Lösungen Lineare Funktionen VBKA I

Brüche, Terme und lineare Funktionen zur Vorbereitung einer Klassenarbeit

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse:			
	a)	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{11}{40}$	b)	$\frac{7}{8}-\frac{2}{7}-\frac{1}{4}=\frac{19}{56}$

E2	Ergebnisse:			
	a)	$1\frac{2}{3}\cdot\left(-2\frac{3}{2}\right)=-5\frac{5}{6}$	b)	$4\frac{5}{6}:1\frac{2}{9}=3\frac{21}{22}$

E3	Ergebnisse:			
	a)	$3(3u+4)$	b)	$2(5x-3y-2z)$

E4	Ergebnisse:			
	a)	$-6x-43$	b)	$21u^2-54uv+24v^2$

E5	Ergebnisse:			
	a)	$-5x(u-3v+2z)$	b)	$\frac{1}{2}x\left(u-\frac{1}{4}v+\frac{3}{2}z\right)$

E6	Ergebnisse:			
	a)	$\frac{1}{9}a^2+\frac{2}{3}ab+b^2$	b)	$\frac{36}{49}m^2-\frac{3}{14}mn+\frac{1}{64}n^2$
	c)	$m^2+1\frac{1}{2}mn+\frac{9}{16}n^2$	d)	$\frac{9}{16}a^2-3a+4$

E7	Ergebnisse:			
	a)	$(u+w)^2$	b)	$(2x+3y)^2$
	c)	$(3-8n)^2$	d)	$(m+1)^2$

E8	Ergebnisse:			
	a)	$f(x)=-\frac{5}{4}x+1$	b)	$f(x)=-4x+5$

E9	Ergebnisse:	
	a)	$f(0)=1{,}5$ $\quad f(-1{,}5)=-0{,}375$ $\quad f(0{,}7)=2{,}375$ $f(\pi)\approx 5{,}427$ $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx 3{,}463$ $\quad f(u)=1{,}25u+1{,}5$
	b)	$f(x)=-5$ für $x=-5{,}2$
	c)	$f(x)>0$ für $x>-1{,}2$
	d)	$f(u+2)-f(u)=2{,}5$ ist von u unabhängig

E10	Ergebnisse: Graphen siehe unter ausführliche Lösungen.	
	a)	$P_y(0\,\vert\,-3{,}5)$ $\quad P_x\left(-\frac{7}{8}\,\vert\,0\right)$
	b)	$P_y\left(0\,\vert\,\frac{5}{4}\right)$ $\quad P_x\left(\frac{15}{32}\,\vert\,0\right)$

E11	Ergebnisse:	
	a)	Graphen siehe unter ausführliche Lösungen.
	b)	$f\left(\sqrt{7}\right)=-1{,}53557...\approx 1{,}54$ Wird auf 2 Dezimalstellen gerundet, dann liegt P auf der Geraden.
	c)	für $t>0{,}98$ gilt $f\left(\sqrt{2t}\right)<0{,}6$

E12	Ergebnisse:			
	a)	$f(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$	b)	$f(x)=\frac{3}{2}x+1$
	c)	$f(x)=-x-2$	d)	$f(x)=\frac{1}{3}x$

E13	Ergebnis:
	$f(x)=-4x+5$ $\quad f(0{,}25)=4$ $\quad f\left(\sqrt{2}\right)\approx -0{,}657$

E14	Ergebnisse:			
	a)	$f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$	b)	$f(x)=\frac{2}{3}x+3$
	c)	$f(x)=-4x+2$	d)	$f(x)=-3x+6$
	e)	$f(x)=-4{,}5x+6$	f)	$f(x)=3x-1{,}5$

E15	Ergebnis:
	$f(x)=-\frac{6}{5}x-\frac{14}{5}$ $\quad P_x\left(-\frac{7}{3}\,\vert\,0\right)$

E16	Ergebnisse:				
a)	$f(x)=2x+5$	b)	$f(x)=-x+a$	c)	$f(x)=-\frac{2}{a}x+3\,;\,a\neq 0$

E17	Ergebnisse
a)	Funktionsgleichung: $f(x)=-0{,}35x+1{,}8$
b)	Nach etwa 5 Wochen ist kein Kaffee mehr vorhanden.
c)	Nach 4 Wochen sind nur noch 400 g Kaffee vorhanden.
d)	Den Graphen finden Sie unter **Ausführliche Lösungen.**

E18	Ergebnis
	Das Grundgehalt beträgt 2656 €, die Überstundenpauschale 21 €.

E19	Ergebnisse
a)	Der Funktionsterm: $f(x)=\frac{17}{160}x$
b)	$f(100)=10{,}625$ $f(250)=\frac{425}{16}\approx 26{,}563$ $f(x)=25 \Leftrightarrow x=\frac{4000}{17}\approx 235{,}3$
c)	Den Graphen finden Sie unter Ausführliche Lösungen.

E20	Ergebnisse
a)	$K(x)=0{,}7x+200$
b)	$P_1(800\,\vert\,760)$ $P_2(2500\,\vert\,1950)$ $P_3(4000\,\vert\,3000)$
c)	Einkommen 800 € $\Rightarrow$ Konsumquote $=0{,}95 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{95\%}}$ Einkommen 2500 € $\Rightarrow$ Konsumquote $=0{,}78 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{78\%}}$ Einkommen 4000 € $\Rightarrow$ Konsumquote $=0{,}75 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{75\%}}$ Allgemeiner Zusammenhang: $\text{Konsumquote}=\frac{K(x)}{x}=\frac{0{,}7x+200}{x}=0{,}7+\frac{200}{x}$
d)	70% des Einkommenszuwachses wird für den Konsum ausgegeben.
e)	$S(x)=0{,}3x-200$ Nullstelle von $S(x)$: $S(x)=0 \Leftrightarrow x=666{,}\overline{6}$ Bedeutung der Nullstelle: Erst ab einem Einkommen von 666,67 € kann gespart werden. Die 666,67 € bilden in diesem Modell das Existenzminimum. Unterhalb des Existenzminimums werden Schulden gemacht, denn Mensch muss ja irgendwo von leben. Den Graphen finden Sie unter Ausführliche Lösungen.

