Lösungen Parabel und Gerade I

Ausführliche Lösungen:

A1 Aufgabe

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel mit f(x) und die Funktionsgleichung einer Geraden mit g(x). Berechnen Sie die Schnittpunkte.

a)	$f(x)=(x-3)(x+2)$ $g(x)=4x-10$	b)	$f(x)=-\frac{1}{2}(x^2-5x-6)$ $g(x)=3x$
c)	$f(x)=x^2+x-5$ $g(x)=3x-6$	d)	$f(x)=\frac{1}{8}x^2+3x-2$ $g(x)=4x-4$

A1 Ausführliche Lösung

a)

$f(x)=(x-3)(x+2)=x^2-x-6\,;\,g(x)=4x-10$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-x-6=4x-10$

$\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$

$p=-5\,;\,q=4\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{9}{4}$

$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\Rightarrow x_1=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=4\,;\,x_2=\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}}=1$

$g(x_1)=g(4)=4\cdot 4-10=6\,;\,g(x_2)=g(1)=4\cdot 1-10=-6$

$\Rightarrow \underline{\underline{S_1(4\,|\,6)\,;\,S_2(1\,|-6)}}$

A1 Ausführliche Lösung

b)

$f(x)=-\frac{1}{2}(x^2-5x-6)\,;\,g(x)=3x$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+x-6=0$

$\Rightarrow D=6{,}25\Rightarrow x_1=-3\,;\,x_2=2$

$\Rightarrow$ $g(-3)=-9\Rightarrow \underline{\underline{S_1(-3\,|-9)}}$

$g(2)=6\Rightarrow \underline{\underline{S_1(2\,|\,6)}}$

A1 Ausführliche Lösung

c)

$f(x)=x^2+x-5\,;\,g(x)=3x-6$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$ $\Rightarrow$ $g(1)=-3\Rightarrow \underline{\underline{S_{1/2}(1\,|-3)}}$

$\Rightarrow D=0\Rightarrow x_{1/2}=1$ (Berührungspunkt)

A1 Ausführliche Lösung

d)

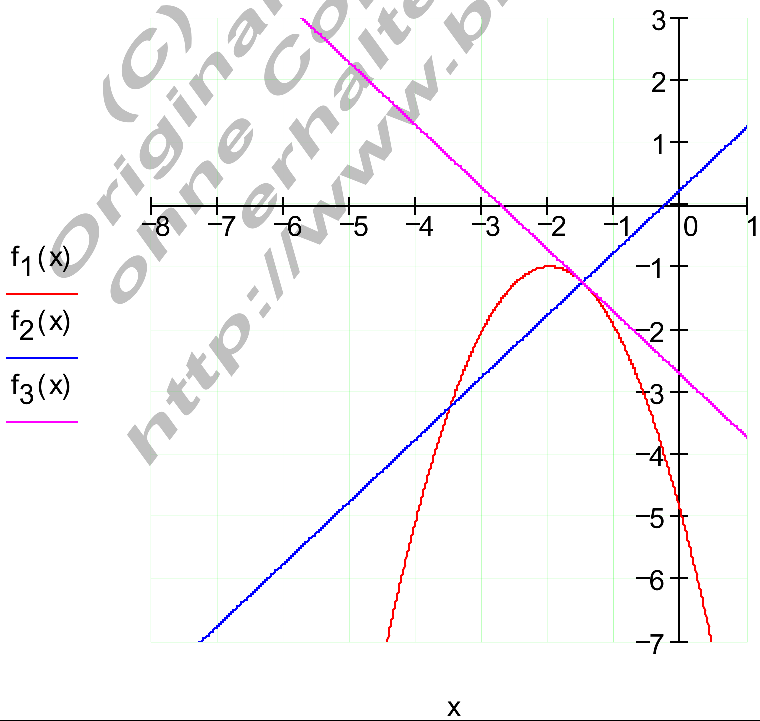
$f(x)=\frac{1}{8}x^2+3x-2\,;\,g(x)=4x-4$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-8x+16=0$ $\Rightarrow$ $g(4)=12\Rightarrow \underline{\underline{S_{1/2}(4\,|\,12)}}$

$\Rightarrow D=0\Rightarrow x_{1/2}=4$ (Berührungspunkt)

E2	**Aufgabe**		
	Eine Parabel mit der Funktion $f_1(x)$ und eine Gerade mit der Funktion $f_2(x)$ schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2, wobei P_1 der höher liegende Punkt sein soll. Berechnen Sie:		$f_1(x) = -(x+2)^2 - 1$ $f_2(x) = x + \frac{1}{4}$
	a)	Die Schnittpunkte P_1 und P_2.	
	b)	Die Funktion $f_3(x)$ der Geraden, die die Gerade mit der Funktion $f_2(x)$ im Punkt P_1 rechtwinklig schneidet.	
	c)	Die Achsenschnittpunkte der drei Funktionen.	
	d)	Zeichnen Sie die Graphen.	

