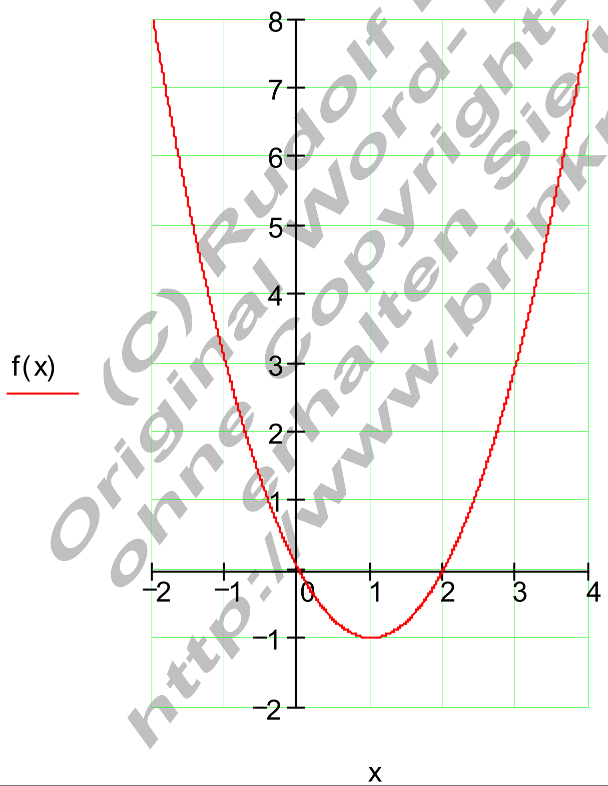
$\Leftrightarrow (x-1)^2=1 \mid \sqrt{} \Leftrightarrow |x-1|=\sqrt{1}=1$

$\Leftrightarrow x-1=1 \mid +1 \Leftrightarrow x_1=2 \qquad x-1=-1 \mid +1 \Leftrightarrow x_2=0$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2\,|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}(0\,|\,0)}}$

A4 Ausführliche Lösung

a) Der Graph:



A4 Aufgabe

b) Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie die Parabel in ein geeignetes Koordinatensystem.

$f(x)=(x-2)^2-1$

A4 Ausführliche Lösung

b) Berechnung:

$f(x)=(x-2)^2-1$ Scheitelpunktform $\Rightarrow S(2\,|\,-1)$

$f(0)=(0-2)^2-1=4-1=3 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,3)}}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-1=0\;|+1$

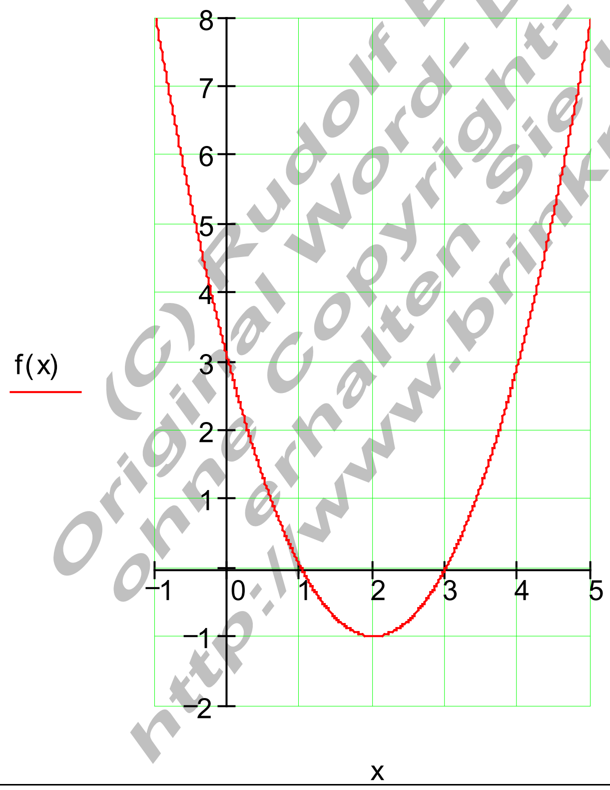
$\Leftrightarrow (x-2)^2=1\;|\sqrt{\ } \Leftrightarrow |x-2|=\sqrt{1}=1$