E21	Ergebnisse	
	a)	$K(x) = 0,25x + 360$
	b)	Bei einer Produktion von 140 Stück betragen die Stückkosten 2,82 €.
	c)	Bei sehr hohen Stückzahlen streben die Stückkosten gegen 0,25 €.
	d)	Ab einer verkauften Menge von 73 Lippenstiften wird Gewinn gemacht.
	e)	Die Graphen finden Sie unter Ausführliche Lösungen.

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie:	
	a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}$	b) $\frac{7}{8}-\frac{2}{7}-\frac{1}{4}$

A1	**Ausführliche Lösungen**
	a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\underbrace{=}_{HN=40}\frac{1\cdot 20}{2\cdot 20}-\frac{1\cdot 10}{4\cdot 10}+\frac{1\cdot 5}{8\cdot 5}-\frac{1\cdot 4}{10\cdot 4}=\frac{20}{40}-\frac{10}{40}+\frac{5}{40}-\frac{4}{40}=\frac{20-10+5-4}{40}=\underline{\underline{\frac{11}{40}}}$
	b) $\frac{7}{8}-\frac{2}{7}-\frac{1}{4}\underbrace{=}_{HN=56}\frac{7\cdot 7}{8\cdot 7}-\frac{2\cdot 8}{7\cdot 8}-\frac{1\cdot 14}{4\cdot 14}=\frac{49}{56}-\frac{16}{56}-\frac{14}{56}=\underline{\underline{\frac{19}{56}}}$
	Bei der Addition oder Subtraktion von Brüchen sind diese zuerst gleichnamig zu machen. Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und den Nenner beibehält. Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man ihre Zähler subtrahiert und den Nenner beibehält.

A2	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie:	
	a) $1\frac{2}{3}\cdot\left(-2\frac{3}{2}\right)$	b) $4\frac{5}{6}:1\frac{2}{9}$

A2	**Ausführliche Lösungen**
	a) $1\frac{2}{3}\cdot\left(-2\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{35}{6}=\underline{\underline{-5\frac{5}{6}}}$
	b) $4\frac{5}{6}:1\frac{2}{9}=\frac{29}{6}:\frac{11}{9}=\frac{29\cdot 9}{6\cdot 11}=\frac{29\cdot 3}{2\cdot 11}=\frac{87}{22}=\underline{\underline{3\frac{21}{22}}}$
	Brüche werden multipliziert, indem Zähler und Nenner miteinander multipliziert werden. Zwei Brüche werden dividiert, indem der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert wird.

A3	**Aufgabe**	
	Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie.	
	a) $3u+\left[4-(2u-1)+8u\right]+7$	b) $6x-\left[9y-(2x+4z)-(2x+3y-8z)\right]$

A3	**Ausführliche Lösungen**
a)	$3u+[4-(2u-1)+8u]+7=3u+[4-2u+1+8u]+7$ $=3u+4-2u+1+8u+7=3u-2u+8u+4+1+7$ $=9u+12=\underline{\underline{3(3u+4)}}$
b)	$6x-[9y-(2x+4z)-(2x+3y-8z)]=6x-[9y-2x-4z-2x-3y+8z]$ $=6x-9y+2x+4z+2x+3y-8z=6x+2x+2x-9y+3y+4z-8z$ $=10x-6y-4z=\underline{\underline{2(5x-3y-2z)}}$
	Zuerst werden die inneren Klammern gelöst, dann die äußeren. Wenn vor einer Klammer ein Plus steht, kann die Klammer weggelassen werden. Eine Minusklammer wird aufgelöst, indem alle Vorzeichen in der Klammer umgedreht werden.

A4	**Aufgabe**		
	Multiplizieren Sie und fassen Sie zusammen:		
a)	$\frac{1}{2}(2x-4)-5(2x+8)+\frac{1}{4}(12x-4)$	b)	$(4{,}2u-2{,}4v)(5u-10v)$

A4	**Ausführliche Lösungen**
a)	$\frac{1}{2}(2x-4)-5(2x+8)+\frac{1}{4}(12x-4)$ $=\frac{1}{2}\cdot 2x-\frac{1}{2}\cdot 4-5\cdot 2x-5\cdot 8+\frac{1}{4}\cdot 12x-\frac{1}{4}\cdot 4$ $=x-2-10x-40+3x-1$ $=x-10x+3x-2-40-1=\underline{\underline{-6x-43}}$
b)	$(4{,}2u-2{,}4v)(5u-10v)=4{,}2u\cdot 5u-4{,}2u\cdot 10v-2{,}4v\cdot 5u+2{,}4v\cdot 10v$ $=21u^2-42uv-12uv+24v^2=\underline{\underline{21u^2-54uv+24v^2}}$
	Jeder Summand in der Klammer wird der Reihe nach mit dem Faktor multipliziert, der vor der Klammer steht. Danach werden gleichartige Summanden zusammengefasst.

A5	**Aufgabe**		
	Klammern Sie aus:		
a)	$-5xu+15xv-10xz$	b)	$\frac{1}{2}xu-\frac{1}{8}xv+\frac{3}{4}xz$

A5	**Ausführliche Lösungen**
a)	$-5xu+15xv-10xz=-5x\cdot u-5x\cdot(-3v)-5x\cdot 2z=\underline{\underline{-5x(u-3v+2z)}}$
b)	$\frac{1}{2}xu-\frac{1}{8}xv+\frac{3}{4}xz=\frac{1}{2}x\cdot u+\frac{1}{2}x\cdot\left(-\frac{1}{4}v\right)+\frac{1}{2}x\cdot\frac{3}{2}z=\underline{\underline{\frac{1}{2}x\left(u-\frac{1}{4}v+\frac{3}{2}z\right)}}$

A6	**Aufgabe**		
	Berechne mit Hilfe der Binomischen Formeln.		
	a) $\left(\frac{1}{3}a+b\right)^2$	b) $\left(\frac{6}{7}m-\frac{1}{8}n\right)^2$	
	c) $\left(m+\frac{3}{4}n\right)^2$	d) $\left(\frac{3}{4}a-2\right)^2$	

