Lösungen Grundaufgaben für lineare und quadratische Funktionen I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\Rightarrow P_y\left(0\,\middle|\,\frac{3}{4}\right)$	$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\Rightarrow P_x\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,0\right)$

E2	Ergebnis
	$f(x)=mx+b$ mit $m=2$ und $P(-3\,|\,5)\Rightarrow f(x)=2x+11$

E3	Ergebnis
	$P_1(-3\,|\,5);P_2(2\,|\,-1)\Rightarrow f(x)=-\frac{6}{5}x+\frac{7}{5}$

E4	Ergebnis
	$f_1(x)=2x+1;\ f_2(x)=-x+2\Rightarrow P_s\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{5}{3}\right)$

E5	Ergebnis
	$f(x)=3x-7;P(1\,|\,-4)\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$

E6	Ergebnis
	$f(x)=x^2-2x-3\Rightarrow P_y(0\,|\,-3);P_{x_1}(3\,|\,0);P_{x_2}(-1\,|\,0);S(1\,|\,-4)$

E7	Ergebnis
	$f(x)=2x^2-4x+5\Leftrightarrow f(x)=2(x-1)^2+3\Rightarrow S(1\,|\,3)$

E8	Ergebnis
	$f_1(x)=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4};\ f_2(x)=\frac{7}{8}x^2-x-\frac{7}{8}\Rightarrow P_1(3\,|\,4);P_2(-1\,|\,1)$

E9	Ergebnis
	$f_1(x)=x^2-6x+6;\ f_2(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{11}{4}$ $\Rightarrow P_1(5\,|\,1);P_2(1\,|\,1);S_1(3\,|\,-3);S_2(3\,|\,4)$ Abstand: $\lvert -3\rvert+4=7$

E10	Ergebnis
	$P_1(-1\,|\,-1);P_2(2\,|\,-2);P_3(3\,|\,1)\Rightarrow f(x)=\frac{5}{6}x^2-\frac{7}{6}x-3$

E11	Ergebnisse			
	a)	$2x+4y+z=13$ $x-y-z=-4 \quad \Rightarrow L=\{1;2;3\}$ $x+2y+2z=11$	b)	$x-2y+z=-1$ $3x+y-z=-4 \quad \Rightarrow L=\{-1;1;2\}$ $x+4y-2z=-1$

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Achsenschnittpunkte einer Geraden.	
	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte der folgenden Geraden:	$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ Schnittpunkt mit der y – Achse: Bedingung: x – Wert $=0$ $\Rightarrow y_s=f(0)$ $\Leftrightarrow f(0)=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{4}\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{3}{4}\right)}}$	$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ Schnittpunkt mit der x – Achse: Bedingung: $y=f(x_s)=0$ $\Rightarrow \frac{1}{2}x_s+\frac{3}{4}=0 \mid -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_s=-\frac{3}{4} \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow x_s=-\frac{3}{4}\cdot 2 \Leftrightarrow x_s=-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right)}}$

A2	**Aufgabe**
	Gerade mit vorgegebener Steigung durch einen Punkt.
	Die Steigung einer Geraden sei m = 2. Sie soll durch den Punkt P (-3 | 5) verlaufen. Berechnen Sie die Funktionsgleichung.

A2	**Ausführliche Lösung**
	$f(x)=mx+b$ mit $m=2$ folgt $f(x)=2x+b$ $P(-3 \mid 5)\Rightarrow f(-3)=5 \Leftrightarrow 2\cdot(-3)+b=5$ $\Leftrightarrow -6+b=5 \mid +6 \Leftrightarrow b=5+6 \Leftrightarrow b=11$ $\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=2x+11}}$ Vorgehensweise: 1. Der Wert der Steigung und die Koordinaten des Punktes P werden in die Funktionsgleichung eingesetzt. 2. Die so entstandene Gleichung wird nach b aufgelöst.

A3	**Aufgabe**
	Gerade durch 2 Punkte.
	Gegeben sind die Punkte P_1 (-3 | 5) P_2 (2 | -1). Berechnen Sie die Funktionsgleichung.