$\Leftrightarrow x-2=1\;|+2 \Leftrightarrow x_1=3 \qquad x-2=-1\;|+2 \Leftrightarrow x_2=1$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3\,|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}(1\,|\,0)}}$

A4 Ausführliche Lösung

b) Der Graph:



A5	Aufgabe	
	a)	Berechnen Sie von folgenden quadratischen Funktionen die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung. Wie ist die Parabel aus der Normalparabel entstanden? Zeichnen Sie den Graphen in ein Koordinatensystem. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

A5 Ausführliche Lösung

a) Berechnung:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 \qquad f(0) = 6 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 6)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0 \mid \cdot(-2) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$p = 4\,;\, q = -12 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -2 + 4 = 2 \\ x_2 = -2 - 4 = -6 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\underline{P_{x1}(2 \mid 0)}} \\ \underline{\underline{P_{x2}(-6 \mid 0)}} \end{array}$$

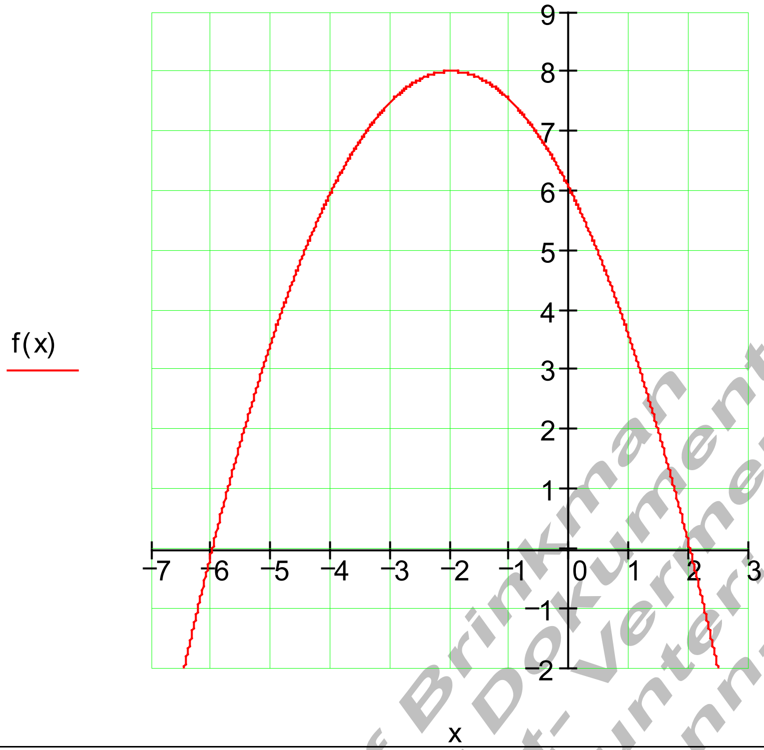
$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + (-6)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y_s = f(x_s) = f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot (-2) + 6 = -2 + 4 + 6 = 8 \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S(-2 \mid 8)}}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 8 \text{ Scheitelpunktform}$$

Normalparabel, um den Faktor ½ gestaucht und nach unten geöffnet.
Verschiebung um 2 EH nach links. Verschiebung um 8 EH nach oben.

A5	**Ausführliche Lösung**	
	a)	Der Graph:



A5	**Aufgabe**	
	b)	Berechnen Sie von folgenden quadratischen Funktionen die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung. Wie ist die Parabel aus der Normalparabel entstanden? Zeichnen Sie den Graphen in ein Koordinatensystem. $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2$

A5 Ausführliche Lösung

b) Berechnung:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2 \qquad f(0)=-2\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\mid -2)}}$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2=0\mid\cdot 3\Leftrightarrow x^2-2x-6=0$$