E2	**Ergebnisse**	
	a)	Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel: $P_1\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -\frac{5}{4}\right) \quad P_2\left(-\frac{7}{2} \,\middle|\, -\frac{13}{4}\right)$
	b)	Die zu $f_2(x)$ senkrechte Gerade: $f_3(x) = -x - \frac{11}{4}$
	c)	Die Achsenschnittpunkte der drei Funktionen: Keine Parabelnullstellen. $S(-2\|-1)$ Parabelscheitel $P_{y_1}(0\|-5) \quad P_{y_2}\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{4}\right) \quad P_{y_3}\left(0 \,\middle|\, -\frac{11}{4}\right) \quad P_{x_1}\left(-\frac{1}{4} \,\middle|\, 0\right) \quad P_{x_2}\left(-\frac{11}{4} \,\middle|\, 0\right)$

E2	**Ausführliche Lösung**	
	d)	

A3	**Aufgabe**		
	Gegeben ist die Funktion $f(x)=0{,}75\left(x^2-5x+4\right);\ x\in\mathbb{R}$		
	a)	Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $f(x)$ mit $g(x)=0{,}75x+3$	
	b)	Die Ursprungsgerade h(x) berührt f(x). Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes, wenn gilt:	$h(x)=-\frac{3}{4}x$
	c)	Eine auf h(x) senkrecht stehende Gerade i(x) schneidet f(x) in x = 3. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von i(x).	

A3 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x)=0{,}75\left(x^2-5x+4\right);\ g(x)=0{,}75x+3$$

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-6x=0\Leftrightarrow x(x-6)=0$$

$$\Rightarrow x_1=0;\ g(x)=3\Rightarrow \underline{\underline{S_1(0\,|\,3)}}$$

$$x_2=6;\ g(6)=\frac{15}{2}\Rightarrow \underline{\underline{S_2\left(6\,\middle|\,\frac{15}{2}\right)}}$$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x)=h(x)\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow D=0 \text{ (Berührungspunkt)}$$

$$x_{1/2}=2;\ h(x)=-\frac{3}{2}\Rightarrow \underline{\underline{S_{1/2}\left(2\,\middle|\,-\frac{3}{2}\right)}}$$

A3 Ausführliche Lösung

c)

$$h(x)=-\frac{3}{4}x \text{ die dazu senkrechte Gerade}$$

$$i(x)=\frac{4}{3}x+a_0 \text{ schneidet } f(x) \text{ in } x=3$$

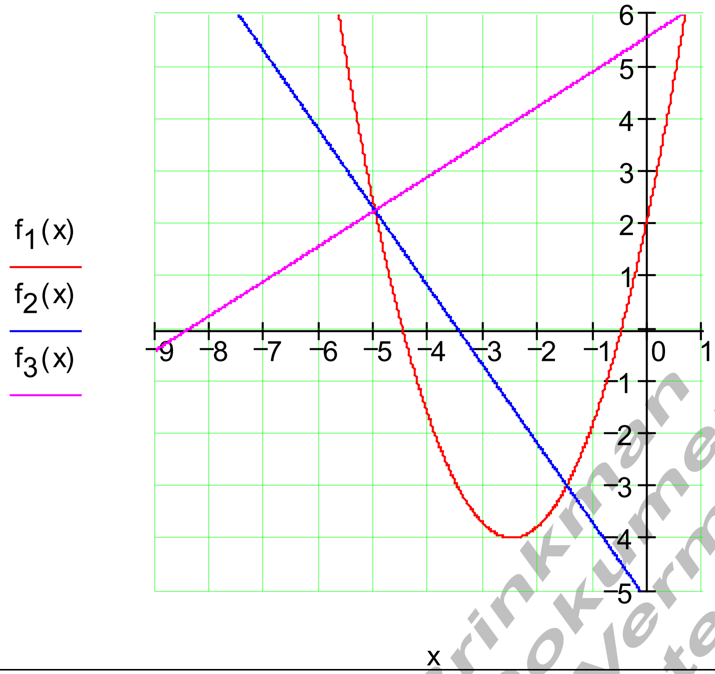
$$f(3)=-\frac{3}{2}\Rightarrow P\left(3\,\middle|\,-\frac{3}{2}\right) \text{ ist der gemeinsame Schnittpunkt}$$

$$i(3)=\frac{4}{3}\cdot 3+a_0=-\frac{3}{2}\Rightarrow a_0=-\frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{i(x)=\frac{4}{3}x-\frac{11}{2}}}$$