A6	**Ausführliche Lösungen**	
	a)	$\left(\frac{1}{3}a+b\right)^2=\left(\frac{1}{3}a\right)^2+2\cdot\frac{1}{3}a\cdot b+b^2=\underline{\underline{\frac{1}{9}a^2+\frac{2}{3}ab+b^2}}$
	b)	$\left(\frac{6}{7}m-\frac{1}{8}n\right)^2=\left(\frac{6}{7}m\right)^2-2\cdot\frac{6}{7}m\cdot\frac{1}{8}n+\left(\frac{1}{8}n\right)^2=\underline{\underline{\frac{36}{49}m^2-\frac{3}{14}mn+\frac{1}{64}n^2}}$
	c)	$\left(m+\frac{3}{4}n\right)^2=m^2+2\cdot m\cdot\frac{3}{4}n+\left(\frac{3}{4}n\right)^2=m^2+\frac{3}{2}mn+\frac{9}{16}n^2=\underline{\underline{m^2+1\frac{1}{2}mn+\frac{9}{16}n^2}}$
	d)	$\left(\frac{3}{4}a-2\right)^2=\left(\frac{3}{4}a\right)^2-2\cdot\frac{3}{4}a\cdot 2+2^2=\underline{\underline{\frac{9}{16}a^2-3a+4}}$

A7	**Aufgabe**	
	Stelle folgende Terme als Produkte dar. Beispiel: $4a^2+4ab+b^2=(2a)^2+2\cdot 2ab+b^2=\underline{\underline{(2a+b)^2}}$	
	a) $u^2+2uw+w^2$	b) $4x^2+12xy+9y^2$
	c) $9-48n+64n^2$	d) m^2+2m+1

A7	**Ausführliche Lösungen**	
	a)	$u^2+2uw+w^2=u^2+2\cdot u\cdot w+w^2=\underline{\underline{(u+w)^2}}$
	b)	$4x^2+12xy+9y^2=(2x)^2+2\cdot 6x\cdot y+(3y)^2=\underline{\underline{(2x+3y)^2}}$
	c)	$9-48n+64n^2=3^2-2\cdot 3\cdot 8n+(8n)^2=\underline{\underline{(3-8n)^2}}$
	d)	$m^2+2m+1=m^2+2\cdot m\cdot 1+1^2=\underline{\underline{(m+1)^2}}$

A8	**Aufgabe**	
	Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen jeweils in ein Koordinatensystem.	
	a) $f(x)=-\frac{5}{4}x+1$	b) $f(x)=-4x+5$

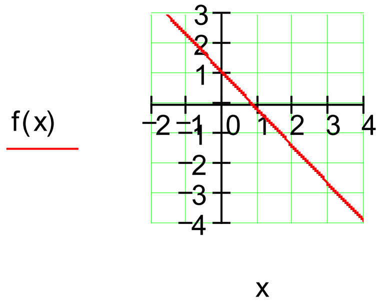
A8 Ausführliche Lösungen

a) $f(x) = -\frac{5}{4}x + 1$

von $(0|1)$

4 EH nach rechts

5 EH nach unten

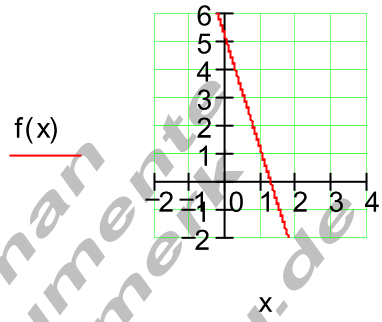


b) $f(x) = -4x + 5 = -\frac{4}{1}x + 5$

von $(0|5)$

1 EH nach rechts

4 EH nach unten



A9 Aufgabe

Gegeben ist die lineare Funktion $f(x)$ mit $f(x) = 1{,}25x + 1{,}5 \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Funktionswerte: $f(0)$; $f(-1{,}5)$; $f(0{,}7)$; $f(\pi)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $f(u)$

b) An welcher Stelle hat die Funktion den Wert -5?.

c) Für welche Argumente sind die Funktionswerte positiv?

d) Zeigen Sie: $f(u+2) - f(u)$ ist unabhängig von u.

A9 Ausführliche Lösungen

a) Ergebnisse gerundet auf 3 Stellen: $f(x) = 1{,}25x + 1{,}5$

$f(0) = 1{,}25 \cdot 0 + 1{,}5 = 1{,}5$ $\qquad f(-1{,}5) = 1{,}25 \cdot (-1{,}5) + 1{,}5 = -0{,}375$

$f(0{,}7) = 1{,}25 \cdot 0{,}7 + 1{,}5 = 2{,}375$ $\qquad f(\pi) = 1{,}25 \cdot \pi + 1{,}5 = 5{,}427$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}25 \cdot \frac{\pi}{2} + 1{,}5 = 3{,}463$ $\qquad f(u) = 1{,}25u + 1{,}5$

b) $f(x) = 1{,}25x + 1{,}5 = -5 \Rightarrow 1{,}25x + 1{,}5 = -5 \Rightarrow x = -5{,}2$

$f(x) = -5$ für $\underline{\underline{x = -5{,}2}}$

c) $f(x) = 1{,}25x + 1{,}5 > 0$

$\Rightarrow 1{,}25x + 1{,}5 > 0 \mid -1{,}5$

$\Leftrightarrow 1{,}25x > -1{,}5 \mid : 1{,}25$ $\qquad \underline{\underline{f(x) > 0 \text{ für } x > -1{,}2}}$

$\Leftrightarrow x > -1{,}2$

d) $f(u+2) = 1{,}25(u+2) + 1{,}5 = 1{,}25u + 2{,}5 + 1{,}5$

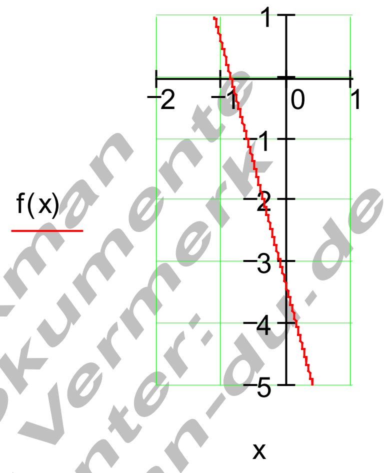
$f(u) = 1{,}25u + 1{,}5$

$f(u+2) - f(u) = 1{,}25u + 2{,}5 + 1{,}5 - 1{,}25u - 1{,}5 = 2{,}5$ ist von u unabhängig

