Abiturvorbereitung

Vireninfektion, zusammengesetzte Funktion ohne e- Funktion

Aufgabenblatt

Aufgabe 6

6.	Bei einer Vireninfektion ergibt sich die Anzahl der Vieren (in Milliarden) nach folgender Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ Nach drei Tagen wird ein Medikament verabreicht, das der Ausbreitung der Vieren nach folgender Funktion entgegenwirkt: $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9$		
	a)	Skizzieren Sie den groben Verlauf des Funktionsgraphen. Verwenden Sie dabei die Kenntnisse, die Sie über quadratische Funktionen besitzen.	
	b)	Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen (x = a) alle Vieren abgestorben sind (Ergebnis auf drei Kommastellen runden).	
	c)	Zeichnen Sie den graphischen Verlauf der Vireninfektion im Intervall [0 ; a]	
	d)	Zu welchem Zeitpunkt ist die Anzahl der Vieren am größten? Wie hoch ist die Anzahl?	
	e)	Die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse ist ein Maß für die schädigende Wirkung der Vieren, auch Wirkungsfaktor genannt. Gesundheitliche Schäden können auftreten, wenn der Wert 60 WE (Wirkungseinheiten) überschreitet. Berechnen Sie den gesamten Wirkungsfaktor bis zum völligen Abklingen der Krankheit.	

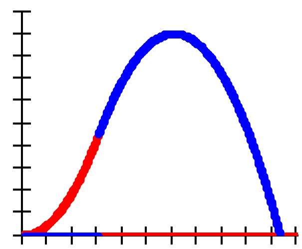
E6	**Ergebnisse**	
	a)	Siehe ausführliche Lösungen.
	b)	Nach etwa 10,243 Tagen sind alle Vieren abgestorben.
	c)	Siehe ausführliche Lösungen.
	d)	Die Anzahl der Vieren ist nach x = 6 Tagen an größten. Sie beträgt dann 9 Milliarden.
	e)	Der Wirkungsfaktor W (x) beträgt etwa 52,456.

Ausführliche Lösungen

A6 Verlauf des Funktionsgraphen skizziert

a) Es handelt sich um eine aus zwei Teilfunktionen zusammengesetzte Funktion.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9 & \text{für } 3 \le x \le a \end{cases}$$



A6 Nullstelle des zweiten Funktionsterms

b) $-\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9 = 0 \,|: \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 18 = 0$ mit $p = -12$ und $q = 18$ wird

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 36 - 18 = 18 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3 \cdot \sqrt{2}$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{vmatrix} x_1 = 6 + 3 \cdot \sqrt{2} \approx 10,243 \\ x_2 = 6 - 3 \cdot \sqrt{2} \approx 1,757 < 3 \end{vmatrix}$

Nach etwa 10,243 Tagen sind alle Vieren abgestorben.

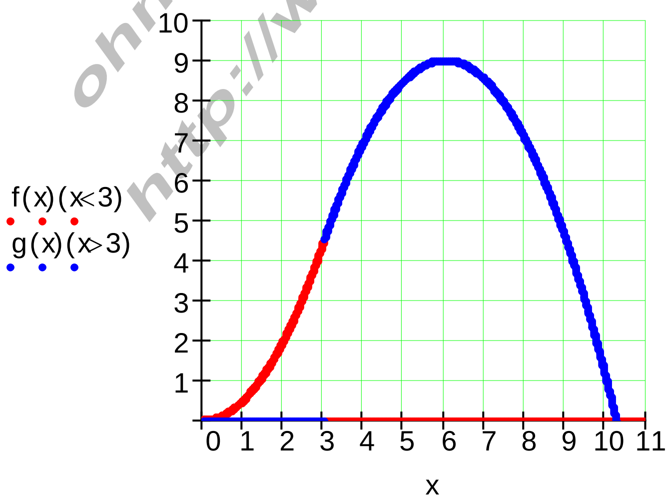
A6 Wertetabelle

c)

x	0	1	2	3	4	5
h(x)	0	0,5	2	4,5	4	8,5
x	6	7	8	9	10	$6 + 3 \cdot \sqrt{2} \approx 10,24$
h(x)	9	8,5	7	4,5	1	0

A6 Graph

c)



A6 Berechnung des Maximums

d) Das Maximum liegt im Bereich x > 3.
Zu untersuchen ist der 2. Funktionsterm g(x).

$$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x-9 \Rightarrow g'(x)=-x+6 \Rightarrow g''(x)=-1<0$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow -x+6=0 \Rightarrow x=x_{max}=6 \text{ denn } g''(x)=-1<0$$

$$\underline{\underline{P_{max}(6\,|\,9)}}$$

Die Anzahl der Vieren ist nach x = 6 Tagen an größten.
Sie beträgt dann 9 Milliarden.

A6 Wirkungsfaktor

e) Zu berechnen sind die beiden Teilintegrale:

$$W(x)=\int_0^3 \frac{1}{2}x^2\,dx+\int_3^{6+3\cdot\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}x^2+6x-9\right)dx$$

$$\int_0^3 \frac{1}{2}x^2\,dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^3=\frac{1}{6}\cdot 3^3-0=\frac{9}{2}$$

$$\int_3^{6+3\cdot\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}x^2+6x-9\right)dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+3x^2-9x\right]_3^{6+3\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\left[-\frac{1}{6}\cdot\left(6+3\cdot\sqrt{2}\right)^3+3\cdot\left(6+3\cdot\sqrt{2}\right)^2-9\cdot\left(6+3\cdot\sqrt{2}\right)-\left(-\frac{1}{6}\cdot 3^3+3\cdot 3^2-9\cdot 3\right)\right]$$

Zwischenrechnung:

$$\left(6+3\cdot\sqrt{2}\right)^2=36+36\cdot\sqrt{2}+18=54+36\cdot\sqrt{2}$$

$$\left(6+3\cdot\sqrt{2}\right)^3=\left(54+36\cdot\sqrt{2}\right)\left(6+3\cdot\sqrt{2}\right)=540+378\cdot\sqrt{2}$$

$$=\left[-\frac{1}{6}\cdot\left(540+378\cdot\sqrt{2}\right)+3\cdot\left(54+36\cdot\sqrt{2}\right)-9\cdot\left(6+3\cdot\sqrt{2}\right)-\left(-\frac{9}{2}+27-27\right)\right]$$

$$=\left[-90-63\cdot\sqrt{2}+162+108\cdot\sqrt{2}-54-27\cdot\sqrt{2}-\left(-\frac{9}{2}\right)\right]$$

$$=\left[-90+162-54+\frac{9}{2}-63\cdot\sqrt{2}+108\cdot\sqrt{2}-27\cdot\sqrt{2}\right]=\frac{9}{2}+18+18\cdot\sqrt{2}$$

$$W(x)=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+18+18\cdot\sqrt{2}=27+18\cdot\sqrt{2}\approx\underline{\underline{52,456}}$$

Der Wirkungsfaktor W (x) beträgt etwa 52,456. Er liegt knapp unter der Grenze von 60, so dass mit gesundheitlichen Schäden nicht zu rechnen ist.