E4	**Aufgabe**	
	Eine Parabel mit der Funktion $f_1(x)$ und eine Gerade mit der Funktion $f_2(x)$ schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2, wobei P_1 der höher liegende Punkt sein soll. Berechnen Sie:	$f_1(x)=\left(x+2\frac{1}{2}\right)^2-4$ $f_2(x)=-\frac{3}{2}x-5\frac{1}{4}$
	a) Die Schnittpunkte P_1 und P_2.	
	b) Die Funktion $f_3(x)$ der Geraden, die die Gerade mit der Funktion $f_2(x)$ im Punkt P_1 rechtwinklig schneidet.	
	c) Die Achsenschnittpunkte der drei Funktionen.	
	d) Zeichnen Sie die Graphen.	

E4	**Ergebnisse**
	a) Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel: $P_1\left(-5 \,\middle|\, \frac{5}{4}\right)$ $P_2\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -3\right)$
	b) Die zu $f_2(x)$ senkrechte Gerade: $f_3(x)=\frac{2}{3}x+\frac{67}{12}$
	c) Die Achsenschnittpunkte der drei Funktionen: $S\left(-\frac{5}{2} \,\middle|\, -4\right)$ Parabelscheitel $P_{x_1}\left(-\frac{9}{2} \,\middle|\, 0\right)$ $P_{x_2}\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, 0\right)$ Parabelnullstellen $P_{x_3}\left(-\frac{7}{2} \,\middle|\, 0\right)$ $P_{x_4}\left(-\frac{67}{8} \,\middle|\, 0\right)$ Nullstellen der Geraden Schnittpunkte mit der y-Achse $P_{y_1}\left(0 \,\middle|\, \frac{5}{4}\right)$ $P_{y_2}\left(0 \,\middle|\, -\frac{21}{4}\right)$ $P_{y_3}\left(0 \,\middle|\, \frac{67}{12}\right)$

E4	**Ergebnis**
	d) 

A5	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion $f(x) = (1-x)(2x+5)\,;\; x \in \mathbb{R}$	
	a) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte von f(x)	
	b) Die Gerade g(x) verläuft parallel zur x – Achse durch den Punkt P(1 | 3) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von f(x) und g(x).	
	c) Bestimmen Sie die Anzahl der Schnittpunkte von h(x) mit f(x) in Abhängigkeit von der Variablen b, wenn gilt:	$h(x) = -\frac{3}{4}x + b$

A5	**Ausführliche Lösung**
	a) $f(x) = (1-x)(2x+5)$ $P_y : f(0) = (1-0)(2\cdot 0+5) = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,\|\,5)}}$ Nullstellen: $f(x) = 0$ $\Rightarrow 1-x = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(1\,\|\,0)}}$ $2x+5 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(-\frac{5}{2}\,\middle\|\,0\right)}}$

A5		**Ausführliche Lösung**
	b)	g(x) parallel zu x durch den Punkt $P(1 \mid 3) \Rightarrow g(x) = 3$
		$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow D = \frac{25}{16}$
		$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \underline{\underline{S_1\left(\frac{1}{2} \,\middle\vert\, 3\right)}}$
		$x_2 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{S_2(-2 \mid 3)}}$

A5		**Ausführliche Lösung**
	c)	$h(x) = -\frac{3}{4}x + b$
		$f(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{8}x + \frac{1}{2}b - \frac{5}{2} = 0$
		$p = \frac{9}{8}$; $q = \frac{1}{2}b - \frac{5}{2} \Rightarrow D = \frac{721}{256} - \frac{1}{2}b$
		keinen Schnittpunkt für $D < 0 \Leftrightarrow \frac{721}{256} - \frac{1}{2}b < 0 \Rightarrow b > \frac{721}{128}$
		einen Schnittpunkt für $D = 0 \Leftrightarrow \frac{721}{256} - \frac{1}{2}b = 0 \Rightarrow b = \frac{721}{128}$
		zwei Schnittpunkte für $D > 0 \Leftrightarrow \frac{721}{256} - \frac{1}{2}b > 0 \Rightarrow b < \frac{721}{128}$