A10	**Aufgabe**		
	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte folgender linearer Funktionen und zeichnen Sie den Graphen in ein Koordinatensystem.		
	a) $f(x) = -4x - 3{,}5$	b)	$f(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{5}{4}$

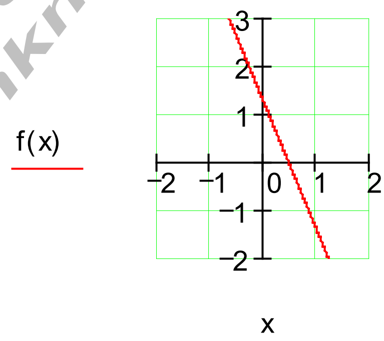
A10 Ausführliche Lösung

a)
$$f(x) = -4x - 3{,}5$$
$$f(0) = -3{,}5$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid -3{,}5\right)}}$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -4x - 3{,}5 = 0$$
$$\Rightarrow x = -\frac{7}{8}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(-\frac{7}{8} = -0{,}875 \mid 0\right)}}$$



A10 Ausführliche Lösung

b)
$$f(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{5}{4}$$
$$f(0) = \frac{5}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{5}{4} = 1{,}25\right)}}$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{3}x + \frac{5}{4} = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{15}{32} \Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(\frac{15}{32} \approx 0{,}47 \mid 0\right)}}$$

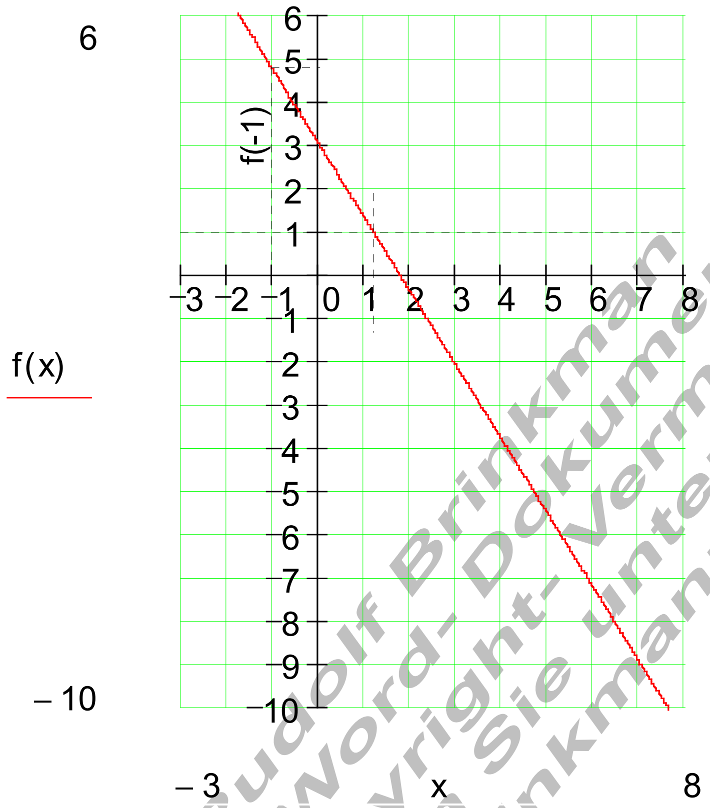


A11	**Aufgabe**
	Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = -\frac{12}{7}x + 3$
a)	Zeichnen Sie den Graphen und kennzeichnen Sie $f(-1)$.
b)	Liegt der Punkt $P\left(\sqrt{7} \mid -1{,}54\right)$ auf dem Graphen von $f(x)$?
c)	Für welche Werte von t ist $f\left(\sqrt{2t}\right) < 0{,}6$?

A11 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = 3 - \frac{12}{7}x = -\frac{12}{7}x + 3 \qquad f(-1) = -\frac{12}{7} \cdot (-1) + 3 = 4\frac{5}{7} \approx 4{,}71$

$f(7) = -9 \quad f(0) = 3$



A11 Ausführliche Lösung

b) $f(x) = -\frac{12}{7}x + 3$

$P\left(\sqrt{7} \mid -1{,}54\right): \quad f(\sqrt{7}) = -\frac{12}{7} \cdot \sqrt{7} + 3 = -1{,}53557... \approx 1{,}54$

Wird auf 2 Dezimalstellen gerundet, dann liegt P auf der Geraden.

A11 Ausführliche Lösung

c) $f\left(\sqrt{2t}\right) < 0{,}6 \Leftrightarrow -\frac{12}{7}\sqrt{2t} + 3 < 0{,}6 \mid -3 \Leftrightarrow -\frac{12}{7}\sqrt{2t} < -2{,}4 \mid \cdot 7$

$\Leftrightarrow -12 \cdot \sqrt{2t} < -16{,}8 \mid : (-12) \Leftrightarrow \sqrt{2t} > 1{,}4 \mid$ quadrieren

$\Leftrightarrow 2t > 1{,}96 \Leftrightarrow t > 0{,}98$

für $t > 0{,}98$ gilt $f\left(\sqrt{2t}\right) < 0{,}6$

A12	**Aufgabe**		
	Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden f(x).		
	a) $a_1 = -\frac{3}{4}$; durch $P(1\mid -2)$	b)	$a_1 = 1{,}5$; durch $P(-1\mid -0{,}5)$
	c) durch $P_1(2\mid -4)$ und $P_2(0\mid -2)$	d)	durch den Ursprung und $P(-3\mid -1)$

A12 Ausführliche Lösung

a)
$$a_1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}x + a_0$$
$$P(1\mid -2):\quad f(1) = -2 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\cdot 1 + a_0 = -2 \Rightarrow a_0 = -\frac{5}{4} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}}}$$