A3	**Ausführliche Lösung**
	$P_1\left(-3 \mid 5\right); P_2\left(2 \mid -1\right)$ für die Steigung m gilt: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{2-\left(-3\right)} = \frac{-6}{5} = -\frac{6}{5}$ $\Rightarrow f\left(x\right) = -\frac{6}{5}x + b$ $P_2(2 \mid -1) \Rightarrow f(2) = -1 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} \cdot 2 + b = -1 \Leftrightarrow -\frac{12}{5} + b = -1 \mid +\frac{12}{5}$ $\Leftrightarrow b = -1 + \frac{12}{5} \Leftrightarrow b = -\frac{5}{5} + \frac{12}{5} \Leftrightarrow b = \frac{7}{5} \Rightarrow \underline{\underline{f\left(x\right) = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}}}$ Vorgehensweise: 1. Die Steigung m wird mit der Steigungsformel berechnet. 2. Die Koordinaten eines der beiden Punkte (hier P_2) werden in die Funktionsgleichung eingesetzt. 3. Die so entstandene Gleichung wird nach b aufgelöst.

A4	**Aufgabe**
	Schnittpunkt zweier Geraden.
	Berechnen Sie den Schnittpunkt zweier Geraden mit den Funktionsgleichungen: $f_1\left(x\right) = 2x + 1$ und $f_2\left(x\right) = -x + 2$

A4	**Ausführliche Lösung**
	$f_1\left(x\right) = 2x + 1$ und $f_2\left(x\right) = -x + 2$ $f_1(x_s) = f_2(x_s) \Leftrightarrow 2x_s + 1 = -x_s + 2 \mid +x_s \Leftrightarrow 3x_s + 1 = 2 \mid -1$ $\Leftrightarrow 3x_s = 1 \mid :3 \Leftrightarrow x_s = \frac{1}{3}$ $y_s = f_1(x_s) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{\underline{P_s\left(\frac{1}{3} \mid \frac{5}{3}\right)}}$ Vorgehensweise: Für den Schnittpunkt beider Geraden gilt: $f_1(x_s) = f_2(x_s)$ Das Gleichsetzen beider Funktionsgleichungen liefert die x- Koordinate des Schnittpunktes. Den y- Wert erhält man durch Einsetzen des Wertes in eine der beiden Funktionsgleichungen.

A5 **Aufgabe**

Die zu einer Geraden senkrecht verlaufende Gerade.

Berechnen Sie die zu einer Geraden senkrecht verlaufende Gerade durch den Punkt P.

$f(x) = 3x - 7 \qquad P(1|-4)$

A5 **Ausführliche Lösung**

$f(x) = 3x - 7 \qquad P(1\,|-4)$

$$m_1 = 3 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}x + b$$

$$P(1\,|-4) \Rightarrow g(1) = -4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\cdot 1 + b = -4 \;\Big|\; +\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow b = -4 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{12}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{11}{3}}}$$

Vorgehensweise:
Zuerst wird die Steigung m_2 der senkrechten Geraden aus der Steigung der bekannten Geraden bestimmt. $\Rightarrow g(x) = m_2x + b$

Die x – Koordinate von P wird in die Gleichung eingesetzt.
Daraus lässt sich dann b errechnen.

A6 Aufgabe

Achsenschnittpunkte einer Parabel.

Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte folgender Parabel und zeichnen Sie den Graphen. $f(x)=x^2-2x-3$

Hinweis: Die x – Koordinate des Scheitelpunktes liegt symmetrisch zu den Nullstellen.

