Lösungen Parabeln aus gegebenen Bedingungen I

Ausführliche Lösungen:

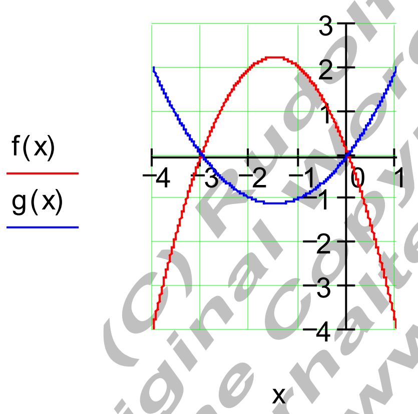
A1	**Aufgabe**
	Welche Bedingungen müssen für die Koeffizienten der Funktion $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$ erfüllt sein, damit f(x) keine Nullstellen besitzt?

A1	**Ausführliche Lösung**
	$f(x) = x^2 + a_1x + a_0$ Bedingung für keine Nullstelle: $D < 0$ $p = a_1\,;\, q = a_0 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 = \frac{a_1^2}{4} - a_0$ $D < 0 \Leftrightarrow \frac{a_1^2}{4} - a_0 < 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{a_1^2}{4} < a_0 \mid \cdot 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{a_1^2 < 4a_0}}$ Die Art der Nullstelle ist vom Wert der Diskriminante abhängig. D > 0 Zwei Nullstellen D = 0 Eine doppelte Nullstelle D < 0 keine Nullstelle

A2	**Aufgabe**
	Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von f(x) und g(x) in Abhängigkeit von a, wenn gilt: $f(x) = -x^2 + 1;\, x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = ax^2 - a\,;\, x \in \mathbb{R}\,;\, a \in \mathbb{R}^*$

A2	**Ausführliche Lösung**
	$f(x) = -x^2 + 1;\, g(x) = ax^2 - a$ $g(x) = f(x) \Leftrightarrow ax^2 - a = -x^2 + 1 \Leftrightarrow (a+1)x^2 - (a+1) = 0$ Betrachtung von a: $\underline{\underline{a = -1}} \Rightarrow f(x) = g(x)$ identische Parabeln mit unendlich vielen Schnittpunkten. $\underline{\underline{a \neq -1}} \Rightarrow (a+1)x^2 - (a+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ $\Rightarrow x_{1/2} = \pm 1$ zwei verschiedene Schnittpunkte

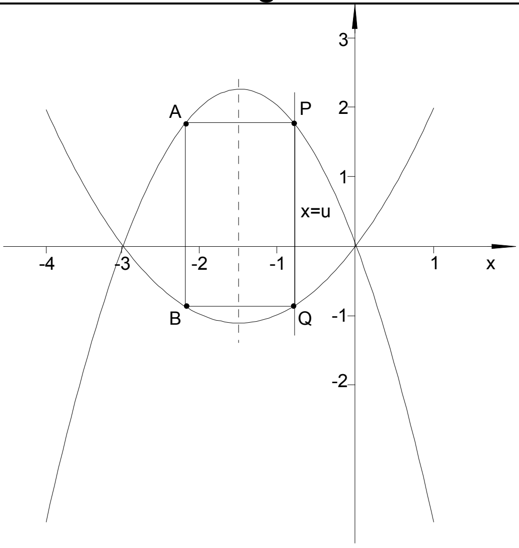
A3	**Aufgabe**	
	Gegeben sind die quadratischen Funktionen f(x) und g(x) mit $f(x) = -x^2 - 3x\,;\, x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = 0{,}5x(x+3)\,;\, x \in \mathbb{R}$	
	a)	Zeichnen Sie die Graphen von f(x) und g(x) in ein Koordinatensystem. Begründen Sie ohne Rechnung warum sich f(x) und g(x) auf der x – Achse schneiden. $S(-1{,}5 \mid 2{,}25)$ ist der Scheitel von f(x). Geben Sie den Scheitel von g(x) an
	b)	Die Gerade mit $x = u$ schneidet für $-3 < u < 0$ f(x) in P und g(x) in Q. Bestimmen Sie die Koordinaten von P und Q.
	c)	Die Strecke PQ ist eine Seite eines Rechtecks, das den beiden Parabeln einbeschrieben ist. Bestimmen Sie den Inhalt des Rechtecks für u = -1 und den Umfang U in Abhängigkeit von u.
	d)	Verschieben Sie die Parabel g(x) in y – Richtung so, dass die verschobene Parabel den Graphen von f(x) berührt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes.
	e)	Bestimmen Sie a so, dass $f(a) - f(a+1) = 4$ ist.