A12 Ausführliche Lösung

b)
$$a_1 = 1{,}5 = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x + a_0$$
$$P(-1\mid -0{,}5):\quad f(-1) = -0{,}5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(-1) + a_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_0 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{3}{2}x + 1}}$$

A12 Ausführliche Lösung

c)
$$P_2(0\mid -2) \Rightarrow a_0 = -2 \quad \Rightarrow f(x) = a_1x - 2$$
$$P_1(2\mid -4):\quad f(2) = -4 \Leftrightarrow a_1\cdot 2 - 2 = -4 \Rightarrow a_1 = -1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -x - 2}}$$

A12 Ausführliche Lösung

d) Gerade durch den Ursprung $\Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow f(x) = a_1x$
$$P(-3\mid -1):\quad f(-3) = -1 \Leftrightarrow a_1\cdot(-3) = -1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3}x}}$$

A13 Aufgabe

Für eine lineare Funktion f gilt $f(2) = -3$ und $f(0) = 5$

Bestimmen Sie den Funktionsterm und berechnen Sie f(0,25) und $f\left(\sqrt{2}\right)$

E13 Ausführliche Lösung

$$f(x) = a_1x + a_0 \quad f(2) = -3 \quad f(0) = 5$$
$$f(0) = 5 \Leftrightarrow a_1\cdot 0 + a_0 = 5 \Rightarrow a_0 = 5 \Rightarrow f(x) = a_1x + 5$$
$$f(2) = -3 \Leftrightarrow a_1\cdot 2 + 5 = -3 \Rightarrow a_1 = -4 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -4x + 5}}$$
$$f(0{,}25) = -4\cdot 0{,}25 + 5 = -1 + 5 = \underline{\underline{4}} \qquad f\left(\sqrt{2}\right) = -4\cdot\sqrt{2} + 5 \approx \underline{\underline{-0{,}657}}$$

A14	**Aufgabe**	
	Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden f(x).	
	a)	$P_1(-4\,|\,2)$ und $P_2(2\,|\,0)$ liegen auf der Geraden
	b)	Die Gerade verläuft durch $P_1(-3\,|\,1)$ und $P_2\left(1\,|\,\frac{11}{3}\right)$
	c)	$P_1(1\,|\,-2)$ und $P_2(-2\,|\,10)$ liegen auf der Geraden.
	d)	Die Gerade schneidet die Achsen in $x=2$ und $y=6$
	e)	Die Gerade hat die Steigung $a_1=-4{,}5$ und verläuft durch $P(2\,|\,-3)$
	f)	Die Gerade hat die Steigung $a_1=3$ und verläuft durch $P(1\,|\,1{,}5)$

A14	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$P_1(-4\,|\,2);P_2(2\,|\,0)\Rightarrow a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-2}{2-(-4)}=-\frac{1}{3}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x+a_0$ $P_2(2\,|\,0):\quad f(2)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\cdot 2+a_0=0\Rightarrow a_0=\frac{2}{3}\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}}$

A14	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$P_1(-3\,|\,1);P_2\left(1\,|\,\frac{11}{3}\right)\Rightarrow a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{11}{3}-\frac{3}{3}}{1-(-3)}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{1}}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}x+a_0$ $P_1(-3\,|\,1):\quad f(-3)=1\Leftrightarrow \frac{2}{3}\cdot(-3)+a_0=1\Rightarrow a_0=3\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=\frac{2}{3}x+3}}$

A14	**Ausführliche Lösung**	
	c)	$P_1(1\,|\,-2);P_2(-2\,|\,10)\Rightarrow a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{10-(-2)}{-2-1}=\frac{12}{-3}=-4\Rightarrow f(x)=-4x+a_0$ $P_1(1\,|\,-2):\quad f(1)=-2\Leftrightarrow -4\cdot 1+a_0=-2\Rightarrow a_0=2\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=-4x+2}}$

A14	**Ausführliche Lösung**	
	d)	$x=2\,;\,y=6\Rightarrow P_1(2\,|\,0);P_2(0\,|\,6)\Rightarrow a_0=6\Rightarrow f(x)=a_1x+6$ $P_1(2\,|\,0):\quad f(2)=0\Leftrightarrow a_1\cdot 2+6=0\Rightarrow a_1=-3\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=-3x+6}}$

A14	**Ausführliche Lösung**	
	e)	$a_1=-4{,}5\Rightarrow f(x)=-4{,}5x+a_0$ $P(2\,|\,-3):\quad f(2)=-3\Leftrightarrow -4{,}5\cdot 2+a_0=-3\Rightarrow a_0=6\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=-4{,}5x+6}}$

A14	**Ausführliche Lösung**	
	f)	$a_1=3\,;\,P(1\,|\,1{,}5)\Rightarrow f(x)=3x+a_0$ $P(1\,|\,1{,}5):\quad f(1)=1{,}5\Leftrightarrow 3\cdot 1+a_0=1{,}5\Rightarrow a_0=-1{,}5\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=3x-1{,}5}}$

A15	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie den Funktionsterm und die Nullstelle der linearen Funktion f(x) wenn folgende Zusammenhänge bekannt sind:
	$f(-4) = 2$ und $\quad f(1) = -4$

A15	**Ausführliche Lösung**
	$f(-4) = 2 \Rightarrow P_1(-4 \mid 2)\,;\, f(1) = -4 \Rightarrow P_2(1 \mid -4)$ $\Rightarrow a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-2}{1-(-4)} = -\frac{6}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{6}{5}x + a_0$ $P_2(1 \mid -4): \quad f(1) = -4 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} \cdot 1 + a_0 = -4 \Rightarrow a_0 = -\frac{14}{5} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{6}{5}x - \frac{14}{5}}}$ Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{5}x - \frac{14}{5} = 0 \mid \cdot 5 \Leftrightarrow -6x - 14 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3} \Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(-\frac{7}{3} \mid 0\right)}}$