A6 Ausführliche Lösung

$f(x)=x^2-2x-3$

$P_y(0\mid y_s)\Rightarrow y_s=f(0)=0^2-2\cdot 0-3=-3\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\mid -3)}}$

$P_x(x_s\mid 0)\Rightarrow f(x_s)=0\Leftrightarrow x_s^2-2x_s-3=0$ quadratische Gleichung

$p=-2\,;q=-3\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+3=4\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{4}=2$

$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{matrix}x_1=1+2=3\\ x_2=1-2=-1\end{matrix}\right.\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3\mid 0)\quad P_{x2}(-1\mid 0)}}$

$x_s=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+(-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

$y_s=f(x_s)=f(1)=^2-2\cdot 1-3=-4\Rightarrow \underline{\underline{S(1\mid -4)}}$

Vorgehensweise:
Die x – Koordinate des Scheitelpunktes liegt symmetrisch zu den Nullstellen.
Der Schnittpunkt mit der y- Achse hat die x- Koordinate 0, also f(0) = y_s
Schnittpunkte mit der x- Achse haben die y- Koordinate 0, also f(x_s) = 0
Das führt auf eine quadratische Gleichung, deren Lösung die x- Koordinaten der Achsenschnittpunkte sind.

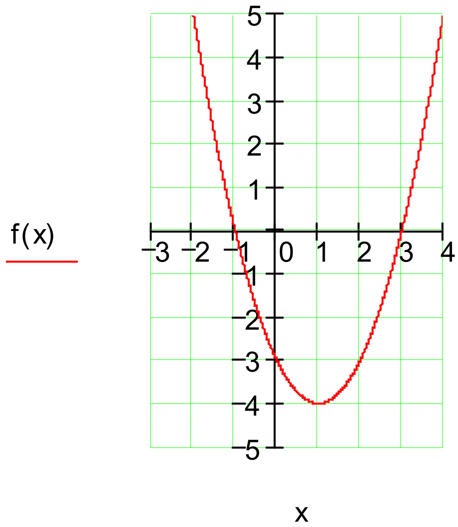
A6 Der Graph

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

Jede Parabel ist symmetrisch zu der Achse, die durch den Scheitelpunkt führt.

Falls es Schnittpunkte mit der x- Achse gibt, liegen auch diese symmetrisch zu der Scheitelachse.

Die x- Koordinate des Scheitelpunktes liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen.



A7	**Aufgabe**
	Scheitelpunktform, Scheitelpunktkoordinaten.
	Berechnen Sie die Scheitelform der Funktion f(x) und ermitteln Sie die Scheitelkoordinaten. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

A7	**Ausführliche Lösung**	
	Der Koeffizient von x^2 wird ausgeklammert. In der eckigen Klammer wird eine quadratische Ergänzung durchgeführt. Nach Multiplikation mit dem Koeffizienten erhält man die Scheitelpunktform, aus der sich die Scheitelkoordinaten ablesen lassen.	$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ $\Leftrightarrow f(x) = 2\left[x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right]$ $\Leftrightarrow f(x) = 2\left[\underbrace{x^2 - 2x + 1^2}_{\text{2. bin. Formel}} - 1^2 + \frac{5}{2}\right]$ $\Leftrightarrow f(x) = 2\left[(x-1)^2 + \frac{3}{2}\right]$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) = 2(x-1)^2 + 3}} \Rightarrow \underline{\underline{S(1\mid 3)}}$

A8 **Aufgabe**

Schnittpunkt von Parabel und Gerade.

Eine Parabel wird von einer Geraden geschnitten. Bestimmen Sie die Schnittpunkte.

$$f_1(x)=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4} \qquad f_2(x)=\frac{7}{8}x^2-x-\frac{7}{8}$$

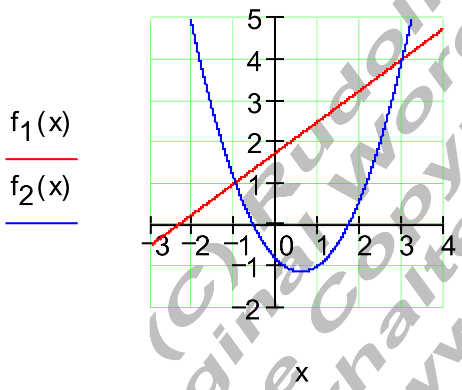
A8 **Ausführliche Lösung**

Für den Schnittpunkt der Geraden mit der Parabel gilt:

$f_1(x)=f_2(x)$

Das Gleichsetzen beider Funktionsgleichungen liefert eine quadratische Gleichung.
Deren Lösung liefert die x- Koordinaten für den Schnittpunkt.