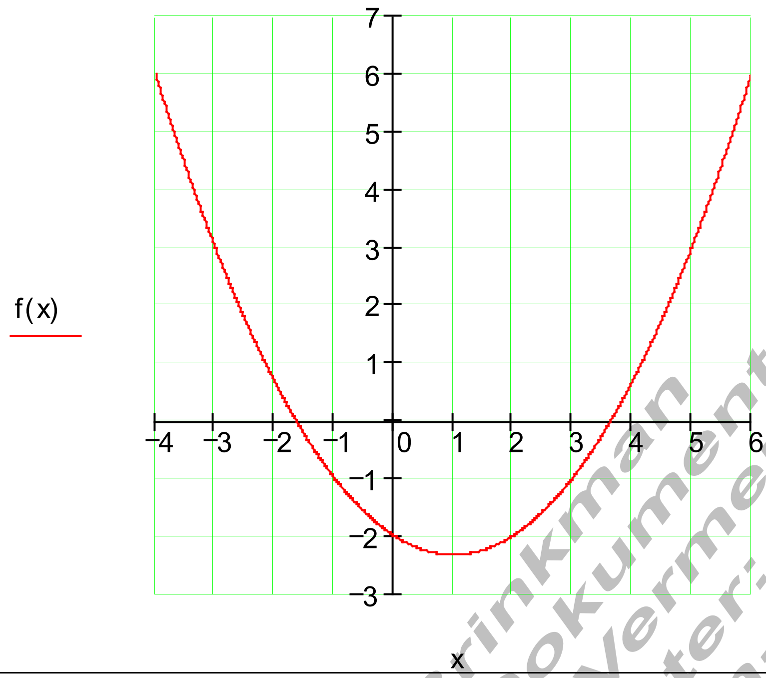
$$p=-2;\ q=-6\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+6=7\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{7}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left|\ \begin{aligned}x_1&=1+\sqrt{7}\approx 3{,}65\\ x_2&=1-\sqrt{7}\approx -1{,}65\end{aligned}\right.\Rightarrow \begin{aligned}&\underline{\underline{P_{x1}\left(1+\sqrt{7}\approx 3{,}65\mid 0\right)}}\\ &\underline{\underline{P_{x2}\left(1-\sqrt{7}\approx -1{,}65\mid 0\right)}}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}x_s&=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+\sqrt{7}+1-\sqrt{7}}{2}=\frac{2}{2}=1\\ y_s&=f(x_s)=f(1)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-2=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{6}{3}=-\frac{7}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \underline{\underline{S\left(1\mid -\frac{7}{3}\right)}}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{7}{3}\ \text{Scheitelpunktform}$$

Normalparabel, um den Faktor 1/3 gestaucht und nach oben geöffnet.
Verschiebung um 1 EH nach rechts. Verschiebung um 7/3 EH nach unten.

A5	**Ausführliche Lösung**	
	b)	Der Graph: 

A6	**Aufgabe**	
	Der Kraftstoffverbrauch eines PKW hängt bekanntlich von der Geschwindigkeit ab. Durch Messungen wurde der funktionale Zusammenhang ermittelt. Es gilt: $K(v) = 0,002v^2 - 0,18v + 8,55$ für $v > 40$ Dabei bedeuten: K(v) der Kraftstoffverbrauch in Liter/100 km und v die Geschwindigkeit in km/h.	
	a)	Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 7 Liter auf 100 km?
	b)	Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten?

A6	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$K(v) = 0,002v^2 - 0,18v + 8,55$ für $v > 40$ $K(v) = 7 \Leftrightarrow 0,002v^2 - 0,18v + 8,55 = 7 \Leftrightarrow v^2 - 90v + 775 = 0$ $p = -90 \,;\, q = 775 \Rightarrow D = 1250$ $v_1 = 45 + \sqrt{1250} \approx 80,36$ $v_2 = 45 - \sqrt{1250} \approx 9,6$ scheidet aus wegen $v > 40$ Bei einer Geschwindigkeit von 80,36 km/h ist der Verbrauch 7 Liter/100 km.

A6 Ausführliche Lösung

b) Scheitelpunkt ist Minimum

$$v_s = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{45 + \sqrt{1250} + 45 - \sqrt{1250}}{2} = \underline{\underline{45}}$$

$$K(45) = 0{,}002 \cdot 45^2 - 0{,}18 \cdot 45 + 8{,}55 = \underline{\underline{4{,}5}}$$

Bei einer Geschwindigkeit von 45 km/h ist der Verbrauch mit 4,5 Liter/ 100 km am geringsten.