A16	**Aufgabe**					
	Ermitteln Sie den Funktionsterm der linearen Funktion f(x), wenn gilt:					
	a)	$f(1) = 7\,;\, f(-1) = 3$	b)	$f(a) = 0\,;\, f(0) = a$	c)	$f(a) = 1\,;\, f(2a) = -1$

A16	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$f(1) = 7 \Rightarrow P_1(1 \mid 7)\,;\, f(-1) = 3 \Rightarrow P_1(-1 \mid 3)$ $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{3-7}{-1-1} = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + a_0$ $P_1(1 \mid 7): \quad \Rightarrow f(1) = 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + a_0 = 7 \Rightarrow a_0 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 2x + 5}}$

A16	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$f(a) = 0 \Rightarrow P_1(a \mid 0)\,;\, f(0) = a \Rightarrow P_2(0 \mid a) \Rightarrow a_0 = a \Rightarrow f(x) = a_1 x + a$ $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a-0}{0-a} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -x + a}}$

A16	**Ausführliche Lösung**	
	c)	$f(a) = 1 \Rightarrow P_1(a \mid 1)\,;\, f(2a) = -1 \Rightarrow P_1(2a \mid -1)$ $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-1}{2a-a} = -\frac{2}{a} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{a}x + a_0$ $P_1(a \mid 1): \quad f(a) = 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{a} \cdot a + a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{2}{a}x + 3\,;\, a \neq 0}}$

A17	**Aufgabe**	
	Die Erzieherinnen und Erzieher im Kindergarten „Kunterbunt“ trinken gerne Kaffee der Marke „Brinkmann’s Nr. 1“. Die Vorratsdose enthält momentan 1,8 kg Kaffeebohnen. Wöchentlich wird 350 g für die Kaffeemaschine benötigt.	
	a)	Stellen Sie die Funktionsgleichung auf, die diesen Vorgang beschreibt.
	b)	Nach welcher Zeit ist der Kaffeevorrat aufgebraucht?
	c)	Kaffee soll nachbestellt werden, wenn die Vorratsdose nur noch 400 g enthält. Wann wird das der Fall sein?
	d)	Zeichnen Sie den Funktionsgraphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

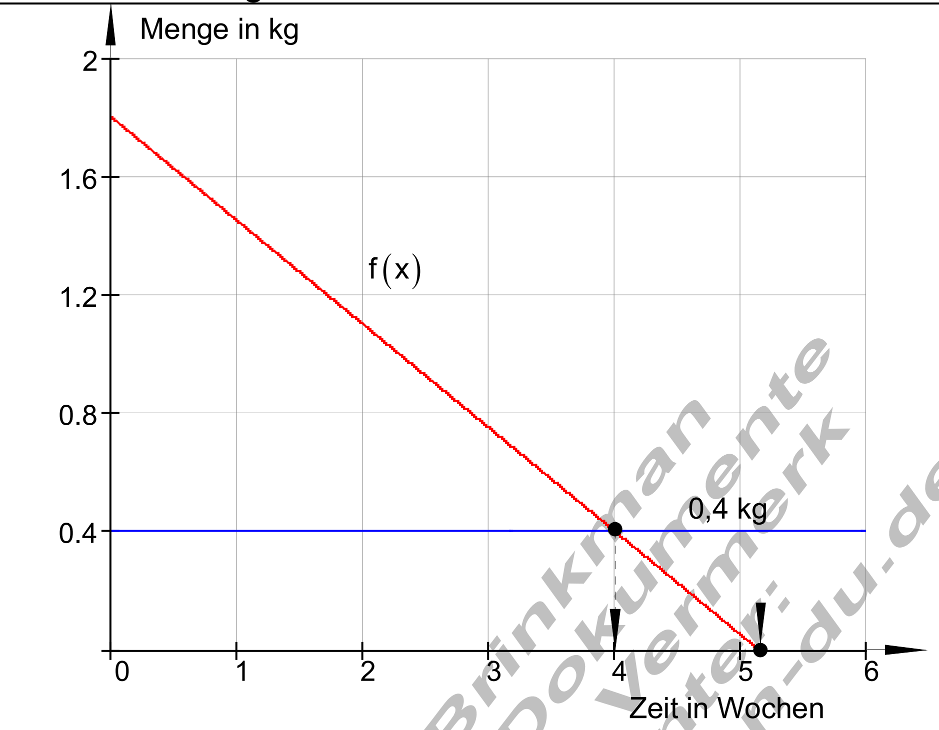
A17	**Ausführliche Lösung**	
	a)	Die Variablen: x bedeutet Wochen $y = f(x)$ bedeutet Menge des Kaffevorrts in kg. $f(x) = a_1x + a_0$ Allgemeine Form der Geradengleichung. Woche 0: $f(0) = -0,35 \cdot 0 + 1,8 = 1,8$ Woche 1: $f(1) = -0,35 \cdot 1 + 1,8 = 1,45$ Woche 2: $f(2) = -0,35 \cdot 2 + 1,8 = 1,1$ .... Woche x: $f(x) = -0,35 \cdot x + 1,8$ Funktionsgleichung für die Abnahme des Kaffeevorrats.

A17	**Ausführliche Lösung**	
	b)	Kaffeevorrat aufgebraucht bedeutet: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -0,35x + 1,8 = 0 \mid -1,8$ Gleichung soll nach x aufgelöst werden $\Leftrightarrow -0,35x = -1,8 \mid : (-0,35)$ $\Leftrightarrow x = \frac{180}{35} = \frac{36}{7} \approx 5,143$ Nach etwa 5 Wochen ist kein Kaffee mehr vorhanden.

A17	**Ausführliche Lösung**	
	c)	Nur noch 400g Kaffee vorhanden bedeutet: $f(x) = 0,4 \Leftrightarrow -0,35x + 1,8 = 0,4 \mid -1,8$ $\Leftrightarrow -0,35x = -1,4 \mid : (-0,35)$ $\Leftrightarrow x = \frac{140}{35} = \frac{28}{7} = 4$ Nach 4 Wochen sind nur noch 400g Kaffee vorhanden.