Die dazugehörigen y- Koordinaten erhält man durch Einsetzen der Werte in f_1 oder f_2.



$$f_1(x)=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4};\ f_2(x)=\frac{7}{8}x^2-x-\frac{7}{8}$$

Bedingung für Schnitt: $f_1(x)=f_2(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x+\frac{7}{4}=\frac{7}{8}x^2-x-\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{8}x^2+\frac{3}{4}x+x+\frac{7}{4}+\frac{7}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{8}x^2+\frac{6}{8}x+\frac{8}{8}x+\frac{14}{8}+\frac{7}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{8}x^2+\frac{14}{8}x+\frac{21}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow p=-2;\ q=-3$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+3=4 \Rightarrow \sqrt{D}=2$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left|\ \begin{array}{l} x_1=1+2=3 \\ x_2=1-2=-1 \end{array}\right.$$

$$y_1=f_1(3)=\frac{3}{4}\cdot 3+\frac{7}{4}=\frac{16}{4}=4$$

$$y_2=f_1(-1)=\frac{3}{4}\cdot(-1)+\frac{7}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_1(3\,|\,4) \quad P_2(-1\,|\,1)}}$$

A9 Aufgabe

Schnittpunkt zweier Parabeln.

Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln und den Abstand der Scheitelpunkte.

$f_1(x) = x^2 - 6x + 6 \qquad f_2(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{4}$

A9 Ausführliche Lösung

$f_1(x) = x^2 - 6x + 6$

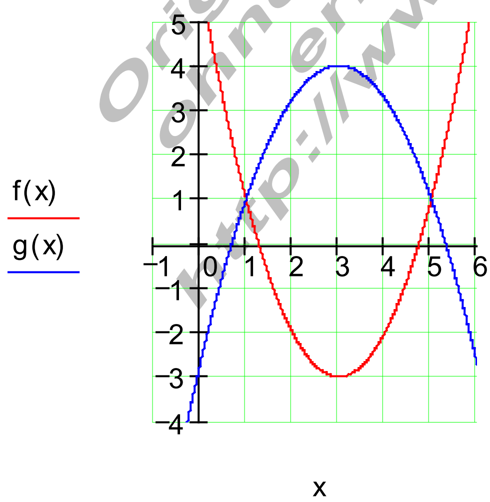
$f_2(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{4}$

Für den Schnittpunkt beider Parabeln gilt: $f_1(x) = f_2(x)$

Das Gleichsetzen beider Funktionsgleichungen liefert eine quadratische Gleichung. Deren Lösung liefert die x- Koordinaten für den Schnittpunkt.

Die dazugehörigen y- Koordinaten erhält man durch Einsetzen der Werte in f_1 oder f_2.

Da beide y- Koordinaten auf gleicher Höhe liegen und aus der Symmetrie der Parabel findet man die x- Koordinate der Scheitelpunkte. Damit gelangt man an die Scheitelkoordinaten und kann den Abstand bestimmen.



$f_1(x) = f_2(x)$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x^2 - 6x - \frac{9}{2}x + 6 + \frac{11}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{7}{4}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{35}{4} = 0 \mid \cdot \frac{4}{7}$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4$

$\Leftrightarrow |x-3| = 2$

$\Leftrightarrow x - 3 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 5}}$

$x - 3 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 1}}$

$f_1(5) = 25 - 30 + 6 = 1$

$f_1(1) = 1 - 6 + 6 = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_1(5 \mid 1) \quad P_2(1 \mid 1)}}$

x - Koordinate der Scheitels:

$x_{s_1} = x_{s_2} = \frac{5+1}{2} = 3$

$\Rightarrow y_{s_1} = f_1(x_{s_1}) = f_1(3)$

$= 9 - 18 + 6 = -3$

$y_{s_2} = f_2(x_{s_2}) = f_2(3)$

$= -\frac{3}{4} \cdot 9 + \frac{9}{2} \cdot 3 - \frac{11}{4} = 4$

$\Rightarrow S_1(3 \mid -3) \quad S_2(3 \mid 4)$

$\Rightarrow$ Abstand: $|-3| + 4 = \underline{\underline{7}}$

A10 Aufgabe

Parabel durch drei Punkte.

Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Parabel, die durch die Punkte $P_1(-1 \mid -1)$ $P_2(2 \mid -2)$ $P_3(3 \mid 1)$ verläuft.

A10 Ausführliche Lösung

Durch Einsetzen der Koordinaten der drei Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung entsteht ein Gleichungssystem mit drei Variablen.

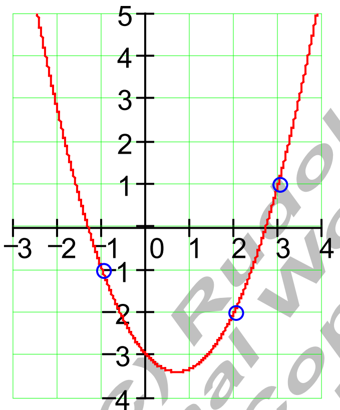
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P_1(-1 \mid -1): \quad 1 \cdot a - 1 \cdot b + 1 \cdot c = -1$$

$$P_2(2 \mid -2): \quad 4 \cdot a + 2 \cdot b + 1 \cdot c = -2$$

$$P_3(3 \mid 1): \quad 9 \cdot a + 3 \cdot b + 1 \cdot c = 1$$

Dieses ist mit den Gauß- Algorithmus lösbar und liefert die Koeffizienten a, b und c.



$$\begin{array}{ccc|cl}
1 & -1 & 1 & -1 & \\
4 & 2 & 1 & -2 & II - 4 \cdot I \\
9 & 3 & 1 & 1 & III - 9 \cdot 1 \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & \\
0 & 6 & -3 & 2 & \\
0 & 12 & -8 & 10 & III - 2 \cdot II \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & \\
0 & 6 & -3 & 2 & \\
0 & 0 & -2 & 6 & \\
\hline
\end{array}$$

$$-2c = 6 \Leftrightarrow \underline{\underline{c = -3}}$$

$$6b - 3 \cdot (-3) = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = -\frac{7}{6}}}$$

$$a - 1 \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) + 1 \cdot (-3) = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \frac{5}{6}}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x - 3}}$$

A11 Aufgabe

Der Gauß- Algorithmus.

Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gauß- Algorithmus:

a) $2x+4y+z=13$ $x-y-z=-4$ $x+2y+2z=11$	b) $x-2y+z=-1$ $3x+y-z=-4$ $x+4y-2z=-1$

A11 Ausführliche Lösung

a)

$$\begin{aligned} 2x+4y+z&=13\\ x-y-z&=-4\\ x+2y+2z&=11 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 2 & 4 & 1 & 13 & \\ 1 & -1 & -1 & -4 & \\ 1 & 2 & 2 & 11 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 11 & \\ 1 & -1 & -1 & -4 & II-I \\ 2 & 4 & 1 & 13 & III-2\cdot I \\ \hline 1 & 2 & 2 & 11 & \\ 0 & -3 & -3 & -15 & \\ 0 & 0 & -3 & -9 & \end{array}$$

$-3z=-9$

$\Rightarrow \underline{\underline{z=3}}$

$-3y-3\cdot 3=-15$

$\Rightarrow \underline{\underline{y=2}}$

$x+2\cdot 2+2\cdot 3=11$

$\Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

b)

$$\begin{aligned} x-2y+z&=-1\\ 3x+y-z&=-4\\ x+4y-2z&=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & -2 & 2 & 1 & \\ 3 & 1 & -1 & -4 & II-3\cdot I \\ 1 & 4 & -2 & -1 & III-I \\ \hline 1 & -2 & 2 & 1 & \\ 0 & 7 & -7 & -7 & :7 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & :2 \\ \hline 1 & -2 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 3 & -2 & -1 & III-3\cdot II \\ \hline 1 & -2 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \end{array}$$

$\underline{\underline{z=2}}$

$y-1\cdot 2=-1$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=1}}$

$x-2\cdot 1+2\cdot 2=1$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=-1}}$