A3	**Ausführliche Lösung**		
	a)		$f(x) = -x^2 - 3x = -x(x+3)$ $\Rightarrow P_{x1}(0 \mid 0)\,;\, P_{x2}(-3 \mid 0)$ $g(x) = 0{,}5x(x+3)$ $\Rightarrow P_{x1}(0 \mid 0)\,;\, P_{x2}(-3 \mid 0)$ f(x) und g(x) haben die gleichen Nullstellen. $f(x): S(-1{,}5 \mid 2{,}25)$ $g(x) = -0{,}5 \cdot f(x)$ $\Rightarrow y_s = -0{,}5 \cdot 2{,}25 = -1{,}125$ $\Rightarrow S(-1{,}5 \mid -1{,}125)$

A3	**Ausführliche Lösung**	
	b)	Einsetzen von $x = u$ in die Funktionsgleichungen ergibt die y – Werte: $f(u) = -u^2 - 3u \quad \Rightarrow \underline{\underline{P(u \mid -u^2 - 3u)}}$ $g(u) = 0{,}5u(u+3) \Rightarrow \underline{\underline{Q(u \mid 0{,}5u(u+3))}}$

A3 **Ausführliche Lösung**

c)



Ergebnis aus b)

$P\left(u \mid -u^2-3u\right)$ oder $P\left(u \mid -u(u+3)\right)$

$Q\left(u \mid 0{,}5u(u+3)\right)$

x – Koordinate des Scheitels

$x_S = -1{,}5$

Für u gilt:

$-3 \le u \le 0 \Rightarrow$ u ist negativ

$$\overline{PQ} = \left|\underbrace{\underbrace{-u}_{+}(u+3)}_{+}\right| + \left|\underbrace{0{,}5u}_{-}\underbrace{(u+3)}_{+}\right|$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} = -u(u+3) - 0{,}5u(u+3)$$

$$\overline{PQ} = -1{,}5u(u+3)$$

$\overline{AP} = \overline{BQ}$

$\underline{\text{Falls } -1{,}5 \le u \le 0}$ (x = u liegt rechts vom Scheitel)

dann gilt: $\frac{\overline{AP}}{2} = |-1{,}5| - |u| = 1{,}5 + u$ (da u negativ) $\Rightarrow AP = 2(1{,}5+u)$

Rechteckfläche: $A = \overline{PQ} \cdot \overline{AP} = -1{,}5u(u+3) \cdot 2(1{,}5+u)$

Speziell für $u = -1$ gilt: $A = -1{,}5 \cdot (-1)(-1+3) \cdot 2(1{,}5-1) = \underline{\underline{3FE}}$

Der Umfang des Rechtecks in Abhängigkeit von u:

$$U = 2\left(\overline{PQ} + \overline{AP}\right) = 2\left[-1{,}5u(u+3) + 2(1{,}5+u)\right] = \underline{\underline{-3u^2 - 5u + 6}}$$

$\underline{\text{Falls } -3 \le u \le -1{,}5}$ (x = u liegt links vom Scheitel)

dann gilt: $\frac{\overline{AP}}{2} = |u| - |-1{,}5| = -u - 1{,}5$ (da u negativ) $\Rightarrow AP = 2(-u-1{,}5)$

Der Umfang des Rechtecks in Abhängigkeit von u:

$$U = 2\left(\overline{PQ} + \overline{AP}\right) = 2\left[-1{,}5u(u+3) + 2(-u-1{,}5)\right] = \underline{\underline{-3u^2 - 13u - 6}}$$

A3	**Ausführliche Lösung**	
	d)	$f(x) = -x^2 - 3x\,;\, g(x) = 0{,}5x(x+3) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x$ Die in $y-$Richtung verschobene Parabel g(x) hat die Funktionsgleichung: $g^*(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x + a_0 \quad \left(x-\text{Wert des Scheitels bleibt } x_s = -1{,}5\right)$ Bedingung für die Berührung beider Parabeln: $f(x) = g^*(x)$ und $D = 0$ $f(x) = g^*(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{2}{3}a_0 = 0 \Rightarrow p = 3\,;\, q = \frac{2}{3}a_0 \Rightarrow D = \frac{9}{4} - \frac{2}{3}a_0$ $D = 0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{27}{8} = 3{,}375 \Rightarrow g^*(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x + 3{,}375$ Berührungspunkt: $B\left(-1{,}5 \mid g^*(-1{,}5)\right) \Rightarrow B\left(-1{,}5 \mid 2{,}25\right)$ Die Parabel g(x) wird um $\underline{\underline{3{,}375\text{ LE}}}$ nach oben geschoben und berührt f(x) in $\underline{\underline{B\left(-1{,}5 \mid 2{,}25\right)}}$