A17 Ausführliche Lösung

d)



A18 Aufgabe

Tobias und Mario arbeiten als Krankenpfleger in einer Rehabilitationsklinik und beziehen das gleiche Grundgehalt. Zur Zeit müssen beide viel Überstunden leisten. Am Monatsende vergleichen sie ihre Gehaltsabrechnungen. Der Bruttolohn von Tobias beträgt 3559 €, der von Mario 3223 €. Tobias hat im laufenden Monat 43 Überstunden, Mario dagegen nur 27 Überstunden geleistet. Berechnen Sie das Grundgehalt und die Überstundenpauschale.

A18 Ausführliche Lösung

Anzahl der Überstunden: x Ausgezahlter Bruttolohn f(x)

Gegeben sind zwei Wertepaare:

$P_1(43\,|\,3559)$ und $P_2(27\,|\,3223)$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3223 - 3559}{27 - 43} = \frac{-336}{-16} = 21 \Rightarrow f(x) = 21x + a_0$$

$(a_1 = \text{Überstundenpauschale} \quad a_0 = \text{Grundgehalt})$

$$P_1(43\,|\,3559) \Rightarrow f(43) = 3559 \Leftrightarrow 21 \cdot 43 + a_0 = 3559$$

$$\Leftrightarrow 903 + a_0 = 3559 \,|\, -903$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 2656$$

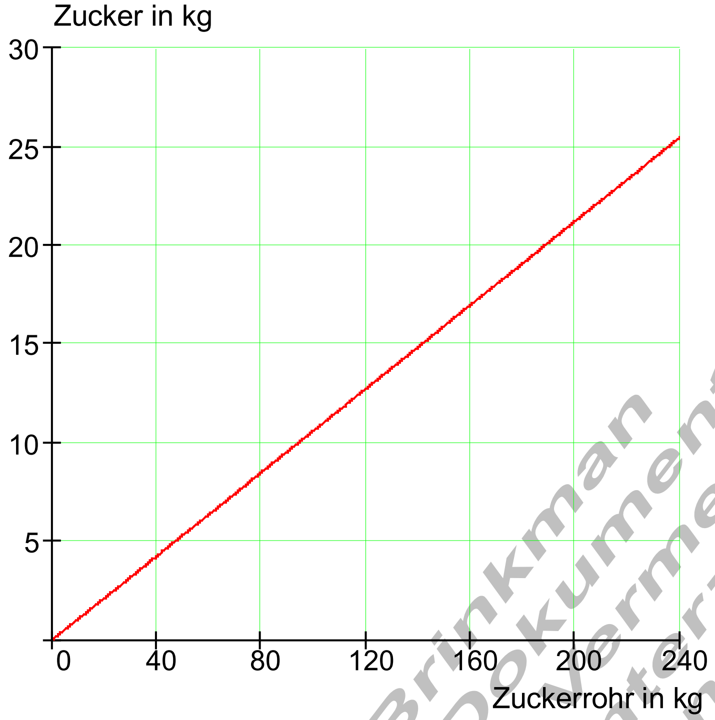
$$\Rightarrow f(x) = 21x + 2656$$

Das Grundgehalt beträgt 2656 €, die Überstundenpauschale 21 €.

A19	**Aufgabe**	
	Aus 80 kg Zuckerrohr lassen sich 8,5 kg Zucker herstellen. (Ein linearer Zusammenhang zwischen Zuckerrohr und Zucker wird angenommen). Ein Funktionsterm f(x) beschreibt, wie viel kg Zucker man aus x kg Zuckerrohr erhält.	
	a)	Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x).
	b)	Berechnen Sie: $f(100)\,;\, f(250)\,;\, f(x)=25$
	c)	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f(x).

A19	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$x-$Achse kg Zuckerrohr $\quad y-$Achse kg Zucker $f(x)=a_1x+a_0$ 80 kg Zuckerrohr $\rightarrow$ 8,5 kg Zucker $\Rightarrow P_1(80\mid 8{,}5)$ 0 kg Zuckerrohr $\rightarrow$ 0 kg Zucker $\Rightarrow P_2(0\mid 0)$ Ursprungsgerade $\Rightarrow a_0=0$ Steigung: $a_1=\frac{8{,}5}{80}=\frac{17}{160}\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=\frac{17}{160}x}}$

A19	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$f(x)=\frac{17}{160}x\Rightarrow f(100)=\frac{17}{160}\cdot 100=10{,}625$ $f(250)=\frac{17}{160}\cdot 250=\frac{425}{16}\approx 26{,}563$ $f(x)=25\Leftrightarrow \frac{17}{160}x=25\,\vert :\frac{17}{160}\Leftrightarrow x=\frac{4000}{17}\approx 235{,}3$ Aus 100 kg Zuckerrohr lassen sich 10,625 kg Zucker gewinnen. Aus 250 kg Zuckerrohr lassen sich etwa 26,563 kg Zucker gewinnen. Für 25 kg Zucker benötigt man etwa 235,3 kg Zuckerrohr.

A19	**Ausführliche Lösung**	
	c)	

A20	**Aufgabe**	
	In einem volkswirtschaftlichen Modell sind die Konsumausgaben linear vom verfügbaren Einkommen abhängig. Bei einem Einkommen von 1000 € betragen die Konsumausgaben 900 €. Bei einem Einkommen von 1800 € betragen sie 1460 €.	
	a)	Ermitteln Sie einen Funktionsterm für die Konsumfunktion K.
	b)	Berechnen Sie die Höhe der Konsumausgaben wenn das Einkommen 800 €, 2500 € bzw. 4000 € beträgt.
	c)	Die Konsumquote ist der Anteil des Einkommens das für den Konsum aufgewendet wird. (Konsumquote = Konsum / Einkommen) Bestimmen Sie die Konsumquote für die Einkommen aus b). Welcher allgemeiner Zusammenhang besteht zwischen Konsumquote und Einkommen?
	d)	Der Einkommenszuwachs betrage dx. Wie viel Prozent des Einkommenszuwachses wird für den Konsum ausgegeben?
	e)	Welche Funktion S beschreibt die Sparleistung in Abhängigkeit vom Einkommen? Stellen Sie die Funktion K und S graphisch dar. Welche Bedeutung hat die Nullstelle von S?