A7 Aufgabe

Beschreiben Sie schrittweise, wie f(x) aus der Normalparabel entsteht und wie sie geöffnet ist. Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt?

a)	$f(x) = (x+2)^2 - 9$	b)	$f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 3$
c)	$f(x) = -\frac{7}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$	d)	$f(x) = -4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{3}$

A7 Ausführliche Lösungen

a)	Normalparabel verschoben um 2 EH nach links, um 9 EH nach unten, nach oben geöffnet. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S(-2 \mid -9)$	b)	Normalparabel verschoben um 4 EH nach rechts, um 3 EH nach unten, nach oben geöffnet, um den Faktor ½ gestaucht. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S(4 \mid -3)$

A7 Ausführliche Lösungen

c)	Normalparabel verschoben um 3/2 EH nach rechts, um 5/4 EH nach oben, nach unten geöffnet, um den Faktor 7/3 gestreckt. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{5}{4}\right)$	d)	Normalparabel verschoben um 3/4 EH nach links, um 1/3 EH nach unten, nach unten geöffnet, um den Faktor 4 gestreckt. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S\left(-\frac{3}{4} \middle| -\frac{1}{3}\right)$

A8 Aufgabe

a) Bestimmen Sie den größten bzw. kleinsten Wert der Funktion f(x).

$$f(x) = (x-2)^2 - 2x - 2$$

A8 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = (x-2)^2 - 2x - 2 = x^2 - 6x + 2$

Die Parabel nach oben geöffnet, Scheitel ist Minimum.

$$f(x) = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2 = (x-3)^2 - 7 \Rightarrow S(3 \mid -7)$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{f(3) = -7 \text{ ist der kleinste Wert.}}}$

A8 Aufgabe

b) Bestimmen Sie den größten bzw. kleinsten Wert der Funktion f(x).

$f(x) = -0,5x^2 + 0,5x - 6$

A8 Ausführliche Lösung

b) $f(x) = -0,5x^2 + 0,5x - 6$

Parabel ist nach unten geöffnet, Scheitel ist Maximum.

$$f(x) = -0,5\left[x^2 - x + 12\right] = -0,5\left[x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\right]$$

$$= -0,5\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{47}{4}\right] = -0,5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{47}{8} \Rightarrow S\left(\frac{1}{2} \middle| -\frac{47}{8}\right)$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{47}{8}$ ist der größte Wert.

A9 Aufgabe

Welches Rechteck mit dem Umfang U = 18 cm hat den größten Flächeninhalt?

A9 Ausführliche Lösung:

Umfang eines Rechtecks: $U = 2a + 2b$

Rechteckfläche: $A = a \cdot b$

Ansatz: $U = 2a + 2b \Rightarrow b = \frac{U}{2} - a$ in die Flächenformel einsetzen:

$A(a) = a\left(\frac{U}{2} - a\right) = \frac{U}{2}a - a^2 = -a^2 + \frac{U}{2}a$ Parabel nach unten geöffnet

Die Scheitelkoordinaten liefern das Maximum für die Fläche

$A(a) = -1\left[a^2 - \frac{U}{2}a + \left(\frac{U}{4}\right)^2 - \left(\frac{U}{4}\right)^2\right] = -\left(a - \frac{U}{4}\right)^2 + \left(\frac{U}{4}\right)^2$ Scheitelpunktform

$\Rightarrow S\left(\frac{U}{4} \middle| \left(\frac{U}{4}\right)^2\right) \Rightarrow$ für $a = \frac{U}{4}$ ist $A(a) = \left(\frac{U}{4}\right)^2$ das Flächenmaximum

Für $U = 18$ cm gilt: $a = \frac{18\text{ cm}}{4} = 4,5$ cm und $b = \frac{U}{2} - a = 9\text{ cm} - 4,5\text{ cm} = 4,5$ cm

Für $a = 4,5$ cm und $b = 4,5$ cm hat das Rechteck den größten Flächeninhalt

$A = a \cdot b = 4,5\text{ cm} \cdot 4,5\text{ cm} = 20,25\text{ cm}^2$ Das ist ein Quadrat.

Bitte mit $U = 30$ cm überprüfen!