A3	**Ausführliche Lösung**	
	e)	$f(x) = -x^2 - 3x$ $f(a) = -a^2 - 3a$ $f(a+1) = -(a+1)^2 - 3(a+1) = -a^2 - 5a - 4$ $f(a) - f(a+1) = 4 \Leftrightarrow -a^2 - 3a - \left(-a^2 - 5a - 4\right) = 4$ $\Leftrightarrow 2a + 4 = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 0}}$

A4	**Aufgabe**
	Gegeben ist eine quadratische Funktion f(x). Bestimmen Sie a so, dass die Parabel g(x) den Graphen von f(x) berührt. $f(x)=(x-1)(x-2)\,;\, x\in\mathbb{R}\,;\, g(x)=ax^2$

A4	**Ausführliche Lösung**
	$f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2\,;\, g(x)=ax^2$ $f(x)=g(x)\Leftrightarrow (1-a)x^2-3x+2=0\,;$ mit $a\neq 1$ $\Leftrightarrow x^2-\frac{3}{1-a}x+\frac{2}{1-a}=0\Rightarrow p=-\frac{3}{1-a}\,;\, q=\frac{2}{1-a}$ Bedingung für Berührung ist $D=0$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{3}{2(1-a)}\right)^2-\frac{2}{1-a}=0$ $\Leftrightarrow \frac{9}{4(1-a)^2}-\frac{2}{1-a}=0\Leftrightarrow \frac{9}{4(1-a)^2}-\frac{8(1-a)}{4(1-a)^2}=0$ $\Leftrightarrow 9-8(1-a)=0\Leftrightarrow a=-\frac{1}{8}$ $\underline{\underline{g(x)=-\frac{1}{8}x^2 \text{ berührt } f(x)}}$

A5	**Aufgabe**
	Zeigen Sie, dass es keinen Wert von a gibt, sodass der Graph von f(x) die Normalparabel berührt. $f(x)=ax^2+1$

A5	**Ausführliche Lösung**
	Normalparabel: $g(x)=x^2\,;\, f(x)=ax^2+1$ $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{a-1}$ für $a\neq 1$ für $a>1\Rightarrow x^2=-\frac{1}{a-1}<0\Rightarrow$ keine Lösung für $a<1\Rightarrow x^2=-\frac{1}{a-1}>0\Rightarrow$ zwei Lösungen $x_{1/2}=\pm\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$

A6 Aufgabe

Eine Parabel mit der Funktionsgleichung f(x) hat ihren Scheitel in $S(0\,|\,6)$ und schneidet die x – Achse im Punkt $P_x\left(2\sqrt{3}\,|\,0\right)$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und zeichnen Sie den Graphen.

A6 Ausführliche Lösung

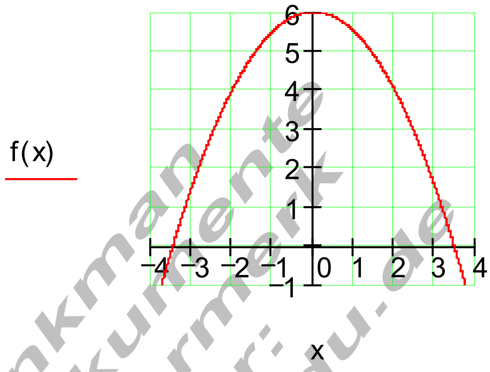
$S(0\,|\,6) \Rightarrow f(x) = a_2x^2 + 6$

$P_x\left(2\sqrt{3}\,|\,0\right)$

$\Rightarrow f\left(2\sqrt{3}\right) = a_2\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 12a_2 + 6 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6}}$



A7 Aufgabe

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 2. Grades f(x) schneidet die Koordinatenachsen in $P_{x_1}(k\,|\,0); P_{x_2}(-2\,|\,0)$ und in $P_y(0\,|\,-k)$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x).

A7 Ausführliche Lösung

$f(x) = a_2(x-k)(x+2)$ Linearfaktoren

$f(0) = -k \Leftrightarrow a_2(-k)(2) = -k \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-k)(x+2) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left[x^2 + (2-k)x - 2k\right]}}$

A8 Aufgabe

Ermitteln Sie die Koeffizienten a_2 und a_1 so, dass die Funktion $f(x) = a_2x^2 + a_1x + 3$ an den Stellen $x = -1$ und $x = 0,5$ die gleichen Funktionswerte hat wie die Funktion $g(x) = 2x - 1$.

A8 Ausführliche Lösung

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + 3\,;\; g(x) = 2x - 1$

$g(-1) = -2 - 1 = -3 \Rightarrow f(-1) = -3 \Leftrightarrow a_2 - a_1 + 3 = -3$

$g(0,5) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow f(0,5) = 0 \Leftrightarrow 0,25a_2 + 0,5a_1 + 3 = 0$

$\Rightarrow a_2 = -8\,;\; a_1 = -2$

$\underline{\underline{f(x) = -8x^2 - 2x + 3}}$