A20 Ausführliche Lösung

a) unabhängige Variable: $x = \text{Einkommen}$

abhängige Variable $y = K(x) = \text{Konsumausgaben}$ (linearer Zusammenhang)

$\Rightarrow K(x) = a_1x + a_0$

Aus den gegebenen Bedingungen folgt: $P_1(1000 \mid 900)\,;\,P_2(1800 \mid 1460)$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1460 - 900}{1800 - 1000} = \frac{560}{800} = 0,7 \Rightarrow K(x) = 0,7x + a_0$$

$P_1(1000 \mid 900)$: $K(1000) = 900 \Leftrightarrow 0,7 \cdot 1000 + a_0 = 900 \Rightarrow a_0 = 200$

$\Rightarrow \underline{\underline{K(x) = 0,7x + 200}}$

A20 Ausführliche Lösung

b) $K(800) = 0,7 \cdot 800 + 200 = 760 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(800 \mid 760)}}$

$K(2500) = 0,7 \cdot 2500 + 200 = 1950 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(2500 \mid 1950)}}$

$K(4000) = 0,7 \cdot 4000 + 200 = 3000 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(4000 \mid 3000)}}$

A20 Ausführliche Lösung

c) $$\text{Konsumquote} = \frac{\text{Konsum}}{\text{Einkommen}} = \frac{K(x)}{x}$$

Einkommen 800 € $\Rightarrow$ Konsumquote $= \dfrac{760}{800} = 0,95 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{95\%}}$

Einkommen 2500 € $\Rightarrow$ Konsumquote $= \dfrac{1950}{2500} = 0,78 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{78\%}}$

Einkommen 4000 € $\Rightarrow$ Konsumquote $= \dfrac{3000}{4000} = 0,75 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{75\%}}$

Allgemeiner Zusammenhang:

$$\text{Konsumquote} = \frac{K(x)}{x} = \frac{0,7x + 200}{x} = 0,7 + \frac{200}{x}$$

Bemerkung:
Je höher das Einkommen, desto mehr nähert sich die Konsumquote dem Wert 0,7, das bedeutet, mindestens 70% des verfügbaren Einkommens wird für den Konsum ausgegeben. Der Rest kann gespart werden.

A20 Ausführliche Lösung

d) Anastz:

altes Einkommen $x \Rightarrow K(x) = 0,7x + 200$

neues Einkommen $x + dx \Rightarrow K(x + dx) = 0,7(x + dx) + 200$

Einkommenszunahme $x + dx - x \Rightarrow K(x + dx) - K(x)$

$\Leftrightarrow 0,7(x + dx) + 200 - (0,7x + 200) = \underline{\underline{0,7dx}}$

Folgerung:
70% des Einkommenszuwachses wird für den Konsum ausgegeben.
Das entspricht der Steigung von K(x).

A20 Ausführliche Lösung

e) Alles was nicht konsumiert wird, wird gespart.

$$S(x) = x - K(x) = x - (0{,}7x + 200) = \underline{\underline{0{,}3x - 200}}$$

A21 Aufgabe

Die Firma „Big Beauty“ produziert den Lippenstift „Amore“. Die bei der Produktion entstehenden Kosten K sind von der hergestellten Stückzahl abhängig. Bei der Produktion von x = 100 Stück entstehen Kosten von 385 €, bei der Produktion von x = 200 Stück entstehen Kosten von 410 €. Zwischen der Stückzahl und den entstehenden Kosten bestehe ein linearer Zusammenhang.

a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion.

b) Wie hoch sind die Stückkosten bei einer Produktion von x = 140 Stück?

c) Gegen welchen Wert streben die Stückkosten bei sehr hohen Stückzahlen?

d) Bei welcher Menge x liegt die Gewinnschwelle, wenn ein Verkaufspreis von 5,20 € pro Lippenstift erzielt wird?

e) Zeichnen Sie die Graphen von K(x) und E(x) in ein Koordinatensystem.

A21 Ausführliche Lösung

a) $P_1(100\,|\,385)\,;P_2(200\,|\,410)\,;\text{Kostenfunktion}: K(x) = a_1x + a_0$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{410 - 385}{200 - 100} = 0{,}25 \Rightarrow K(x) = 0{,}25x + a_0$$

$$P_1(100\,|\,385): \quad K(100) = 385 \Leftrightarrow 0{,}25 \cdot 100 + a_0 = 385 \Rightarrow a_0 = 360$$

$$\Rightarrow \text{Kostenfunktion}: \underline{\underline{K(x) = 0{,}25x + 360}}$$

A21 Ausführliche Lösung

b) Kosten für 140 Stück: $K(140) = 0{,}25 \cdot 140 + 360 = 395$

$$\text{Stückkosten} = \frac{\text{Kosten}}{\text{Stück}} = \frac{K(x)}{x} = \frac{K(140)}{140} = \frac{395}{140} = \underline{\underline{2{,}82}}$$

Bei einer Produktion von 140 Stück betragen die Stückkosten 2,82 €.

A21 Ausführliche Lösung

c)

$$\text{Stückkosten} = \frac{\text{Kosten}}{\text{Stück}} = \frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}25x + 360}{x} = 0{,}25 + \frac{360}{x}$$

Für sehr große Stückzahlen wird der Term $\frac{360}{x}$ immer kleiner,

so dass die Stückkosten sich immer mehr dem Wert $\underline{\underline{0{,}25\text{ €}}}$ nähern.

Mathematisch schreibt man das so: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{K(x)}{x} = 0{,}25$

A21	**Ausführliche Lösung**	
	d)	Gewinnschwelle bedeutet, der Erlös E(x) ist gerade so groß wie die Kosten K(x). $E(x) = p \cdot x = 5{,}2x \quad K(x) = 0{,}25x + 360$ $E(x) = K(x) \Leftrightarrow 5{,}2x = 0{,}25x + 360 \Leftrightarrow x = \frac{360}{4{,}95} \approx \underline{\underline{73}}$ Ab einer verkauften Menge von 73 Lippenstiften wird Gewinn gemacht.

A21	**Ausführliche Lösung**	
	e)